相互反射を伴う放射系の表現形式

—逐次解による定式化—

正 会 員 高 田 誠 二*

A Formulation of the Theory of Interreflection

Seiji Takata (Member)

(National Research Laboratory of Metrology)

ABSTRACT

As generalized equations for expressing the steady state of interreflection, a linear equation and an integral equation are formulated which are capable of representing interreflection in systems of non-diffusely reflecting surfaces having arbitrary configuration and arbitrary emission characteristics. Methods of solving these equations are considered and as for the integral equation the significance of applying the successive substitution method is pointed out. This method is successfully applied to some substantial systems, giving clear physical interpretation and useful mathematical expression of their state, namely, (1) the superposed state of emission and multiple reflections, (2) the thermodynamic equilibrium in completely closed cavities of uniform wall temperature. (3) departure from the thermodynamic equilibrium, effective emissivity, effective absorptivity and effective reflectivity of incompletely closed cavities of non-uniform wall temperature are analysed. Relation of the present work to the previous ones, especially those of Buckley, Yamauti, De Vos, Nakaji, Sparrow and Kelly is discussed

1. 序 論

1. 緒 言

相互反射についてはすでに多くの研究があり¹⁾, 山内, 中路²⁾, 上滝³⁾, 佐土根, 岡山⁴⁾らによる業績も国際的に高く評価されているが, 筆者はかつて開孔つき空どうによる近似的完全放射の実現の際の誤差評価に関連して相互反射の問題を考察し, 二, 三の新しい着眼点から理論を展開した⁵⁾. 第1の着眼点すなわち積分方程式の逐次代入解法を論拠とする相互反射の数学的解析と物理的意味づけ⁶⁾については, のちに一般化も試みられ⁷⁾, また具体例の精密解析への応用が山本によって進められている⁸⁾. 以下, 筆者の着眼点とそこから導かれる帰結とをさらに一般的な立場から述べる. 数値例にはいっさい言及しないが, それらは山本によって近く別報される.

1.2 相互反射の定常状態

放射を透過させない物体が真空中に置かれていて, その表面のすべての面素での放射の放出, 吸収および反射がそれぞれ定常状態にあると仮定し, また物体の大きさも相互間の距離も, 問題とする放射の波長に比し十分に大であって, 放射の散乱や回折のような, 波動性に由来する現象は無視されると仮定する.

この系での相互反射の定常状態を論ずるにあたり, ある面素からの放射を固有放射と合成放射との二つの形態で考える. 前者は, その面素じしんが放出する放射を意味し, 後者は, その面素の固有放射に加えて, 他の面素からその面素へ投射した放射のうちその面素で反射される放射を足し合わせたものを意味する. ここでは固有放射そのものの問題⁹⁾には立ち入らず, それは既知であるとして, 任意の系内で相互反射により生じた合成放射を定量的に記述しようとするのである.

* 計量研究所

定量的な記述のためには、放射輝度の分光密度*を基本的な量として採用し、それも固有放射に関するもの e と合成放射に関するもの ϕ とに区別する。基本的な量をこのように選ぶので、以下 spectro-radiometric な諸量の間の関係だけを示すが、spectro-photometric な諸関係をまったく同じ形式で書き出すことができ、さらに波長に関する積分を考慮すれば radiometric な諸関係が、積分の際に視感度を考慮すれば photometric な諸関係がたやすく導かれる。

2. 通 論

2.1 相互反射の定常状態を記述する方程式

反射の性質を表わす因子として、非完全拡散性反射の記述に適した微分反射率を導入する**。微分反射率 r_x^{ab} とは、面素 x に関して、 a 方向から x に投射した放射束に対する、 b 方向の単位立体角あたりに x から反射される放射束の比である(第1図)。

第 1 図

第2図の系の一面素 x の、 0 方向の合成放射輝度の分光密度 ϕ_x^0 は、 x の 0 方向の固有放射輝度の分光密度 e_x^0 と、他のすべての面素 $x', x'', \dots$ から x に投射した放射のうち x によって 0 方向へ反射される放射の放射輝度の分光密度との和である。後者は $x', x'', \dots$ の x 方向への合成放射輝度の分光密度 $\phi_{x'}^x, \phi_{x''}^x, \dots$ と、各面素相互の幾何学的配置と、 x の微分反射率 $r_x^{x'0}, r_x^{x''0}, \dots$ で定まり、 x 以外のすべての面素*** $x', x'', \dots$ につき総和して

*ある面素から、その単位面積あたりに、また、面素の法線と角 θ をなす方向の単位立体角あたりに、放出される放射束が F であるとき、その面素の、その方向の放射輝度 L は、通常定義に従い、 $L = F / \cos \theta$

であるが、この放射をスペクトルに分けて考え、ある波長における単位波長区間あたりの放射輝度の大きさを、その波長での放射輝度の分光密度と呼ぶことにする。それを l とすれば、 l は波長 λ の関数であって

$$L = \int_0^\infty l d\lambda$$

**De Vos の partial reflectivity¹⁰⁾と同じもの。

***ただし、 x から直接に“見える”面素に限る。

第 2 図

$$\begin{aligned} & (1/x \cos \theta_x^0) \sum r_x^{x'0} \phi_{x'}^x \cos \theta_{x'}^x \cos \theta_{x'}^0 (1/R^2) \\ & = (1/\cos \theta_x^0) \sum r_x^{x'0} \phi_{x'}^x \cos \theta_{x'}^x \cos \theta_{x'}^0 (1/R^2) x' \end{aligned}$$

ここで斜体の x, x' はそれぞれ面素 x, x' の面積を、 R は両面素間の距離を、 θ_p^q は面素 p に関し、それから q へ向かう方向が p の法線となす角を表わす。

固有放射と合成放射の定義に従い、相互反射の定常状態を記述する一般的な方程式として

$$\begin{aligned} \phi_x^0 &= e_x^0 + (1/\cos \theta_x^0) \sum r_x^{x'0} \phi_{x'}^x \cos \theta_{x'}^x \cos \theta_{x'}^0 (1/R^2) x' \\ & \dots \dots \dots (L \cdot 1) \end{aligned}$$

が得られる。あるいは x から x' を見こむ立体角 $\Omega_x^{x'}$ を導入すれば

$$\Omega_x^{x'} = \cos \theta_{x'}^x (1/R^2) x'$$

であるから

$$\phi_x^0 = e_x^0 + (1/\cos \theta_x^0) \sum r_x^{x'0} \phi_{x'}^x \cos \theta_{x'}^x \Omega_x^{x'} \dots (L \cdot 2)$$

また、面素 $x', x'', \dots$ を微小面素 dx' の連続的な集まりと考え、微小立体角 $d\Omega_x^{x'} = \cos \theta_{x'}^x (1/R^2) dx'$ も用いて積分表示に移せば

$$\begin{aligned} \phi_x^0 &= e_x^0 + (1/\cos \theta_x^0) \int r_x^{x'0} \phi_{x'}^x \cos \theta_{x'}^x \cos \theta_{x'}^0 (1/R^2) dx' \\ & \dots \dots \dots (I \cdot 1) \\ & = e_x^0 + (1/\cos \theta_x^0) \int r_x^{x'0} \phi_{x'}^x \cos \theta_{x'}^x d\Omega_x^{x'} \dots (I \cdot 2) \end{aligned}$$

