色 弁 別 長 円 体 の 変 換

専門会員 杉 山 芳 雄*

Transformations of Color Discrimination Ellipses

Yoshio Sugiyama (Fellow Member)

(Applied Optics. Electrotechnical Laboratory)

ABSTRACT

Color discrimination ellipses measured by Brown and MacAdam are transformed into the CIE-UCS $U^* V^* W^*$ and modified Adams system. From these results the relations between lightness difference and chromaticness difference are checked in the $U^* V^* W^*$ color solid, and new relations between lightness and chromaticness difference in the uniform color solid are written as, $U' = 6W^*(u - u_0)$, $V' = 6W^*(v - v_0)$. From this result and Hioki and Sato's result a new system

$$W'' = 25Y^{1/3} - 17$$

$$L'' = 13(W'')^{5/6}(u - u_0)$$

$$V'' = 13(W'')^{5/6}(v - v_0)$$

is proposed.

1. ま え が き

等色実験のとき起こるばらつきを、三次元で三次元正規正分布で整理した長円体は、心理学でよく知られているいき値の測定方法のうちの調整法に基づく色弁別長円体である。この色弁別長円体を色空間のメトリック(線素)に取れることを理論的に Silberstein³⁾が示し、三次元色空間での実験を Brown-MacAdam²⁾が初めて行なった。ここではこの Brown-MacAdam の色弁別長円体を、CIE が暫定的に推薦した $U^*V^*W^*$ 色空間³⁾ならびに比較的よく使用されている Adams-Nickerson の色差式⁴⁾を使用しやすくした Fukuda ら⁵⁾の修正 Adams 系へ変換した。

2. 変 換 理 論

RGB 表色系での分散 σ_R^2 , σ_G^2 , σ_B^2 , 共分散 $\rho_{RG}\sigma_R\sigma_G$

G , $\rho_{GR}\sigma_G\sigma_B$, $\rho_{BR}\sigma_B\sigma_R$

$$\sigma_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2}{n-1}, \dots\dots\dots$$

$$\rho_{RG}\sigma_R\sigma_G = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})(G_i - \bar{G})}{n-1}, \dots\dots\dots$$

を使用して分散, 共分散行列 V を

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_R^2 & \rho_{RG}\sigma_R\sigma_G & \rho_{RB}\sigma_R\sigma_B \\ \rho_{RG}\sigma_R\sigma_G & \sigma_G^2 & \rho_{GB}\sigma_G\sigma_B \\ \rho_{RB}\sigma_R\sigma_B & \rho_{GB}\sigma_G\sigma_B & \sigma_B^2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

とおく。

RGB 表色系の三刺激値 (RGB) と XYZ 表色系の三刺激値 (XYZ) との変換が

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\ = [a_{ij}] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

と知れていれば, XYZ 色空間での分散, 共分散行列 D は

$$D = A^{-1} V A^{-1}$$

となる。ここで平均値を原点とした正規分布は $y = [AX$

* 電気試験所

$4Y \ 4Z$] を使用して

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2} |\mathbf{D}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t \mathbf{y} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{y}\right) \dots\dots\dots (3)$$

と表わせる³⁾。

次に, $\mathbf{XYZ}$ 表色系より非線形変換で求まる $\mathbf{LMN}$ 系

$$\left. \begin{aligned} L &= L(\mathbf{XYZ}) \\ M &= M(\mathbf{XYZ}) \\ N &= N(\mathbf{XYZ}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

への色弁別長円体の変換を考える。まず, (4)式の偏微分を使用して

$$\left. \begin{aligned} \Delta L &= \frac{\partial L}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial L}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial L}{\partial Z} \Delta Z \\ \Delta M &= \frac{\partial M}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial M}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial M}{\partial Z} \Delta Z \\ \Delta N &= \frac{\partial N}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial N}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial N}{\partial Z} \Delta Z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

式(5)をうる。式(5)は行列 $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial X} & \frac{\partial L}{\partial Y} & \frac{\partial L}{\partial Z} \\ \frac{\partial M}{\partial X} & \frac{\partial M}{\partial Y} & \frac{\partial M}{\partial Z} \\ \frac{\partial N}{\partial X} & \frac{\partial N}{\partial Y} & \frac{\partial N}{\partial Z} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

を使用して

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta L \\ \Delta M \\ \Delta N \end{pmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

の関係より $\mathbf{Q}^{-1}$ は式(2)の変換行列 $\mathbf{A}$ に対応し*, $\mathbf{LMN}$ 色空間での分散, 共分散行列 $\mathbf{F}$ は

