航空及び航海に於ける光信號の研究* IV

正會員 猪 狩 満 和 譯

霧の中に於ける光の擴散

航空者は視度を低下する種々の状態に遭遇する。煙霧及び煙は通常空氣中に極めて小さい粒が存在するために生ずるものである——その粒たるやその直徑が光の波長よりも小さい。Rayleigh の法則によれば、かくの如き粒のために散亂せられる光の量は、光の波長の 4 乗に反比例する。それ故に、白い光が煙霧又は煙を透過するとき、散亂せられる光は主に青であるのに、これを透過した光は赤くなる。空や遠い山の色が青いこと及び没しつつある太陽の色が赤いことは、この種の散亂で説明することが出来る。

光を散亂させる外に、煙及び煙霧は明らかに光を相當に吸収する。

然しながら、工場の煙から離れてゐる區域に於ては、地面の霧か又は雲のやうな清らかな白い霧に遭遇する。このやうな霧は、直徑凡そ 2.2×10^{-3} 乃至凡そ 10^{-2} cm の範圍の小さい水滴より成るものであるから、普通の光の波長に比べて 40 乃至 200 倍大きい。従つて煙霧及び煙の色特性は清らかな霧及び雲には存在しない。

赤とか青とかいふ如き或る色は白い光よりも霧の中を透過し難いかどうかといふ問題が屢々擧げられた⁽⁶⁾。水滴の直徑が大きいから、霧による光の散亂は可視及び紫外スペクトルを通じて同一であり、且つ赤外に於て波長が凡そ 20μ に達したときにだけ散亂が減すべきである。可視スペクトルに於てはこの決論は、日輪が清らかな霧或は雲を通してかすかに認められる事實によつて確められた。又曇つてゐる日の照明は晴れてゐる日とは、はつきり違ふ色ではない事實によつても確められた。

このやうに霧及び雲による光の散亂は、球狀の小さい水滴による光の遮斷によるものである。 n を單位體積の中にある水滴 (直徑 d) の数とすると、單位體積の重量 w は

$$w = (\pi/6) n d^3. \quad (22)$$

強さ I の光が雲を通つて距離 dx だけ通ると、直通光の強さは $-dI = I(\pi/4) n d^2 dx$ だけ減少する。こゝに $(\pi/4) d^2$ が各水滴が遮斷する面積である。従つて散亂係数は $(\pi/4) n d^2$ である。これの逆数、即ち

$$\lambda_0 = 4/(\pi n d^2) = (2/3)(d/w) \quad (23)$$

* A Study of Light Signals in Aviation and Navigation. By I. Langmuir and W. F. Westendorp, (Physics, 1, 5 (1931-XI) 273-317)

+ Handbuch d. Exp. Physik 25 (1) p. 51 (1928).

(6) U. S. Air Services, July 1931, p. 20-25 所載の L. H. Anderson の論文 Fog Penetration を見よ。これは Trans. Amer. Soc. Mech. Eng.; Section on Aeronautical Engineering に載せられる筈。

は雲を通しての光の“自由行路”即ち直通光の強さが $1/e$ に小さくなるまでに光が進む平均の距離である。この自由行路は氣體の運動説に用ゐられるものと全く類似のものである。

雨雲で實驗して定めた w の値は 1×10^{-6} 乃至 2×10^{-6} g/cm³ であつた。空氣中に含まれてゐる水蒸氣の量から w の値の可能な最大値を推定することが出来る。

雨雲の中へ昇つて來る空氣は雲の下面に達したときに飽和せられる。夏にはこの點(1000 m の高さ)に於ける溫度は 20°C と推定せられる。そのときの水蒸氣の全量は 17.2×10^{-6} g/cm³ である。この飽和せられた空氣が更に 1000 m 昇ると斷熱膨脹によつて冷やされて 15.8° に降り、水蒸氣の量は 13.3×10^{-6} g/cm³ となる。これ等の量の間の差、即ち $w = 3.9 \times 10^{-6}$ は、高さ 2000 m の雲の cm³ についての水滴の體積でなければならない。雲の下面の溫度が -5°C である冬の狀態に對する同様な計算によれば、2000 m の高さに於て溫度が -11.6° となり、 $w = 1.4 \times 10^{-6}$ を與へる。これ等の w の値は實驗で得られた値とよく一致する。

かくして雲又は清らかな霧に起り得る最も短い自由行路は大略 $w = 2 \times 10^{-6}$ 及び $d = 3 \times 10^{-3}$ に相當する。これ等の値は式 (23) によつて $\lambda_0 = 1000 \text{ Cm}$ 即ち 10 m を與へる。式 (22) によればこの性質の霧には cm³ につき僅かに 140 滴しか存在しない。