ただし、積分は x 以外のすべての、ただし x から直接に“見える”面素にわたるものとする。

ところで、光学での相互定理について Tingwaldt が論じたところ¹¹⁾によれば、一般に

$$r_x^{x'0} \cos \theta_{x'}^x = r_{x'}^{ox'} \cos \theta_x^0$$

であるから、上記四つの一般的方程式それぞれに対応して

$$\phi_x^0 = e_x^0 + \sum r_x^{ox'} \phi_{x'}^x \cos \theta_{x'}^x (1/R^2) x' \dots (L \cdot 3)$$

$$\phi_{x'}^0 = e_{x'}^0 + \sum r_{x'}^{ox} \phi_x^x \Omega_{x'}^x \dots (L \cdot 4)$$

$$\phi_x^0 = e_x^0 + \int r_x^{0x'} \phi_{x'}^0 \cos \theta_{x'}^x (1/R^2) dx' \dots\dots (I \cdot 3)$$

$$\phi_{x'}^0 = e_{x'}^0 + \int r_{x'}^{0x''} \phi_{x''}^0 d\Omega_{x''} \dots\dots (I \cdot 4)$$

相互反射の定常状態を記述するには、これまでに導かれた (I・1~I・4) あるいは (I・1~I・4) のうちのどれかをいれればよい。以下、これらの方程式をそれぞれまとめて (L) および (I) と略称する。

2.2 相互反射方程式の解法

相互反射の定常状態を記述する方程式がこうして定式化されたが、現実に必要な課題を一般的に (記号の添字を略して) いえば、**各面素の各方向の e 、 r および各面素の幾何学的相互関係が与えられているときに、任意の面素の任意の方向の ϕ を求めることである。** そのため解法をここで考察する。

まず、有限個の離散的な面素の系については、**連立方程式**による解法が考えられる。すなわち (L) はすべて

$$\phi_x^0 = e_x^0 + k_{xx_0} \phi_{x_0}^0 + k_{xx'_0} \phi_{x'_0}^0 + \dots\dots + k_{xx_0} \phi_{x_0}^0$$

の形の線形方程式と見なされ、 k_{xx_0} などは既知の係数と考えられる。ところで、面素 x' の x 方向の $\phi_{x'}^0$ についても (L) と同形の式が成立し、それもまた線形方程式

$$\begin{aligned} \phi_{x'}^0 = & e_{x'}^0 + k_{x'x_0} \phi_{x_0}^0 + k_{x'x'_0} \phi_{x'_0}^0 + \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots + k_{x'x''_0} \phi_{x''_0}^0 + k_{x'x_0} \phi_{x_0}^0 \end{aligned}$$

に書きなおせる。こうして、すべての面素から 2 個ずつ取り出した組それぞれについて同様な線形方程式が成立し、けっきょく $m(m-1)$ 個の未知数を含む $m(m-1)$ 元の連立線形方程式が得られ、それを解けば任意の面素から他の任意の面素へ向かう方向の ϕ が求められる。ただし m は面素の数である。

他方、微小面素の連続的な集まりの系に関する方程式 (I) は、本来**積分方程式**と見なされる。ただし、幾何学的変数および積分のための補助変数として何をとりべきかは問題ごとに異なり、時には多数組の変数を使いわけた連立積分方程式を採用しなければならないが、目下の議論では (I) に含まれる関数 ϕ_x^0 、 $\phi_{x'}^0$ 、……が共通な 1 組の幾何学的変数を独立変数とする**同一の関数**であると見なしても一般性が保たれる。そこで、それら 1 組の幾何学的変数のほかに適当な補助変数を採用して積分項の表現を整理すれば、(I) が積分方程式であることはただちに見通される。それを解けば、幾何学的変数の連続関数としての ϕ が得られる。

2.3 相互反射積分方程式の逐次代入解法

積分方程式 (I) の 4 とおりの表現はすべて互いに等価であるから、以下もっとも単純な (I・4) を取り上げ、記号も簡略化して

$$\phi = e + \int r \phi d\Omega \dots\dots\dots (I \cdot 0)$$

と改める。これを解く方法はいくとおりもあるが、この研究では、**逐次代入解法**¹²⁾に特別の意義を認め、その適用を試みる。

まず第 0 次解として任意の連続関数 g を選び、 g を (I・0) の右辺の ϕ に代入したもの

$$\phi_1 = e + \int r g d\Omega \dots\dots\dots (S \cdot 1)$$

を第一次解、次にこの ϕ_1 を (I・0) の右辺のに代入したもの

$$\phi_2 = e + \int r \phi_1 d\Omega \dots\dots\dots (S \cdot 2)$$

を第二次解とし、逐次代入をくり返せば最終的に (I・0) の解が得られ、 g および e が有界であること、および $0 < \rho < 1$ 、 $0 < \Omega \leq 2\pi$ であることを考慮すれば、解の収束性と単一性は証明される。一般に第 n 次解は

$$\phi_n = e + \int r \phi_{n-1} d\Omega \dots\dots\dots (S \cdot n)$$

今度は (S・1) を (S・2) に代入し積分変数を区別するため $d\Omega_1$ の記号を導入すれば*

$$\phi_2 = e + \int r e d\Omega + \int r \int r g d\Omega_1 d\Omega \dots\dots (S' \cdot 2)$$

一般には、 $d\Omega_1$ 、 $d\Omega_2$ ……を導入して*

$$\begin{aligned} \phi_n = & e + \int r e d\Omega + \int r \int r e d\Omega_1 d\Omega + \dots\dots\dots \\ & \dots\dots + \int r \int r \dots\dots \int r g d\Omega_{n-1} \dots\dots d\Omega_1 d\Omega \dots\dots \\ & \dots\dots (S' \cdot n) \end{aligned}$$

こうして ϕ は、(S・1)、(S・2)、……の系列による逐次代入によって、または、(S'・n) の形の多重積分項の和として求められる。

この解法は、実際への応用にあたっても多くの便宜をもたらすものである。なぜならこの解法は、与えられた e 、 r および幾何学的諸関係がどれほど複雑であっても**原理的に適用可能**であるし、とくに、第 0 次解として、ある程度まで正確な近似解が知られている場合や、電子計算機によって整然と、しかも高速度で演算を進めうる場合には、比較的たやすく、精度のよい解を与えるものだからである。

数値解析上の問題は別報にゆずるが、本論文ではこのあと、逐次解法に立脚する相互反射現象の物理的意味づけについて報告する。

* ていねいに書けば

$$\begin{aligned} \phi_{x,n}^0 = & e_x^0 + \int r_{xx'}^0 e_{x'}^0 d\Omega_{x'} + \int r_{xx'}^0 \int r_{x'x''}^0 e_{x''}^0 d\Omega_{x''} d\Omega_{x'} \\ & + \int r_{xx'}^0 \int r_{x'x''}^0 \int r_{x''x'''}^0 e_{x'''}^0 d\Omega_{x'''} d\Omega_{x''} d\Omega_{x'} + \dots\dots \end{aligned}$$

3. 各 論

3.1 放射の重なり合い

(I・0) を逐次代入法で解くにあたり、第0次解として各微小面素の固有放射輝度の分光密度 e を採用してもよい。そのとき

$$\phi_0 = e, \dots\dots\dots (e \cdot 0)$$

$$\phi_1 = e + \int r e \, d\Omega \dots\dots\dots (e \cdot 1)$$

$$\phi_2 = e + \int r \phi_1 \, d\Omega \dots\dots\dots (e \cdot 2)$$

$$= e + \int r e \, d\Omega + \int r \int r e \, d\Omega_1 \, d\Omega \dots\dots\dots (e' \cdot 2)$$

$$= \phi_1 + \int r \int r e \, d\Omega_1 \, d\Omega \dots\dots\dots (e'' \cdot 2)$$

$$\phi_n = e + \int r \phi_{n-1} \, d\Omega \dots\dots\dots (e \cdot n)$$

$$= e + \int r e \, d\Omega + \dots\dots + \int r \int r \dots\dots \int r e \, d\Omega_{n-1} \dots\dots d\Omega_1 \, d\Omega \dots\dots\dots (e' \cdot n)$$

$$= \phi_{n-1} + \int r \int r \dots\dots \int r e \, d\Omega_{n-1} \dots\dots d\Omega_1 \, d\Omega \dots\dots \dots (e'' \cdot n)$$