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \mathbf{D} {}^t \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{V} {}^t \mathbf{A}^{-1} {}^t \mathbf{Q} \dots\dots\dots (8)$$

となる。ここで, 平均値を $\mathbf{O}$ とした色弁別長円体は, $\mathbf{X} = {}^t[\Delta L \ \Delta M \ \Delta N]$ を使用して, 次の正規分布

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2} |\mathbf{F}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t \mathbf{X} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{X}\right) \dots\dots\dots (9)$$

となる。

3. 色弁別長円体の計算

CIE の $U^*V^*W^*$, 修正 Adams-Nickerson の色立体へ, Brown-MacAdam の $\sigma_R, \sigma_G, \sigma_B, \rho_{RG}, \rho_{GB}, \rho_{BR}$ (R, G, B の値は一けた繰り上げた) に基づく色弁別長円体を変換しそれを図示した。

2.1 $U^*V^*W^*$ 系

CIE の $U^*V^*W^*$ 系³⁾

$$U^* = 13W^*(u - u_0)$$

$$V^* = 13W^*(v - v_0)$$

* 行列 $\mathbf{A}$ は色立体内での場所の関数ではないが, $\mathbf{Q}^{-1}$ は場所の関数となる。

$$W^* = 25Y^{1/3} - 17,$$

ここで

$$u = 4X/(X+15Y+3Z)$$

$$v = 6Y/(X+15Y+3Z),$$

より式(6)の $\mathbf{Q}'$ は

$$\mathbf{Q}' = \begin{pmatrix} 13W^* \frac{60Y+12Z}{(X+15Y+3Z)^2} \\ 13W^* \frac{-6Y}{(X+15Y+3Z)^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$13 \frac{25}{3} Y^{-2/3} (u - 0.2105) - 13W^* \frac{60Y}{(X+15Y+3Z)^2}$$

$$13 \frac{25}{3} Y^{-2/3} (v - 0.3158) + 13W^* \frac{6X+18Z}{(X+15Y+3Z)^2}$$

$$\frac{25}{3} Y^{-2/3}$$

$$\begin{pmatrix} 13W^* \frac{-12X}{(X+15Y+3Z)^2} \\ 13W^* \frac{-18Y}{(X+15Y+3Z)^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

2.2 修正 Adams 系

修正 Adams 系³⁾の直交する三つの座標軸を $C_1, C_2,$

C_3 とすれば

$$C_1 = 25X^{1/3} - 25Y^{1/3}$$

$$C_2 = 0.4(25Y^{1/3} - 25Z^{1/3})$$

$$C_3 = 0.23(25Y^{1/3} - 17)$$

となり, これより $\mathbf{Q}''$ は

$$\mathbf{Q}'' = \begin{pmatrix} \frac{25}{3} x^{-2/3} & -\frac{25}{3} Y^{-2/3} & 0 \\ 0 & 0.4 \frac{25}{3} Y^{-2/3} & -0.4 \frac{25}{3} Z^{-2/3} \\ 0 & 0.23 \frac{23}{3} Y^{-2/3} & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

2.3 長円体の図示

2.1, 2.2 の $\mathbf{Q}', \mathbf{Q}''$ を場所の関数として計算し, 式(8)の $F_{ij}, \mathbf{F}^{-1}$ を使用した

$$\begin{aligned} & (F^{-1})_{11}(\Delta L)^2 + 2(F^{-1})_{12}\Delta L\Delta M \\ & + (F^{-1})_{22}(\Delta M)^2 + 2(F^{-1})_{23}\Delta M\Delta N \\ & + (F^{-1})_{33}(\Delta N)^2 + (F^{-1})_{31}\Delta N\Delta L = 1 \end{aligned}$$

となる長円体を図 1~5 に図示した。図のうちの WRJ B, D LM は視感測者, 視感測者名の右の数字は文献(2)

図 1

図 4

図 2

図 5

図 3

にある試験色の番号を示す。各長円は長円体を明度一定の面で切断したのを示し、中心(平均値は 0 としてある)よりの明度軸の偏差 ΔW^* , ΔC_3 が記してある。左側が $U^*V^*W^*$, 右側が修正 Adams 系である。

4. 検討と結論

CIE の色差式で、色立体の W 方向(縦)とその横方向の関係を見るため、前に図示した W 方向の最小長円に対する ΔW^* 値(図 1 の左上の長方形のわくのうちはにっている値)と、中心での横継面の長円の長軸 a , 短軸 b との比 $a/\Delta W^*$, $b/\Delta W^*$ を求めると表 1 になる。