通常航空者が遭遇する薄い雲及び霧に於ては自由行路 λ_0 は 30 乃至 100 m の範圍にある。

水滴に遮斷せられる光は色々の方向に散亂せられるが一樣ではない。大部分は前方に散亂せられる。これは元平行である光の**前方成分**は、散亂せられない成分の強さ程急に減じないことを示す。この現象は氣體の運動説に於て取扱はれる**速度の保存**に正に相當するものである。⁽⁷⁾

霧を通して一つの物體のはつきりした外廓が見られる距離は、主として光が目立つ程方向を變へずに進む距離によつて變る。かやうに、吾々が水滴の直徑から計算した自由行路 λ_0 はこのやうな問題に適用し得る。

然しながら、與へられた厚さの雲の層を通してか、又はそれから反射せられて擴散する光の量を考へなければならないならば、違ふ種類の自由行路 λ を考へなければならない。即ち平行な光が、その**前方成分**が $1/e$ に弱くなるまでに進む平均の距離である。この自由行路は恐らく λ_0 よりは 2~3 倍大きいだらう。

霧の中の光の透過は、一つの氣體が他の氣體の中に擴散するときと同様の法則に従ひ、傳導體の中の熱或は電氣の流に類似する。霧の中の任意の點に於ける光の強さは大略すべての方向に同じであつて、c/cm² で表はされた輝度 H で測られる。

この平均の輝度 H に相當して、任意の方向に傾いてゐる假想平面を通過して流れる光の“任意光束密度” $F = \pi H$ がある。然しながら、 H は霧の中で一樣でないから、假想平面を通過する正味の流を表はす“正味光束密度” F_0 が考へられる。畢竟これはベクトル量で任意の方向に於ける成分は、その方向に於ける H の勾配に比例する。

(7) Jeans, Dynamical Theory of Gases を見よ。

氣體に於ける自己擴散係數 D は平均自由行路 λ 及び平均分子速度 v から計算することが出来る。その結果は $D=\lambda v/3$ である、光の擴散に對する類似の計算をすれば、 x 軸に平行な方向に於ける正味光束の成分 F_x に對して次の式を得る。

$$F_x = -(4\pi/3)\lambda \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (24)$$

これから見ると、 $4\pi\lambda/3$ といふ量は霧の光傳導度と名づけることが出来る。輝度 H は光位と看做されるスカラー量であつて、全く電位、熱の傳導問題に於ける溫度、又は擴散問題に於ける濃度に類似する。

式 (24) を導出するのに自由行路 λ は雲の大いさに比べて小さいことを假定した。

今この見解を以て、或る代表的な簡単な理想化せられた場合の輝度の分布を計算する。

1. 球形雲の中心にある點光源

半徑 r_0 の雲の中心 O にある L lm の光源を考へる。光は散亂せられるが、吸収せられないと假定すると、中心が O にある任意の球面を通過する總光束は L である。従つて中心から任意の距離 r に於ける半徑の方向の光束密度 F_r は

$$F_r = L/4\pi r^2. \quad (25)$$

これを (24) と組合はせ積分すると

$$H = \frac{3L}{16\pi^2\lambda} \left(\frac{1}{r} + K \right)$$

こゝに K は積分常數である。 λ は r_0 に比べて小さいと假定してあるから、 $r=r_0$ (雲の外表面) のとき $H=0$ と置くことが出来て、 $K=-1/r_0$ を得るから

$$H = \frac{3L}{16\pi^2\lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (26)$$

これ等の境界條件を更に精細に吟味する。遠くから見たとき、雲の外表面は輝度 H_0 を有するやうに見える。この H_0 は $r=r_0$ のとき式 (25) が與へる光束密度 F から式 (3) によつて計算することが出来る。かくして

$$H_0 = L/4\pi^2 r_0^2. \quad (27)$$

雲の外表面に位置を占めた觀測者は、若しも雲の内の方に向へばこの輝度 H_0 を見るが、中心から外の方に向へば輝度は $H=0$ を見る。かくてこの面に於て、 H は最早や雲の内部とは異なりスカラー量でなくなつて、見る方向によつて變る。式 (26) に於て式 (27) から得る $H=H_0$ と置けば

$$r_0 - r = (4/3)\lambda. \quad (28)$$

換言すれば、雲の外表面の内 $(4/3)\lambda$ の距離に於ける輝度の値は H_0 である。これは雲から發する光を説明する。この結果は、雲から逃れる光は、大して散亂せず厚さが λ と同程度の