これらの解はそれぞれ、次のように明かな物理的意味をもつ状態の、放射輝度の分光密度を表わしている。

(e・0) : (その面素の固有放射),

(e・1) : (その面素の固有放射) + (他のすべての面素の固有放射がその面素に直射し反射した放射),

(e・2) : (その面素の固有放射) + (他のすべての面素の(e・1)放射がその面素に直射し反射した放射),

(e'・2) : (その面素の固有放射) + (他のすべての面素の固有放射がその面素に直射し反射した放射) + (他のすべての面素の固有放射が系内で1回反射したのちにその面素に投射し反射した放射),

(e''・2) : (その面素の(e・1)放射) + (他のすべての面素の固有放射が系内で1回反射したのちにその面素に投射し反射した放射)。

一般に (e・n), (e'・n), (e''・n) についても同様な意味づけが可能である。このようにして、**各次数の逐次解は放射の放出とくり返し反射とのさまざまな重なり合いの状態をそれぞれ代表している**、ということが示された。最終解はもちろん放射の放出と無限回反射との重なり合った定常状態を代表している。

この種の推論と表式は、照明理論への応用と low quality の開孔つき空どうの有効放射率¹⁹⁾¹⁴⁾の評価への応用(5.1参照)とにおいて有用である。

3.2 熱平衡放射

系を構成する物体が一つの熱平衡状態にあり(したがって一様で一定な温度にあり)、しかも問題とする面が

全体として一つの閉曲面をなしている(したがって任意の面素から面全体を見こむ立体角は 2π である)場合を考える。

その物体と同温度にある黒体の放射輝度の分光密度を b とする。 b は温度と波長とで定まり、場所にも方向にもよらない。面素 x の 0 方向の放射率を ε_x^0 とすれば、定義により固有放射 e_x^0 は

$$e_x^0 = \varepsilon_x^0 b \dots\dots\dots (1)$$

次に、 0 方向から x へ投射した放射についての反射率*と吸収率をそれぞれ ρ_x^0 , α_x^0 とすると、放射束保存の条件および微分反射率の定義から

$$\alpha_x^0 = 1 - \rho_x^0 = 1 - \int_{2\pi} r_x^{0x'} \, d\Omega_{x'} \dots\dots\dots (2)$$

であり、さらに Kirchhoff の法則から

$$\varepsilon_x^0 = \alpha_x^0 \dots\dots\dots (3)$$

さて逐次代入解 (e'・n) に(1)~(3)を組み合わせ、積分が半空間全体(立体角 2π)にわたることに注意すれば

$$\begin{aligned} \phi_{x,n}^0 &= \varepsilon_x^0 b + \int r_x^{0x'} \varepsilon_{x'}^0 b \, d\Omega_{x'} + \int r_x^{0x'} \int r_{x'}^{xx''} \varepsilon_{x''}^0 b \, d\Omega_{x''} \, d\Omega_{x'} + \dots\dots\dots \\ &= b \left\{ (1 - \rho_x^0) + \int r_x^{0x'} (1 - \rho_{x'}^0) (d\Omega_{x'} + \int r_{x'}^{xx''} (1 - \rho_{x''}^0) \, d\Omega_{x''} \, d\Omega_{x'} + \dots\dots) \right\} \\ &= b (1 - \rho_x^0 + \rho_x^0 - \int r_x^{0x'} \rho_{x'}^0 \, d\Omega_{x'} + \int r_x^{0x'} \rho_{x'}^0 \, d\Omega_{x'} - \dots\dots) \end{aligned}$$

定義により、 $0 < \rho < 1$ であるから最終解は

$$\phi_\infty = b \dots\dots\dots (4)$$

このようにして、**熱平衡にある物体で閉じられた空間(空どう)中の合成放射輝度の分光密度は、物体と同温度にある黒体の放射輝度の分光密度に等しい****、ということが本論文の立場から示された。(4)はまた空どう中の放射が一様で等方であることを示す。なお(3)を用い、任意の面素において放出される放射束と吸収される放射束とが等しいこと、したがってその面素を通る熱流束が0であることも示しうる。こうして空どう中の放射はまわりの物体(壁)と同一の熱平衡状態にあるということが推論される。

3.3 熱平衡からのずれ

壁の一部が開かれている空どう(第3図)を考える。壁Wの温度はやはり一様で一定とするが、Wが閉じていなくて開孔Oが存在するから、ある面素から壁内面全体を見る立体角は一般に 2π よりも小さい。

* 微分反射率 (2.1) との関係は

$$\rho_x^0 = \int_{2\pi} r_x^{0x'} \, d\Omega_{x'}$$

** Kirchhoff の命題の一種の表現。

第 3 図

かりに開 O をふた D で閉じ、D も W と同じ温度にあるとすると、空どう中の放射は熱平衡放射になる (3.2). 以下、このようなふた D の内面に関する積分を $\int_D$ で、閉じていない壁の内面全体に関する積分を $\int_W$ で、D で閉じられた仮想の閉曲面全体に関する積分を $\int_A$ で、それぞれ示すことにする。

開孔つき空どうについての積分方程式

$$\phi = e + \int_W r \phi d\Omega \quad \dots\dots\dots (5)$$

を逐次代入法で解くにあたり、第 0 次解として熱平衡放射の放射輝度の分光密度 b を採用してもよい。そのとき

$$\phi_0 = b, \quad \dots\dots\dots (b \cdot 0)$$

$$\phi_1 = e + \int_W r b d\Omega \quad \dots\dots\dots (b \cdot 1)$$

$$\phi_1 = e + \int_W r \phi_1 d\Omega \quad \dots\dots\dots (b \cdot 2)$$

$$= e + \int_W r e d\Omega + \int_W r \int_W r b d\Omega_1 d\Omega \quad \dots\dots (b' \cdot 2)$$

$$\phi^n = e + \int_W r \phi_{n-1} d\Omega \quad \dots\dots\dots (b \cdot n)$$

$$= e + \int_W r e d\Omega + \dots\dots + \int_W r \int_W r \dots\dots$$

$$\int_W r b d\Omega_{n-1} \dots\dots d\Omega_1 d\Omega \quad \dots\dots\dots (b' \cdot n)$$

ところで、(1)～(4)を用い積分範囲に注意すれば、

(b・1) は

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \varepsilon b + b \int_A r d\Omega - \int_D r b d\Omega \\ &= \varepsilon b + \rho b - \int_D r b d\Omega = b - \int_D r b d\Omega \quad \dots\dots (b^* \cdot 1) \end{aligned}$$

同様に

$$\phi_2 = b - \int_D r b d\Omega - \int_W r \int_D r b d\Omega_1 d\Omega \quad \dots (b^* \cdot 2)$$

$$= \phi_1 - \int_W r \int_D r b d\Omega_1 d\Omega \quad \dots\dots\dots (b'' \cdot 2)$$

一般に

$$\begin{aligned} \phi_n &= b - \int_D r b d\Omega - \dots\dots - \int_W r \int_W r \dots\dots \int_W r \int_D \\ &\quad r b d\Omega_{n-1} \dots\dots d\Omega_1 d\Omega^* \quad \dots\dots\dots (b^* \cdot n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \phi_{n-1} - \int_W r \int_W r \dots\dots \int_W r \int_D r b d\Omega_{n-1} \dots\dots \\ &\quad \dots\dots d\Omega_1 d\Omega \quad \dots\dots\dots (b'' \cdot n) \end{aligned}$$