$b/\Delta W^*$ の平均が 1.59, $a/\Delta W^*$ の平均が 3.48, その平均が 2.54, またここにとった ΔW^* の値は長円体の端にきていないので、その補正として $5/6$ を取れば

$$2.54 \times \frac{5}{6} = 2.12$$

となる。これは明度軸の重みがクロマチックネス差の重みに比べて 2 倍軽いことを意味している。よって、明度差とクロマチックネス差を均等させるには

$$13/2.12 = 6.13$$

より U^* , V^* の修正として

$$\left. \begin{aligned} U^* &= 6W^*(u-u_0) \\ V^* &= 6W^*(v-v_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

表 1 長円体の縦と横の関係を示す数表

	ΔW	b	a	$b/\Delta W^*$	$a/\Delta W^*$
1	4.62	5.20	28.40	1.13	6.15
2	4.04	8.82	13.36	2.18	3.32
3	3.62	4.90	16.30	1.35	1.74
4	3.36	7.78	12.30	2.32	3.66
5	3.17	3.21	8.73	1.01	2.75
6	2.71	3.80	6.18	1.40	2.28
7	4.04	4.09	8.25	1.01	2.04
8	3.10	3.17	8.50	1.02	2.74
9	6.22	2.38	19.04	0.38	3.06
10					
11	5.57	3.82	19.51	0.69	3.50
12	2.08	4.68	7.32	2.25	3.52
13	1.74	2.81	3.33	1.61	1.91
14	4.26	2.72	17.06	0.64	4.00
15	3.18	4.48	9.05	1.41	3.85
16	2.41	4.46	8.02	1.85	3.33
17	3.47	3.61	13.50	1.04	3.89
18	5.29	6.34	19.56	1.20	3.70
19	2.51	5.00	7.14	1.99	2.84
20	2.67	5.25	8.83	1.97	3.31
21	2.81	4.50	7.04	1.60	2.51
22	2.49	5.50	7.52	2.21	3.02
23	2.23	3.86	6.71	1.73	3.01
24	3.78	3.96	9.32	1.05	2.47
25	3.96	4.73	10.59	1.19	2.67
26	2.75	7.68	11.11	2.79	4.04
27	4.31	10.87	13.23	2.52	3.07
28	4.64	3.81	19.13	0.82	4.12
29	3.95	6.58	15.10	1.67	3.82
30	2.98	7.77	10.21	2.61	3.43
31	2.40	4.33	9.94	1.80	4.14
32	2.50	5.96	8.83	2.38	3.53
33	1.19	2.02	4.22	1.70	3.55
34	3.13	6.03	7.56	1.93	2.42
35	2.60	4.44	9.39	1.71	3.61
36	1.97	3.21	9.85	1.63	5.00
37	1.61	2.42	9.14	1.50	5.68
38	2.43	3.22	12.70	1.33	5.23
39	1.87	3.56	10.19	1.90	5.45

を取ることが良いとされる。

Hioki-Sato は、CIE・UCS $U^*V^*W^*$ でのバリュウ効果を考察して、修正 UCS として

$$\left. \begin{aligned} W' &= 25Y^{1/3} - 17 \\ U' &= 26(W')^{5/6}(u - u_0) \\ V' &= 26(W')^{5/6}(v - v_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

を提案している。よって式(10)と式(11)の両修正を施した座標系、式(12)

$$\left. \begin{aligned} W'' &= 25Y^{1/3} - 17 \\ U'' &= 13(W'')^{5/6}(u - u_0) \\ V'' &= 13(W'')^{5/6}(v - v_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

を修正の最後の結果とすることを提案する。

文 献

- (1) L. Silberstein : Philosophical Magazine VII 37 (1946) 126
- (2) W. R. J. Brown and D. L. MacAdam : J. Opt. Soc. Amer. 39 (1949) 808
- (3) G. Wyszecki : J. Opt. Soc. Amer. 53 (1963) 1318
- (4) D. Nickerson and K. E. Stultz : J. Opt. Soc. Amer. 34 (1944) 550
- (5) T. Fukuda and K. Fujii : Acta Chromatica 1-No. 4 (1965) 200
- (6) たとえば 北川敏男編 : 多変量解析論 共立出版 (1966) 8
- (7) R. Hioki and M. Sato : J. Opt. Soc. Amer. 57 (1967) 840

(受付1967年11月4日)