層を通過することを思へば合理的であるやうに思はれる。

それ故に、一般に任意の雲塊内の輝度の分布を計算するのに、外面に於て $H=0$ と置いてよい。かくして、外部の一點から見た見かけの輝度は、眞の面の内側、深さ $(4/3)\lambda$ の所にある面に對して計算せられた輝度である。

照明せられた雲の内部の輝度 H を、霧がなく、光源が直接に白い擴散面を照らしたときに同じ距離に於て得られる輝度と比較するのは興味がある。式 (26) が與へる H を、霧がないときに適用せられる $H=L/4\pi^2r^2$ と比較して霧の影響は輝度を比

$$3_r(r_0-r):4\lambda r_0 \quad (29)$$

に増すことであることがわかる。

r が増すと、この比は $r=0.5r_0$ のときに極大値 $3r_0/16\lambda$ に達する。かやうに、半径 1000 m, 自由行路 $\lambda=30$ m の球形の雲に於て、中心に於て 5000 c の光 ($L=6,0000$ lm) は光源から 500 m の距離に於て、 $H=3.8\times 10^{-6}$ c/cm² の輝度を與へる。これは、この距離に於ける光源からの光が直接垂直に白い擴散面を照らしたときの輝度 (0.63×10^{-6}) の 6 倍以上である。かやうに霧は光傳導度が小さいから光の逃げることを妨げる傾向があり、従つて雲の中の輝度を増す。雲の外面の輝度は式に (27) によつて $H_0=1.5\times 10^{-7}$ c/cm² であつて、これは光電受光器の限界感度の凡そ 4000 倍である。

火箭又は火焰以外では通常大きな雲の中心に於て光源を造ることが出来ないから、前の場合は寧ろ學究的であるやうに見える。然しながら、例へば雪で蔽はれたときのやうに、地面が受ける光の殆どすべてを反射するときには、地上に厚い層の霧があり、地上に光源があるとき、正味光束分布は式 (25) が與へるものゝ 2 倍であり、従つて式 (25) の右邊を 2 倍すると輝度分布が得られる。地面の反射が不完全であるときはこれ等の條件は修正せられる。

霧の中の方向效果

式 (24) が與へる霧の中の正味光束密度 F_x は、反對の方向に流れてゐる二つの流の差と看做することが出来る。霧の中に x 軸に垂直な平面に置いた小さい白い平面 (λ に比べて大きさの小さい) の兩側は同じに照らされず、輝度の差 ΔH_x は

$$\Delta H_x = \frac{F_x}{\pi} \quad (30)$$

式 (25) から得られる F_r の値をこれに置換へ、且つ式 (26) が與へる H で割ると方向比として次の値を得る。

$$\frac{\Delta H_r}{H} = 4\lambda/3r(1-r/r_0) \quad (31)$$

$r=0.5r_0$ のときこの比の値は極小となる。今考へた例に於て $\Delta H_r/H$ の最小値は 0.16 である。前に記した差働光電受光器は僅か 1.5% の差を検知することが出来る。それ故に光が

來る方向を示すことが出来る。

かくの如き装置を飛行機に用ゐると、二つの強さが釣合ふやうにすれば、最も強い光の方に飛行機を向けることが出来る。然るときは直線飛行でその飛行機を光源の方へもたすことが出来る。

2. 上方或は下方から一様に照らされた雲の層

一様な厚さ h の雲の層があつて、その上面が太陽又は月に照らされてゐる場合を考へる。 F_s を例として第 1 表に與へたやうな光源が生ずる光束密度とすれば、若しも雲の上面が完全擴散反射體であるならば、その輝度は

$$H_s = (F_s/\pi) \sin \alpha \quad (32)$$

である。こゝに α は水平面上の角高度である。 H_T を雲の層の頂上の實際の輝度とすれば、雲を通る間に光が吸収せられるために H_T は H_s よりも小さい。 H_R を地上から見た雲の層の底面の輝度とし、 R を地面の平均の反射率とする。水平面に於ける對應する光束密度 ($F = \pi H$) は F_T 及び F_R である。そして地面に達する光束は F_R で、地面から反るのは RF_R 、地面の吸収による光の損失は $F_R(1-R)$ である。この損失は雲の層を通る正味光束 F_s に等しくなければならぬ、又雲の層の頂上に於ける正味の投射 $F_s \sin \alpha - F_T$ に等しくなければならぬ。かくして式 (24) 及び (32) によつて