* ていねいに書けば

$$\begin{aligned} \phi_{x,n}^0 &= b - \int_D r_{xx'}^0 b d\Omega_{x'} - \int_W r_{xx'}^0 \int_D r_{x''x'}^0 b d\Omega_{x''} d\Omega_{x'} \\ &\quad - \int_W r_{xx'}^0 \int_W r_{x''x'}^0 \int_D r_{x'''x''}^0 b d\Omega_{x'''} d\Omega_{x''} d\Omega_{x'} - \dots \end{aligned}$$

これらの解はそれぞれ、次のように明かな物理的意味をもつ状態の、放射輝度の分光密度を表わしている。

(b・0) : (その面素に仮想された熱平衡放射),

(b・1) : (その面素の固有放射) + (他のすべての面素に仮想された熱平衡放射がその面素に直射し反射した放射),

(b・1) : (その面素に仮想された熱平衡放射) - (ふたの面素に仮想された熱平衡放射がその面素に直射し反射した放射),

(b・2) : (その面素の固有放射) + (他のすべての面素に仮想された (b・1) 放射がその面素に直射し反射した放射),

(b・2) : (その面素に仮想された熱平衡放射) - (ふたの面素に仮想された熱平衡放射がその面素に直射し反射した放射) - (ふたの面素に仮想された熱平衡放射が系内の実在壁面で 1 回反射したのちにその面素に投射し反射した放射),

(b・2) : (その面素の固有放射) + (他のすべての壁面素の固有放射がその面素に直射し反射した放射) + (他のすべての壁面素に仮想された熱平衡放射が系内の実在壁面で 1 回反射したのちにその面素に投射し反射した放射),

(b''・2) : (その面素の (b・1) 放射) - (ふたの面素に仮想された熱平衡放射が系内の実在壁面で 1 回反射したのちにその面素に投射し反射した放射)。

一般に、(b・n), (b*・n), (b'・n), (b''・n) についても同様な意味づけが可能である。

このようにして、各次数の逐次解は、固有放射、仮想の熱平衡放射が、さまざまな寄与のしかたで重なり合った状態を、もしくは仮想の熱平衡放射から過剰分を逐次に引き去った状態をそれぞれ代表しているということが示された。とくに (b*・n) の系列は、熱平衡放射からのずれを考えるための直観的な描像を与える点で、意義深いものと思われる。

この種の推論と表式、とくに (b*・n) の系列によるものは、high quality の開孔つき空どうの有効放射率の評価への応用においてきわめて有用である⁸⁾ (壁の温度が一樣でない場合への拡張については 4. で述べる)。

3.4 開孔つき空どうの有効放射率

前節で考えた開孔つき空どうの有効放射率 $\bar{\varepsilon}_x$ 、くわしくは観測される面素 x の観測方向 O の有効放射率 ε_x^0 は、前節の解それぞれを b で割ればただちに得られる。high quality の空どうに対し有用な表式は (b*・n) の系列から導かれ

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_x^0 &= \phi_x^0 / b = 1 - \int_D r d\Omega - \int_W r \int_D r d\Omega_1 d\Omega - \dots \\ &\quad \dots\dots - \int_W r \int_W r \dots\dots \int_W r \int_D r d\Omega_{n-1} \dots\dots \\ &\quad d\Omega_1 d\Omega \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

この右边は、微分反射率と幾何学的関係とだけから計算される。壁の温度が一樣でない場合については4.を参照。

3.5 有効吸収率

前節と同様な開孔つき空どうを考える。ただし壁の温度はどうであってもよい。

空どうの外から開孔の一部Oを通して壁面素xに直射した放射束 ϕ のうち、壁面での吸収と反射とのくり返しの結果として壁面に吸収されてしまう放射束 ϕ_{abs} を計算し、有効吸収率 $\bar{\alpha}_x^0 = \phi_{abs}/\phi$ を求める*。 ϕ_{abs} は次のような逐次項の和で表わされる(第4図)。

第4図

(面素xにO方向から直射して吸収される放射束)+(面素でx反射したのち系内の実在壁面に投射してそこで吸収される放射束)+……。

これまでと同じ記号を用いて

$$\begin{aligned}\phi_{abs} &= \alpha_x^0 \phi + \int_W \alpha_x^{x'} r_x^{0x'} \phi d\Omega_x^{x'} + \dots \\ &= \phi \left\{ (1 - \rho_x^0) + \int_W (1 - \rho_x^{x'}) r_x^{0x'} d\Omega_x^{x'} + \dots \right\} \\ &= \phi \left\{ \left(1 - \int_W r_x^{0x'} d\Omega_x^{x'} - \int_D r_x^{0x'} d\Omega_x^{x'} \right) + \left(\int_W r_x^{0x'} d\Omega_x^{x'} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_W r_x^{0x'} \int_W r_x^{0x''} d\Omega_x^{x''} d\Omega_x^{x'} - \int_W r_x^{0x'} \int_D r_x^{0x''} d\Omega_x^{x''} d\Omega_x^{x'} \right) + \dots \right\}\end{aligned}$$

有効吸収率は、記号を簡略化して表わせば

$$\begin{aligned}\alpha_x^0 &= 1 - \int_D r d\Omega - \int_W r \int_D r d\Omega_1 d\Omega \dots \\ &\quad - \int_W r \int_W r \dots \int_W r \int_D r d\Omega_{n-1} \dots \\ &\quad d\Omega_1 d\Omega \dots \dots \dots (7)\end{aligned}$$

こうして逐次的な考えから有効吸収率が求められたが、(7)を(6)と比べると

$$\bar{\alpha}_x^0 = \bar{\alpha}_x^0 \dots \dots \dots (8)$$

すなわち、空どうの有効吸収率と有効放射率とは等しいということが示された。これは Kirchhoff の法則(3)の拡張された表現になっている**。

* 本節と次節では積分方程式の逐次解法は用いないが、逐次的な考えと記号とは他の節と共通である。なお相反定理(2.1)を用いていないことに注意。

** この拡張は最近 Kelly によって、ただし完全拡散性の系について論ぜられた¹⁵⁾。

3.6 有効放射率

前節のと同まったく同じ場合について、今度は ϕ のうち、壁面での反射のくり返しの結果としてふたたび開孔から外へ出てしまう放射束 ϕ_{refl} を計算し、有効放射率 $\bar{\rho}_x^0 = \phi_{refl}/\phi$ を求める。

$\phi_{refl} = (\text{面素xで反射しそのまま開孔から外に出る放射束}) + (\text{面素xで反射したのち実在壁面で1回反射してから開孔を通して外に出る放射束}) + \dots$

$$= \int_D r \phi d\Omega + \int_W r \int_D r \phi d\Omega_1 d\Omega + \dots$$

$$\bar{\rho}_x^0 = \int_D r d\Omega + \int_W r \int_D r d\Omega_1 d\Omega + \dots$$

これを(7)と比べると、当然のことではあるが

$$\bar{\rho}_x^0 + \bar{\alpha}_x^0 = 1$$

4. 特 論

4.1 壁温度が一樣でない開孔つき空どうの有効放射率(I)

第3図と同じ空どうについて、壁温度が一樣でない場合の有効放射率を考える(4.2も参照されたい)。

そのため、各面素ごとにそれぞれの温度に対応した黒体を仮想し、その放射輝度の分光密度は、たとえば面素xについては b_x で表わすことにし、他の面素x'についての $b_{x'}$ を表現するために、因子

$$f_x^{x'} = (b_x - b_{x'})/b_x$$

を導入する。

面素xのO方向の合成放射を求めるため、積分方程式

$$\phi_x^0 = e_x^0 + \int_W r_x^{0x'} \phi_{x'}^0 d\Omega_x^{x'} \dots \dots \dots (9)$$