$$H_R(1-R) = \frac{4\lambda}{3h}(H_T - H_R) \quad (33)$$

及び

$$H_R(1-R) = H_s - H_T. \quad (34)$$

二つの變數 H_T 及び H_R を分離して次の式を得る。

$$\frac{3h}{4\lambda} = \frac{H_T}{H_s - H_T} - \frac{1}{1-R} \quad (35)$$

及び

$$\frac{3h}{4\lambda} = \frac{H_s - H_R}{H_R(1-R)} - 1. \quad (36)$$

H_T 及び H_R の測定は飛行機から容易に行はれる。而して同時に h を測れば色々な型の雲の層に對する λ の値を求めることが出来る。然しながら、地面からの測定だけでも有用な資料を與へる。寫眞露出の表によれば、“濃雲”と記される日に露出は僅か 10 倍増せばよい。若しもこれ等の條件の下に於て、雲の層の上面が投射光の 90% を反射するならば、雲の層の中で吸収による著しい損失はあり得ない。濃雲となるに十分な雲の層は 1000 m 或は 2000 m の厚さと想像せられるが、これだけの層は、地面に於ける輝度を $H_R : H_s = 1 : 10$ の比に變化させる。式 (36) から

$$\frac{3h}{4\lambda} = \frac{8+R}{1-R}.$$

空港の塔で行つた測定によれば、地面の反射率 R は通常非常に小さい。例へば空港の地面の反射率は 9 乃至 21 % の範囲にある。樹木（葉のない）で蔽はれた土地は僅かに 5 % に過ぎない。前の式が興へる h/λ の値は R に餘り影響せられないから、 $R=0.1$ 及び $R=0.2$ に對して h/λ の値は夫々 12 及び 13.7 である。これから λ を求めると、1000 m の層では $\lambda=80$ m で、2000 m の層では $\lambda=160$ m である。

例へば規則正しく排列せられてゐる燈火等で下から一様に照らされてゐる雲の層に於ては、問題は今述べたものとは異なり、雲の層の底面から下の方へ反射せられる光 F_R は一部分地面から又反射せられて雲を照らすに與る。然し式 (33) の代りに式 (34) が用ゐられ

$$H_T = \frac{4\lambda}{3h} (\dot{H}_R - H_T) \quad (33a)$$

又式 (35) 及び (36) の代りに

$$1 + \frac{3h}{4\lambda} = \frac{H_S - H_T}{H_T(1-R)} \quad (35a)$$

及び

$$\frac{3h}{4\lambda} = \frac{H_R(2-R) - H_S}{H_S - H_R(1-R)} \quad (36a)$$

こゝに H_S は雲の底面が完全に反射し、且つ地面が完全に反射しないときの底面の輝度である。若しも F_S が地面に於ける、光源からの平均の鉛直光束密度であるならば $H_S = F_S/\pi$ である。若しも雲の層が濃いならば、即ち λ が非常に小さいならば $3h/4\lambda$ は非常に大きくなり、 H_R は

$$H_R = H_S/(1-R)$$

に近づき、かくして、若しも地面の反射率が大きいならば H_S よりも非常に大きくなることは注意すべきである。(式 (36a) による)。

3. 反射率の小さい地面に近い霧の中の點光源

地面がよい反射體である場合の例は既に述べた。次に地面が完全に黒く ($R=0$)、光源が地面上高さ b の點 B にある場合を考へる。

地面は受けるすべての光を吸収するから、霧の外面に於けると全く同様に地面に於て $H=0$ である。霧は無限に濃いと假定して問題を簡単にすることが出来る、かくすれば、問題は電氣を導く平面から b の距離にある點電氣の周りの電位の分布の問題と同様になり、像の方法で容易に解くことが出来る。現在の場合には、黒い地面を完全に透明な平面で置換へ、且つ B にある光源を、その平面に對する B の像である B' にある消耗體（負の光源）に要請する。光

源から距離 r ($r \geq \lambda$) にあり、水平面から角高度 a (光源から見て) にある任意の點に於ける輝度 H は

$$H = \frac{3 L_u b}{4 \pi^2 \lambda r^2} \sin a. \quad (37)$$

この式に於て、 L_u は光源が上方に即ち上半球に發する光束 (lm) を表はす、下方に發する光は直ちに地面に吸収せられるからこの區別は必要である。實際の場合に、下方に向ふ光を有効な上方に向ふ光に變へるために、光源の下に半球形の反射器を置けば光源の效率は殆ど 2 倍とすることが出来る。この場合に L_u は大略光源の總光束 L に等しい。