を解くのであるが、逐次代入解法を適用するにあたり、どの段階においても、各面素の固有放射のほうはありのままの正しい項をとるが、積分の中に入れるべき合成放射(の逐次的表現)の項としては、つねに基準の面素(いまはx)の黒体放射の値(いまは b_x)を用いるという方針を採用してもよい(4.2も参照されたい)。

第0次解としては当然 b_x をとる。

$$\phi_{x,0}^0 = b_x$$

第一次解は、本節の方針に従い

$$\begin{aligned}\phi_{x,1}^0 &= e_x^0 + \int_W r_x^{0x'} b_{x'} d\Omega_x^{x'} \\ &= \varepsilon_x^0 b_x + b_x \left(\rho_x^0 - \int_D r_x^{0x'} d\Omega_x^{x'} \right) \\ &= b_x \left(1 - \int_D r_x^{0x'} d\Omega_x^{x'} \right) \dots \dots \dots (t.1)\end{aligned}$$

同じ第一次解も、他の面素x'については固有放射の項に注意して

$$\phi_{x',1}^0 = e_{x'}^0 + \int_W r_{x'}^{0x''} b_x d\Omega_{x'}^{x''}$$

$$= \varepsilon_x^x b_x (1 - f_x^x) + b_x (\rho_x^x - \int_D r_x^{xx'} d\Omega_{x'}^{xx'}) \\ = b_x (1 - \varepsilon_x^x f_x^x - \int_D r_x^{xx'} d\Omega_{x'}^{xx'}) \dots\dots\dots (10)$$

これを(9)に代入して、第二次解は

$$\phi_{x,2}^0 = b_x (1 - \int_D r_x^{ox'} d\Omega_{x'}^{ox'} - \int_W r_x^{ox'} \varepsilon_{x'}^x f_{x'}^x d\Omega_{x'}^{ox'} \\ - \int_W r_x^{ox'} \int_D r_{x'}^{ox''} d\Omega_{x''}^{ox''} d\Omega_{x'}^{ox'} \dots\dots\dots (t.2)$$

第三次解へ進むには、 $\phi_{x,2}^x$ を(t.2)の形に書きくだし、それをもとの(9)に代入すればよい。以下同様。

(t.1)は3.3の(b*.1)と同じものであるが、(t.2)以降では温度分布の影響が正しくとり入れられており、こうして逐次代入を進めれば、任意の空どうについて、望みの精度での計算が可能になる。また有効放射率は解の両辺を b_x で割れば得られる。

4.2 同上 (II)

前節と同じ問題について、同じ積分方程式(9)を逐次代入解法で解くにあたり、固有放射のほうは前節と同じに扱うが、積分の中に入れるべき合成放射(の逐次的表現)の項としては、そこに関与する面素の温度に対応する黒体放射の値(面素 x' なら $b_{x'}$)をそのつど用いる、という方針を採用してもよい。

第0次解としては前節と同じく

$$\phi_{x,0}^0 = b_x$$

第一次解は、本節の方針に従い

$$\phi_{x,1}^0 = e_x^0 + \int_W r_x^{ox'} b_{x'} d\Omega_{x'}^{ox'} \\ = \varepsilon_x^0 b_x + \int_W r_x^{ox'} b_x (1 - f_x^{x'}) d\Omega_{x'}^{ox'} \\ = b_x (1 - \int_D r_x^{ox'} d\Omega_{x'}^{ox'} - \int_W r_x^{ox'} f_{x'}^x d\Omega_{x'}^{ox'} \\ \dots\dots\dots (t'.1)$$

他の面素についての第一次解は、面素 x , x' , x'' の温度をいちいち考慮して

$$\phi_{x,1}^x = b_x (1 - \int_D r_x^{xx''} d\Omega_{x''}^{xx''} - \varepsilon_x^x f_x^{x'} \\ - f_x^{x'} \int_W r_{x'}^{xx''} d\Omega_{x''}^{xx''} - \int_W r_x^{xx''} f_{x'}^{x''} d\Omega_{x''}^{xx''} \\ + f_x^{x'} \int_W r_{x'}^{xx''} f_{x''}^{x''} d\Omega_{x''}^{xx''} \dots\dots\dots (11)$$

(11)をもとの(9)に代入すれば第二次解 $\phi_{x,2}^0$ を得るが、式は省略する。

こうして、前節とは異なった方針による逐次解が知られるのであるが、本節の解において r と f との積を含む項を省略すると、すなわち(t'.1)では

$$\int_W r_x^{ox'} f_{x'}^x d\Omega_{x'}^{ox'}$$

を、また(11)では

$$- f_x^{x'} \int_W r_{x'}^{xx''} d\Omega_{x''}^{xx''}$$

とそれに続く2項とをそれぞれ省略すると、前節の(t.1)および(10)とまったく同じ式になる。この省略は積分の中の f を無視すること、すなわち積分の中では $b_{x'}$, $b_x \dots$ のかわりに、つねに b_x をとること(前節の方針!)と同等であり、high quality の空どうを論ずるときには当然許される* (5.1 参照)。

4.3 完全拡散反射性の系

系のすべての面素が完全拡散性の反射をする場合には、微分反射率を用いる必要はなく、反射率とくに面素の法線方向からの入射に対する

$$\rho_x^{\perp} = \int_{2\pi} r_x^{\perp x'} d\Omega_{x'}^{\perp}$$

だけで議論が進められ、容易に証明できる関係

$$r_x^{x'o} = \rho_x^{\perp} \cos \theta_x^o / \pi$$

を用い、2.1にさかのぼって(L.1)と(I.1)とを次の形に改めることができる。

$$\phi_x^0 = e_x^0 + \rho_x^{\perp} \sum \phi_{x'}^x \cos \theta_x^x \cos \theta_{x'}^x (1/\pi R^2) x' \dots\dots\dots (L'.1)$$

$$\phi_x^0 = e_x^0 + \rho_x^{\perp} \int \phi_{x'}^x \cos \theta_x^x \cos \theta_{x'}^x (1/\pi R^2) dx' \dots\dots\dots (I'.1)$$

ここで、

$$K_{xx'} = \cos \theta_x^{x'} \cos \theta_{x'}^x (1/\pi R^2)$$

と置けば

$$\phi_x^0 = e_x^0 + \rho_x^{\perp} \sum \phi_{x'}^x K_{xx'} x' \dots\dots\dots (L''.1)$$

$$\phi_x^0 = e_x^0 + \rho_x^{\perp} \int \phi_{x'}^x K_{xx'} dx' \dots\dots\dots (I''.1)$$

幾何学的因子 $K_{xx'}$ は照明理論では、多くの具体例についてくわしく計算されているから、そのような例を扱う場合には(L''.1)または(I'''.1)の式が便利である。

さらに、面素の固有放射および合成放射の放射発散度の分光密度をそれぞれ E および Ψ で表わすことにすれば、完全拡散性の系の場合、放射輝度の分光密度 e および ϕ との関係はおの

$$e_x^0 = E_x \cos \theta_x^0 / \pi, \quad \phi_x^0 = \phi_x \cos \theta_x^0 / \pi$$

であるから、(L''.1)および(I''.1)に対応して

$$\Psi_x = E_x + \rho_x^{\perp} \sum \Psi_{x'} K_{xx'} x' \dots\dots\dots (L'''.1)$$

$$\Psi_x = E_x + \rho_x^{\perp} \int \Psi_{x'} K_{xx'} dx' \dots\dots\dots (I'''.1)$$

これらの式、とくに(I'''.1)は、相互反射理論においてもっともポピュラーなものである。

(I''.1), (I'''.1)についても逐次代入解法を論拠とす

* この省略は計算を単純化するためにもきわめて有効である。

* ただし放射率としては、特定方向に関するものではなく、面素から半空間全体にわたるものとする。

る議論を進めうることは、本論文で前節までに述べてきたことがらすべてにあてはまる*。その際 ρ が積分の外に出ているので、記号、表式、演算のいずれもが著しく簡単になる。

5. 結 論

5.1 従来の研究との関連

本論文で述べたことがらと、従来のおもな関連研究との対応を概観する。

従来もっとも詳しく研究されてきたのは、**完全拡散性の系の相互反射の放射（または光束）発散度を量的に記述する問題**であって、およそ40年前に山内、Buckleyらが定式化した基礎方程式は、数多くの有用な成果をもたらし、今日なお大きな意義をもっている¹⁾。

この基礎方程式の意味を本論文の立場で解釈すれば、山内の初期の論文（文献¹⁾に引用の J.O.S.A., 1926年）でなされた連立方程式による表現は、本論文の (I''・1) から書きくだされる連立方程式 (2.2 参照) による表現と同等のものと解され、続いて Buckley、山内らによって定式化された積分方程式は、本論文の (I'''・1) と同じものと解される。そしてこの積分方程式の解法としては、級数展開によるもの、数値積分公式から導かれる連立方程式を解くもの¹⁾²⁾ が着目されて、それぞれに有効性を立証したが、系の幾何学的構成や、固有発散度分布が複雑な場合の精密解法については、やはり問題ごとに工夫が必要であり**、また演算の手順を物理的に意味づけることは一般に困難である。本論文は、これらの研究で採用された基礎方程式の意義と適用可能範囲を明らかにし (4.3)、あわせてこれらの方程式を解くための新しい着眼点を示したのである。

次に、**非完全拡散反射性の系の相互反射**については、鏡面反射だけを扱う立場 (Krishnan ら¹⁷⁾) や、完全拡散反射と鏡面反射とを別々に扱ってのちに和をとる立場 (Sparrow ら¹⁸⁾¹⁹⁾) もあるが、現実の物体表面の性質とくに表面あらさなどとの関係を考えに入れるためには、けっきょく反射の方向性をありのまま定量的に扱うことが必要になる。その意味で、partial reflectivity という因子を導入して議論を進めた De Vos の仕事¹⁰⁾ は画期的なものであった。

De Vos の系統に属する業績としては、岡山のもの⁴⁾、今日では Campapanaro と Ricolfi のもの²⁰⁾ がある。しかしこれらの研究では開孔つき空どうの有効放射率が論ぜられているので、相互反射一般についての考察は十分でなく、また積分方程式による表現との関係はすこしも言及されていないので、推論の数学的形式が見と

おされにくい。

本論文は、微分反射率の導入や相互反射の物理的解釈において De Vos の研究に負うところが多いが、数学的表現形式の整理 (2.1, 2.2)、逐次解法の正統的な適用 (2.3)、相互反射諸現象の一般的議論 (3.) においては、De Vos の所論を大幅に拡張したものであると考えられる。さらに本論文の 3.3, 4.1 および 4.2 は、De Vos の導いた結論とまったく同じ結論を相互反射積分方程式の逐次解の立場からあらためて導き出し、また De Vos が深く吟味せずに省略した諸項を再検討したものであって、一貫して De Vos の業績の意味づけと適用可能範囲の評価とに資するところが多いと思われる。

ところで**逐次的という考え方**は、物理的な面ではきわめて古くからあった。歴史的にたどれば、Kirchhoff, Wien と Lummer の業績あるいは光束計の Ulbricht 球の理論などに至ることになる。近時の文献でも中路²⁾、De Vos¹⁰⁾、上滝^{**3)}、岡山⁴⁾、Sparrow ら¹⁹⁾、Ribaud²¹⁾、Gouffé²²⁾、Treuenfels²³⁾の研究など***では、相互反射を逐次的な反射の重なり合いとしてとらえた論述がいくつも見出される。しかしながら相互反射積分方程式の逐次解という統一的な立場からの考察はなされていなかった。

一方、純粋に**数値解析の手段として逐次解法を適用**した例は、中路²⁾、Sparrow ら¹⁶⁾¹⁸⁾¹⁹⁾²⁴⁾²⁵⁾に見られるが、その意図は「ある程度まで正確な近似解が知られている場合」に、それを第0次解に採る手法 (2.3) としてこれを利用したまでのことであって、数学的、物理的な意味は重視されていない。

本論文は、逐次的という考え方の数学的表現形式を整理し、そこに表現された物理的意味を明らかにして、一般性のある議論を構成したものである。

最後に、開孔つき空どうの有効放射率の評価の問題についていえば、既述のとおり (3.)、low quality の空どうには3.1の解析法が、high quality の空どうには3.3, 4.1の解析法がそれぞれ適しているものであり、他方 De Vos の論文はもっぱら high quality の空どうを対象として書かれているのであるが、これらのことがらには無関心のままに、De Vos の解析法が low quality の空どうに対しては不適当であるとして非難する²⁰⁾²⁶⁾²⁷⁾のは、当を得ない。近ごろ実験上の要請から low quality の空どうを使うことも多くなった²⁸⁾ので、この点をとくに書き添えておく。

5.2 結 言

本論文の要旨は次のとおりである。

* とくに、「黒さの上限」の考えに関連して。

** とくに、円筒形空どうの底面の合成放射の分布に関連して。

*** 後の3者では、有効放射率 (3.6) が逐次的な考えのもとで論ぜられている。

** たとえば、温度が一樣でない円筒形空どうの有効放射率に関する上滝³⁾、Sparrow¹⁶⁾の研究。

(1) 相互反射の定常状態を量的に記述するための一般化された方程式として、線形方程式および積分方程式が定式化され、任意の幾何学的配置および任意の固有放射輝度分布をもつ非完全拡散反射性の系を原理的に記述できる形式が示された。

(2) これらの方程式の解法が吟味され、とくに積分方程式については、逐次代入解法を適用することの意義が指摘された。

(3) 定式化された積分方程式を逐次代入解法で解くにあたり、第 0 次解として特定の物理的意味をもつ関数を採用するとき、各次数の逐次解それぞれに明快な物理的解釈を与えることが明らかにされた。すなわち第 0 次解に固有放射の諸量をとれば、各逐次解は固有放射とそのくり返し反射との逐次的な重なり合いの状態に対応するものとなり、温度一様な空どう内の熱放射に関しては最終解が系内の放射の熱平衡の状態を表わすものとなり、開孔つき空どう内の熱放射に関しては、第 0 次解として熱平衡放射の諸量をとれば、各逐次解は熱平衡放射からのずれの逐次的な表現に対応するものとなる。

(4) 開孔つき空どうについては、有効放射率、有効吸収率、有効反射率の逐次的表現および相互関係が論ぜられ、また壁温度が一様でない場合が詳論された。

(5) 特殊な場合の一つとして、完全拡散反射性の系の表式が導かれた。

(6) 従来のおもな研究との関連が分析された。

5.3 謝 辞

筆者は、かつて De Vos の論文を検討していたおりに、山内二郎、米田麟吉両先生から De Vos の解析方法の数学的な形式や意味をくわしく検討してみよとの示唆をいただいたが、いま省みるとこの示唆は本研究にとってきわめて意味深いものであった。また同僚山本弘君は、筆者の着想の有効性の立証と具体的な展開に多くの寄与をされた。3 氏の示唆と寄与を明らかにして感謝のことばとする。