光源が實際上地面 ($b=0$) にあるときは式 (37) は $H=0$ を與へる。光源から出る光が平均として散亂せられる前に半径 λ の半球面に達すると考へるときは、地面上の點光源の有効高さは大略 $2\lambda/3$ であることを知る。若しも光を鉛直に上方に集めるならば、その有効高さ* は λ である可能性が多い。かくして式 (37) の b は、 b_0 を光源の實際の高さとすれば、 $b_0 + (2/3)\lambda$ (或は $b_0 + \lambda$) とすることが出来る。

かくして、 $b_0=0$ 従つて $b=(2/3)\lambda$ のときには式 (37) は

$$H = L_u \sin a / 2 \pi^2 r^2. \quad (38)$$

霧がなく、光源が距離 r にある白い面を法線投射で照らすならば、輝度は

$$H = L_u / 2 \pi^2 r^2 \quad (38a)$$

これは光源の眞上のすべての點に於ける。霧の中の輝度と同じである、 a の他の値に對しては輝度は小さい。

第 15 圖は $L_u=6,0000$ lm (半球形反射器をつけると 5000 球面燭) の光が無限の霧に輝度

第 15 圖 附近に上半球に 6,0000 lm を投射する光源がある黑色地面 ($R=0$) を蔽ふ無限霧に於ける等輝度面 ($H=3 \times 10^{-9} \text{ c/cm}^2$)。C は半球反射器附の光源の上方の光度である。

* 静かな霧の天氣に於ては、地面に火を置き清らかな空氣の上昇氣流を生ぜしめ、標識燈の光を λ よりももつと高い高さに投射して、更に高い有効高さを得ることが出来る。

$H=3 \times 10^{-9} \text{ c/cm}^2$ を生ずる光達距離の資料を與へる。これは光電受光器の限界値の凡そ 75 倍である。

曲線 I は標識燈が地面上 (有効高さ $2\lambda/3$) にある場合に對するものである。そのときには光達距離は霧の濃さに關係しない。曲線 II 及び III は標識燈を高さ 50 m の塔に置く効果を説明する。光達距離は著しく増し、今や濃い霧に對して浅い霧よりも相當大きくなり、霧の濃さによつて變る。霧が少しもないとき光達距離 ($H=3 \times 10^{-9}$ に對する) は曲線 IV で表はされる。これは式 (38a) によつて曲線 I の最大の高さに等しい半徑の半圓である。曲線 III と IV とを比較すると、霧が如何に擴散光信號の光達距離を擴張し得るかを知ることが出来る。

x を光源からの水平距離とすれば ($x=r \cos \alpha$) 式 (37) を部分微分し式 (24) と組合はせ、任意の點に於ける正味光束密度の水平成分を求めると

$$F_x = \frac{3 I_0 b}{\pi r^3} \sin \alpha \cos \alpha \quad (39)$$

且つ式 (30) によつて方向比は

$$\frac{\Delta H_x}{H} = (4 \lambda / r) \cos \alpha \quad (40)$$

これは光源の高さ b に關係しない。

若しも受光器が反對の方向の光の間の 1.5% の差を検知することが出来るならば、凡そ 200λ 或は 10 km (若しも H が 3×10^{-9} 位大きいとき) の距離に於て方向効果を與へることが出来る。

4. 霧又は雲の一樣な層の中の點光源

(a) 白い地面 ($R=1$)

厚さ h の霧の層で蔽はれた、完全反射をなす地面の上の點光源を考へる。霧の上面に於て $H=0$ である。像の方法によればこの問題は、相隣る電氣の距離が $2h$ で鉛直線上に排列せられた正及び負の電氣の交互の排列が生ずる電位分布の決定と同様である。Madelung⁽⁸⁾ はこの問題及びイオンで組立てられてゐる結晶に於ける電氣力の研究に於ける同様な問題を解いた。完全な解は Hankel 函數を使はないと表はすことが出来ないが、表が利用せられる。吾々は主として、雲の層の厚さ h に比べて光源から可なり遠い距離に於ける輝度の分布に興味を有する。このときには式はずつと簡單になる。次の式は Madelung の式を輝度の分布の計算に適するやうに直したものである。

地面から高さ y で、標識燈から水平距離 x である、霧の層の内の任意の點に於て輝度 H は

(8) E. Madelung, Phys Zeits. 19, 524-532 (1918).

$$H = \frac{3 L e^{-\pi x/2h} \cos(\pi y/2h)}{4\pi^2 \lambda h^{1/2} x^{1/2}} \quad (41)$$

こゝに L は光源の總光束である。地面は完全反射をなすから、この光はすべて雲の層の上面から逃げて行く。この式は h に比べて大きい x の値に對して正確である。然しながら、 $h/3$ 位小さい x の値に對しても誤差は凡そ 10% よりも大きくない。