文 献

- (1) たとえば石野・飯塚：照学誌 50 (1966) 540, 飯塚・石野：同 50 (1966) 550 に主要文献があげられている。
- (2) 中路：照学誌 40 (1956) 495, 電試彙報 21 (1957) 17
- (3) 上滝：電試研究報告 558 (1957)
- (4) 岡山：応用物理 33 (1964) 875
- (5) 高田：計測 11 (1961) 458
- (6) 高田：中央計量検定所報告 10 (1961) 1
- (7) 高田：第 11 回応用物理学関係連合講演会 (1964)
- (8) 山本：第 25 回 (1964) および第 26 回 (1965) 応

用物理学会、第 13 回応用物理学関係講演会 (1966)、第 5 回計測自動制御学会 (1966)

- (9) C. Tingwaldt, U. Schley, J. Verch u. S. Takata : Optik 22 (1965) 48
- (10) J. C. De Vos : Physica 20 (1954) 669
- (11) C. Tingwaldt : Optik 9 (1952) 248
- (12) 近藤：積分方程式 (1954)
- (13) JIS Z 8706 (1959), 光高温計による温度測定方法
- (14) 高田：計測と制御 4 (1965) 867
- (15) F. J. Kelly : J. R. N. B. S., 69B (1965) 165
- (16) E. M. Sparrow : Appl. Optics., 4 (1965) 41
- (17) たとえば K. S. Krishnan. R. Sundaram : Proc. Roy. Soc., A257 (1960) 320
- (18) E. M. Sparrow : Proc. 5th Symposium on Thermal Radiation of Solids
- (19) E. M. Sparrow, S. L. Lin : Int. J. Heat Mass Transfer 8 (1965) 769
- (20) P. Companaro, T. Ricolfi : Appl. Optics., 5 (1966) 929, 5 (1966) 1271
- (21) G. Ribaud : Traité de Pyrométrie Optique (1931)
- (22) A. Gouffé : Rev. Opt., 24 (1945) 1, NASA SP31 (1963) に再録
- (23) E. W. Treuenfels : J. O. S. A., 53 (1963) 1162
- (24) E. M. Sparrow, L. U. Albers, E. R. G. Eckert : J. Heat Transfer (1962, Feb.) 73
- (25) E. M. Sparrow, V. K. Jonsson : J. O. S. A., 53 (1963) 816
- (26) J. Vollmer : J. O. S. A., 47 (1957) 926
- (27) F. J. Kelly, D. G. Moore : Appl. Optics., 4 (1965) 31
- (28) D. G. Moore : Measurement of Thermal Radiation Properties of Solids, (J. C. Richmond, ed.), NASA SP-31 (1963) p. 515

(受付1967年2月4日 再受付1964年7月4日)

討 論

室 井 徳 雄*

相互反射を含む放射系積分方程式の一般的逐次解の存在証明を、面の完全拡散性を仮定せずに行なうことは、

* 編集委員：日本大学理工学部

従来困難視されていた問題である。今回、高田氏が、この従来困難視されていた逐次解の存在証明をこの論文で企図されたことに對しまず敬意を表したい。

この論文での逐次解の存在証明は、非完全拡散性の面における“光学での相反定理”の一つの表現式である (I) 式の成立を前提として行なわれているが、鏡面反射を除く非完全拡散性の面で、(I) 式が無条件に成立することにまず疑問を持つ。

$$r_x^{o x'} \cos \theta_x^o = r_x^{x' o} \cos \theta_x^{x'} \dots \dots \dots (I)$$

A 図で x' より放射束 $\Phi_x^{x'}$ が x に入射し、 x で反射し、0 方向に $r_x^{x' o} \Phi_x^{x' o}$ なる放射束が向かうものとする

A 図 反射面に関する記号説明図

$$r_x^{x' o} \Phi_x^{x'} = \delta[\theta_x^{x'} \rightarrow \theta_x^o] \cdot r_{xs}^{x' o} \cdot \Phi_x^{x'} + r_x^{x' n} \cdot \Phi_x^{x'} \cos \theta_x^o + r_{xD}^{x' o} \cdot \Phi_x^{x'} \dots \dots \dots (II)$$

ここで、 $\delta[\theta_x^{x'} \rightarrow \theta_x^o]$ は $\theta_x^{x'} = \theta_x^o$ するとき 1、 $\theta_x^{x'} \neq \theta_x^o$ するときゼロなる関数 $\delta[\theta_x^{x'} \rightarrow \theta_x^o] \cdot r_{xs}^{x' o} \Phi_x^{x'}$ は x' より x に $\Phi_x^{x'}$ なる放射束が入射したときの鏡面反射成分を表わす。 $r_x^{x' n}$ は x' より x に放射束が入射したとき法線方向に向かう反射率で、(II) 式第 2 項の $r_x^{x' n} \Phi_x^{x'} \cos \theta_x^o$ は完全拡散成分、 $r_{xD}^{x' o}$ は x より 0 に向かう Lambert の余弦則に従わない拡散反射成分を意味する。(II) 式で $r_{xD}^{x' o}$ が無視できないような面であれば、光学的反相性は当然成立しないものと考えられるので、 $r_{xD}^{x' o}$ を無視すれば

$$r_x^{x' o} = \delta[\theta_x^{x'} \rightarrow \theta_x^o] \cdot r_{xs}^{x' o} + r_x^{x' n} \cos \theta_x^o \dots \dots \dots (II)'$$

また A 図で、逆に 0 より放射束が入射し x で反射し x' に向かう場合を考えると

$$r_x^{o x'} = \delta[\theta_x^o \rightarrow \theta_x^{x'}] \cdot r_{xs}^{o x'} + r_x^{on} \cos \theta_x^{x'} \dots \dots \dots (III)$$

したがって

$$r_x^{x' o} / \cos \theta_x^o = \delta[\theta_x^{x'} \rightarrow \theta_x^o] \cdot r_{xs}^{x' o} / \cos \theta_x^o + r_x^{x' n} \dots \dots \dots (IV)$$

$$r_x^{o x'} / \cos \theta_x^{x'} = \delta[\theta_x^o \rightarrow \theta_x^{x'}] \cdot r_{xs}^{o x'} / \cos \theta_x^{x'} + r_x^{on} \dots \dots \dots (V)$$

B 図 鏡面反射成分の入射角による変化

C 図 $\theta_x^{x'} = \theta_x^o$ 方向の微分反射率の拡散成分

(IV), (V) で $r_{xs}^{x' o}$, $r_{xs}^{o x'}$, $r_x^{x' n}$, r_x^{on} はそれぞれ x 面への入射角の関数で、B 図、C 図* の例より入射角によってその値を異にすることが判断できるであろう。

B 図は鏡面反射成分で、入射角が大になるに従い大きな値をとる。C 図の r 曲線は入射角と反射角が等しい方向の微分反射率のうちの拡散成分をわいたもので、入射角が大になるにつれ、値はだんだん小となっている。 $r/\cos \theta$ の曲線も同様に、入射角が大になるにつれ値は小となる。この例では $\theta_x^{x'} \neq \theta_x^o$ するとき (I) 式が無条件には成立しないことを物語っている。

(1) $\theta_x^{x'} = \theta_x^o$ のとき：(IV), (V) 式よりわかるよう完全拡散成分に鏡面反射成分が重なり、かつ $r_{xs}^{x' o} = r_{xs}^{o x'}$, $= r_x^{x' n} r_x^{on}$ となり

$$r_x^{x' o} / \cos \theta_x^o = r_x^{o x'} / \cos \theta_x^{x'} \dots \dots \dots (VI)$$