式 (40) に導いたと同様の方向比の計算は、この場合に $x \geq h$ に對して次の式を與へる。

$$\frac{\Delta H_x}{H} \doteq 2\pi\lambda/3h. \quad (42)$$

標識燈の眞上の點に於ける霧の上面の輝度 H_0 は、 $x=0$, $y=h$ であつて (正確に)

$$H_0 = 0.09280 L/h^2. \quad (43)$$

$x > h$ である上面の點に於て、輝度 H_0 は

$$H_0 = \frac{L e^{-\pi x/2h}}{2\pi h^{3/2} x^{1/2}}. \quad (44)$$

これ等の結果を吟味すると、霧の中及び上面に於ける輝度は、水平距離が大きくなると指數的に小さくなり、距離が $0.63h$ 大きくなる毎に $1/e$ になることがわかる。

信號が発見せられる光達距離の例として次の條件を假定する。飛行機が厚さ $h=500$ m, 自由行路 $\lambda=50$ m の霧の層の中、高さ $y=250$ m の所を飛んでゐる。地面は雪で蔽はれ、地面上に 5000 c, $L=6,0000$ の標識燈がある。式 (41) によつて、標識燈から色々の水平距離 x に於ける c/cm^2 で表はされた輝度を求めると、1, 2, 3, 及び 4 km に於て夫々 1.2×10^{-6} , 3.7×10^{-8} , 1.3×10^{-9} , 及び 5×10^{-11} である、かくして $4 \times 10^{-11} c/cm^2$ は発見し得るから、信號は光源から 3 乃至 4 km の距離に於て認められ得る。凡そ 20% の方向比は 3 km 以下の距離に於てよい方向効果を與へる。雲の層の頂上に於ける輝度 H_0 は $3\lambda/h$ 即ち 200 m の高さに於ける値の 0.3 倍であるから、今求めた発見の光達距離は大略層内の飛行機の高さには關係しない。

(b) 黒い地面 ($R=0$)

像の方法によればこの問題は、一樣な間隔 $2h$ で鉛直線上に排列せられた雙極の系列の電位を求める問題と同等である。雙極の各は上が正の源 L で下が負の源 $-L$ で、その間の距離が $2b$ である。

地面からの光源の高さが霧の層の厚さ h に比べて小さいならば、任意の點 (x, y) に於ける輝度 H は

$$H = \frac{3 L_a b}{2^{3/2} \pi \lambda h^{3/2} x^{1/2}} \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) e^{-(\pi x/h)} \quad (45)$$

L_a は前の如く標識燈が上方に發する總べての光束である。

式 (37) に於けるが如く, b は標識燈の有効高さ $b_0 + (2/3)\lambda$ である.

かくして若しも標識燈が實際上地面上にあるならば $b = (2/3)\lambda$ であつて

$$H = \frac{L_u \sin(\pi y/h) e^{-\pi x/h}}{2^{1/2} \pi h^{3/2} x^{1/2}}. \quad (46)$$

$x \gg h$ に對して方向比を計算すると

$$\frac{\Delta H_x}{H} = 4\pi\lambda/3h \quad (47)$$

これは $R=0$ に對する式 (42) が興くる値の 2 倍である.

標識燈の眞上の霧の頂上の面に於ける輝度 H_0 は

$$H_0 = 0.4262 b L_u / h^3. \quad (48)$$

h に比べて大きい水平距離 x に於て頂上の面の輝度は

$$H_0 = \frac{2^{3/2} L_u \lambda e^{-\pi x/h}}{3 h^{5/2} x^{1/2}}. \quad (49)$$

霧の上面からの, 總光束 L_0 (lm) の近似積分は

$$L_0 = 2 L_u b / h. \quad (50)$$

x が大きくなるときの輝度の對數減衰は, 地面が白い場合の 2 倍であることは注意すべきである.

例として前の如く 5000 c ($L_u = 6,000$) の標識燈を採る. h 及び x の色々の値に對して, 式 (46) によつて標識燈が地面に近い場合に對して高さ $y = 0.5h$ に於ける H を計算した. 第 VIII 表は, H が第 I 欄に指示せられた値を有する距離を興へる. 4×10^{-11} c/cm² を檢知し得る光電受光器では 1 乃至 3 km の光達距離が可能である. $0.5h$ 以外の高さに於ては結果は餘り異ならない.

第 VIII 表 5000 c の標識燈 (反射器附) からの光が, 黒い地面を蔽ふ厚さ h の霧の層の内部に於て興へられた輝度を生ずる距離.