が成立する。

(2) $\theta_x^{x'} \neq \theta_x^o$ のとき：(IV), (V) 式の右辺第一項はそれぞれゼロとなり (VII), (VIII) 式のようになる。

$$r_x^{x' o} / \cos \theta_x^o = r_x^{x' n} \dots \dots \dots (VII)$$

$$r_x^{o x'} / \cos \theta_x^{x'} = r_x^{on} \dots \dots \dots (VIII)$$

前述のとおり $r_x^{x' n}$, r_x^{on} は入射角の関数で、 $\theta_x^{x'} \neq \theta_x^o$ のときは一般に $r_x^{x' n} \neq r_x^{on}$ であるゆえ $r_x^{x' o} / \cos \theta_x^o \neq r_x^{o x'} / \cos \theta_x^{x'}$

* De Vos: "Evaluation of the Quality of a Blackbody", Physica 20 (1954) pp. 675. Fig. 4 をもとにして B 図、C 図を作成した。

となる。面が完全拡散性の場合は $r_{xs}^{o0}=0$, $r_{xs}^{ox'}=0$ で入射角のいかんにかかわらずその法線方向の反射成分は一定で、 $r_x^{on}=r_x^{ox}$ となり $r_x^{xo}/\cos\theta_x^o=r_x^{ox'}/\cos\theta_x^{x'}$ となり、(I)式が成立する。

以上のことを De Vos Fig. 4 より作成した D 図で説明すると、 60° の入射角で x' より x に単位放射束が入射し、 20° の 0 方向の反射放射束を考えると、その反射成分は $\overline{xO'}$ で

$$\overline{xO'} = r_x^{ox'}, r_x^{xo}/\cos\theta_x^o = xH.$$

D 図 非完全拡散性面における $r_x^{ox'} \cos\theta_x^o \approx r_x^{ox} \cos\theta_x^{x'}$ の説明図

次に、逆に 20° の入射角をもって 0 より x に入射し 60° の方向 x' へ反射する場合は

$$xX' = r_x^{ox'} \text{ で } \overline{xH'} = \overline{xX'}/\cos\theta_x^{x'} = r_x^{ox}/\cos\theta_x^o$$

一般には H, H' 点は一致せず $xH' \neq xH$ で $r_x^{ox'}/\cos\theta_x^{x'} \neq r_x^{ox}/\cos\theta_x^o$ なることが了解できる。

C 図の例では、入射角が 20° より小なときは近似的に (IX)

$$r_x^{ox'}/\cos\theta_x^{x'} \approx r_x^{ox}/\cos\theta_x^o \quad \text{.....(IX)}$$

式を成立させることができるが、本論で取り扱っているように、 $0 \sim 2\pi$ の立体角の範囲で (IX) を成立させる面は、完全拡散性の面以外に、おそらく存在し得ないであろう。

以上のとおり、非完全拡散性の面で鏡面反射を除き一般的に (IX) 式を成立させることが困難であるゆえ、この論文での逐次解の成立の可否は (I.4) 式で論議することはできず、(I.2) 式で論議しなければならない。(I.2) 式では逐次解の収束を一般的に証明することは困難で、非完全拡散性の面にも適用できるとするこの論文の論旨は、全面的にくずれてくると思われるが、著者のご意向をお伺いしたい。

(受付 1967 年 9 月 7 日)

回 答

高 田 誠 二

拙著論文に対し、さっそくコメントの寄せられたことを光榮とするものである。以下、ご意見を **C**、拙著を **P** で示して、お答えする。

1. 光学での相反定理について

この定理は、放射を含む系が熱平衡になりうるための条件をなすもので、広い一般性をもっている。その表現はいくつもあり、ここで必要な表現だけを整理して示す。

第 1 図

第 1 図の面素 df, df' 間の放射のやりとりを考える R, θ, θ' の意味は図示のとおり。 df の θ 方向の放射輝度が L のとき、 df から df' へもたらされる放射束 Φ は

$$\Phi = L df \cos\theta \cdot df' \cos\theta' / R^2 \quad \text{.....(1)}$$

次に、 df' の θ' 方向の放射輝度が L のとき、 df' から df へもたらされる放射束 Φ' は

$$\Phi' = L df' \cos\theta' \cdot df \cos\theta / R^2 \quad \text{.....(2)}$$

$$\text{そこで } \Phi = \Phi' \quad \text{.....(3)}$$

これが、第 1 図の場合の相反定理である。ところでこれは (1), (2) を用いなくても、熱力学の立場から直接に証明される。それには、 df, df' を同温度の二つの黒体の表面素と想定する。そのときかりに $\Phi \neq \Phi'$ とすると、黒体の温度はどちらか一方は高く、他方は低くなっていく。これは第 2 法則に反する。こうして (3) の相反性の成立しなければならないことが証明される。

第 2 図は、**P** で扱った非完全拡散反射を伴う場合で、上と同様な熱力学的考察から、 $do \rightarrow dx$ で反射 $\rightarrow dx'$ の放射束と、逆行の放射束とが等しくなければならない。微分反射率 $r_x^{ox'}$, r_x^{xo} を用い

$$L = do \cos\theta_o (dx \cos\theta_{ox}^o / R^2) r_x^{ox'} (dx' \cos\theta_{x'} / R^2)$$

$$L = dx' \cos \theta_{x'} (dx \cos \theta_x' / R'^2) r_x^{x'o} (do \cos \theta_o / R^2)$$

そこで、

$$r_x^{o x'} \cos \theta_x^o = r_x^{x'o} \cos \theta_x' \quad \dots\dots\dots(4)$$

第 2 図

すなわち **P** で活用した相反性(4)は、反射の性質について何の制限を設けなくても成立する。ただし dx は、熱平衡にある物体の表面でなければならない。

2. 提示されたモデルについて

C では、鏡面反射と完全拡散反射とを区分した考察から、相反性不成立を例証したとされている。反射の機構は複雑²⁾ であって、モデルによる考察は必ずしも生産的ではないと思われるが、提示されたモデルのように成分を区別するのであれば、入射する放射束の行く末をさらに細分し

$$\phi_{inc} = \phi^S + \phi^{PD} \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\phi^S = \phi_{abs}^S + \phi_r^S \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\phi^{PD} = \phi_{abs}^{PD} + \phi_r^{PD} \quad \dots\dots\dots(6)$$

として考えるべきであろう。上の添字 *S*, *PD* はそれぞれ鏡面、完全拡散を、下の添字 *inc*, *abs*, *r* はそれぞれ入射、吸収、反射を意味する。反射率も *S* では ϕ_r^S / ϕ^S , *PD* では ϕ_r^{PD} / ϕ^{PD} をとる (もちろん、方向や立体角を指定して)。そうすれば、*S* では Fresnel の式が、*PD* では Lambert の余弦則が厳密に成立する。そして *S*, *PD* それぞれで相反性が成立することは、前と同様に示しうる。この意味の *PD* での法線方向への微分反射率は、入射角に依存せず $r_x^{x'n} = r_x^{on}$ となる。

なお付言すると、(4)~(6)は観念的な表現にすぎず、とくに ϕ_{abs}^S と ϕ_{abs}^{PD} とを実験的に区別するすべはあるまい。このような区分はせずに微分反射率だけで表現することの意義を **P** は主張するのである。

3. De Vos が示した数値について

De Vos がその論文³⁾ の Fig. 3~5 に示したデータが相反性を満足していないことは、**C** のご指摘のとおりである。**P** ではこのデータを用いてはいないが、この点はぜひとも検討されなければならない。De Vos 氏がもはや存命でないことを遺憾とするものである。

文 献

- (1) たとえば高橋：現代物理学 (岩波講座)，月報 No. 4, 5 (1958)。
- (2) たとえば蓮沼：光沢 (1960)
- (3) J. C. De Vos : Physica, 20 (1954) 669

(受付1967年9月4日 再受付1967年10月4日)