H (c/cm ²)	h (m)		
	250	500	1000
10^{-8}	580	950	1500
10^{-9}	760	1300	2180
10^{-10}	930	1640	2870
4×10^{-11}	1000	1780	3140

標識燈の光束が 10 倍になるか, 或は有効高さ b が 10 倍になつても, 標識燈からの光が光電

受光器で検知せられる光達距離は僅かに 20 或は 30% しか大きくならない。

これ等の資料を完全反射の地面に對して計算したものと比較して、地面を黒くすることの影響は、完全反射の地面に對する光達距離の値を凡そ 42% 小さくすることであることを知る。

5. 雲の層からの反射とこれを通しての透過

上に述べた地面に接してゐる霧の薄い層は、霧の層の内部を光が通ることには、恐らく最も稀な場合であらう。然しながら、若しも般空者が霧の層の上を飛行するならば式 (50) によつて霧を通して上方に透過せられた光斑に利用することが出来る。若しも霧の上面が水平であるならば、この光斑から水平面上角 α をなす方向に發する光束は $\sin \alpha$ に比例する。光斑から距離 r (傾いた線に沿うて)、霧の層の頂上の上高さ y に於ける任意の點に於ける光束密度 F は

$$F = L_0 y / \pi r^3 = 2 L_n b y / \pi h r^3. \quad (51)$$

このやうにして傳達せられる信號の光達距離は霧の層自身の中のものよりも遙かに大きい。例へば、 $L_n = 6,0000$, $b = (2/3)\lambda$, $\lambda = 50 \text{ m}$, $h = 250 \text{ m}$ と置いて $F = 5100 y / r^3$ を得る。若しも $y = 2.5 \times 10^4$ (250 m) 及び光電受光器の限界輝度 ($H = 4 \times 10^{-11}$) に對應して $F = 1.2 \times 10^{-10}$ と取れば、第 VIII 表に與へられてある霧の層の中の僅か 1 km の距離に比べて 10.2 km の距離に於ける霧を透して傳達せられた變調せられた光を検知することが出来ることがわかる。

地面にある霧の上方に更に雲が幾層にも重なつてゐるならば、これ等から下に反射せられる光は光達距離を著しく増し、且つ又第 VIII 表に與へられるよりも遙かに大きい距離に於て霧の層の中の光を發見することを得しめる。

若しも霧の層の底面が地面から高さ y_0 にあるならば、標識燈からの光は L_n 雲の底面に光斑を造り、總光の大部分を反射する。かくして飛行機が雲の層の下を飛行するならば、光達距離は式 (51) の最初の 2 項で計算することが出来る。こゝに L_0 は L_n で置換へられ、 y は飛行機の上の天井の高さである。

雲の層が地面から著しく離れてゐるときには、それを通しこの光の透過は式 (35a) 及び (36a) によつて與へられる。雲の層の頂上から逃れる標識燈の光束の分は H_T/H_S に等しい。式 (35a) によつて

$$H_T/H_S = 1 / [1 + (1 - R)(1 + 3h/4\lambda)]. \quad (52)$$

$R=0$ で h/λ が大きいときにはこれは黒い地面に横はる霧の場合に對する式 (50) で與へられる比 L_0/L_n と同じ値となる。かくして式 (51) はなほ、地面上可なりの高さにある雲の層を通して透過する光の發見に對して適用し得る。

この場合に、雲の層の中の輝度は光源から比較的大きい水平距離の間に廣がる。任意の點に於ける輝度 H は式 (35a) 及び (36a) が與へる H_R と H_T との間の一次補間によつて計算する

ことが出来る。この目的に用ゐる輝度 H_s は

$$H_s = L_a y_0 / 2\pi^2 r^3 \quad (53)$$

に等しい。こゝに r は光源から雲の底面にある與へられた點までの傾いた距離である。 $r \gg y$ である大多數の適用には $r=x$ と置くことが出来る。 x は光源からの水平距離である。

これ等の條件の下に於て式 (53) の部分微分と式 (24) 及び (30) との組合はせによつて方向比は

$$\frac{\Delta H_x}{H} = \frac{4\lambda}{x} \quad (54)$$

これは地面上の霧の層の内部の比に對して式 (47) が與へる値の $3h/\pi x$ 倍大きい。

一例として、底面が反射率 $R=0.2$ の地面の上 $y_0=500\text{m}$ にある厚さ $h=500\text{m}$ の雲の層を考へる。 $\lambda=50\text{m}$ 及び $L_a=6,0000\text{lm}$ とする。式 (53) によつて $H_s=1.5 \times 10^8/r^3 \text{c/cm}^2$ を得、それから式 (35a) 及び (36a) によつて $H_T=1.3 \times 10^7/r^3$ 及び $H_B=1.09 H_s=1.65 \times 10^8/r^3$ を得る。方向比は $\Delta H_x/H=2 \times 10^4/x$ である。 $H_T=4 \times 10^{-11}$ と置いて雲の層の頂上に近く飛行する飛行機は $x=r=6.9\text{km}$ の距離に於て光を発見することが出来ることを知る。空の層の底面に近い所で光達距離は 1.61km である。 1.65 及び 3.8km (頂上及び底面) の距離に於て輝度は 3×10^{-9} (限界値の 75 倍) で、方向比は夫々 0.121 及び 0.053 であるが、この輝度では 0.015 を觀測する。

霧の中に於ける光の眞の吸収の影響

以上吸収を無視し得る清らかな白い霧の中の光の散亂を考へた。例へば煙のある霧に於て存在する如き光の吸収があるときに起る修正を簡単に述べる。

この場合に、單位體積毎に、その點に於ける輝度 H に比例する光が吸収せられる (散亂とは異なつて消滅する)。吸収は "體積吸収係數" (Volume-absorption coefficient) A で測ることが出来る。これは毎單位體積、毎單位輝度に吸収せられる光である。それ故に $AH\text{lm}$ の光が單位體積毎に吸収せられる。

霧の吸収度も亦平均自由行路 λ_A で表はすことが出来る。これを定義する最もよい方法は次の關係を用ゐることである。

$$-\frac{dF}{F} = \frac{dx}{\lambda_A} \quad (55)$$

こゝに $-dF$ は dx だけ進む間の吸収のための光束密度 F の減少である。

次の式が證明せられる。

$$\lambda_A = 4\pi/A. \quad (56)$$

こゝで H が唯一つの變數によつて變る特別な場合を考へる。即ち H が (1) 一定の平面 $\beta=0$ からの距離 r 、(2) 一定の線 $\beta=1$ からの距離 r 、(3) 一定の點 $\beta=2$ からの距離 r 。ここに β は三つの場合に對して 1, 2 或は 3 の値を有する。然るときは、三つの場合すべてに對して Poisson の方程式によつて

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{\beta}{r} \frac{dH}{dr} = \frac{3H}{\lambda_A \lambda_S} \quad (57)$$

こゝに λ_S は散亂に對する自由行路、即ち前に λ で示された量である。

若しも $r=\infty$ に於て $H=0$ といふ境界條件を入れて式 (57) を積分すると

1. 平面の場合, $\beta=0$

$$H=H_0 e^{-(3/\lambda_A \lambda_S)^{1/2} r} \quad (58)$$

こゝに H_0 は一定の平面, $r=0$ に於ける輝度である。微分して式 (24) に置換へると $r=0$ に於ける光束密度 F_0 は

$$F_0=4\pi(\lambda_S/3\lambda_A)^{1/2} H_0. \quad (59)$$

2. 圓環の場合, $\beta=1$

この場合の嚴密な式は Bessel 函數を含む。然しながら, $(3/\lambda_A \lambda_S)^{1/2} r$ が 1 より大きい實際の場合には、次の式は十分な近似直を與へる。

$$H=0.03618 \lambda_A^{1/4} \lambda_S^{-3/4} r^{-1/2} L_1 e^{-(3/\lambda_A \lambda_S)^{1/2} r} \quad (60)$$

こゝに L_1 は單位長さ毎の、ルーメンで表はした線光源の光束である。

3. 球の場合, $\beta=2$

$$H=(3L/16\pi^2 \lambda_S r) e^{-(3/\lambda_A \lambda_S)^{1/2} r} \quad (61)$$

こゝに L はルーメンで表はした點光源の光束である。

吸収がないと式 (26) は

$$H=3L/16\pi^2 \lambda_S r. \quad (62)$$

式 (58), (60), 及び (61) を (62) と比較して、散亂と吸収との綜合效果は $0.577(\lambda_A \lambda_S)^{1/2}$ に等しい **有效自由行路** を與へることを知る。これ等の式には指數因數があるから、有要な信號は凡そ $10 \times (\lambda_A \lambda_S)^{1/2}$ よりも遠い距離に傳達せられないことは明らかである。

地面から飛行機への擴散光信號の傳達を決定する最も重要な色々の項目に就いて考究した。適度の強さの光源と現に組立てることの出来る光電受光器とを以て、濃い白い霧を通して可なり距離に信號を傳達することが出来る。煙の存在は光達距離を著しく減ずる。(終)