線形計画法の減速電圧法による分光測光への応用

正会員 小林 富士男* 専門会員 山口 昌一郎*

Applications of Linear Programming to the Spectrophotometry by Means of Retarding Potential Method

Fujio Kobayashi (Member), Shoichiro Yamaguchi (Fellow Member)
(Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology)

ABSTRACT

In the preceding paper,¹⁾ the authors reported that it was possible to get the spectral energy distributions of light sources or the spectral transmittances of optical filters by solving the matrices of which the elements were the relevant values of retarding potential characteristic curves of a photoelectric tube under illumination of tested lights or transmitted lights through tested filters. In those cases, the solutions were affected remarkably by the errors which were involved in measured values so that solutions which failed to meet the problems in physics or engineering were sometimes obtained. Then, in order to get good results, the only way was to measure the current of photoelectric tube with high accuracy.

In this paper, first, we describe the principle to obtain the spectral energy distributions of light sources by means of linear programming applicable to retarding potential characteristics of a photoelectric tube. Next, we obtain the spectral transmittance of an optical interference filter as a practical example of the method above mentioned.

In computation of it, two sorts of numerical values of the retarding characteristic of the photoelectric tube used in experiment are adopted; say, one is reduced from the theoretical equation and the other is a real measured value. The final results obtained linear programming agree fairly well with those obtained by the conventional spectrophotometric method.

In general, careful efforts are made in experiments to minimize the errors involved in measured values and the least squares method is often used when unavoidable errors still exist. In some cases, however, it may be difficult to repeat the measurements many times or to measure with high accuracy. In those cases, linear programming may be useful for the data processing.

(1) S. Yamaguchi, F. Kobayashi: J: Illum. Engng Inst. Japan, Vol. 52, No. 4 (1968) 108

1. 緒 言

光電管の減速電圧対光電流特性を利用して分光測光を行なう方法についてさきに報告した¹⁾、その場合マトリックス法によっているため、測定誤差が大きく影響し、その方法によって得られた解は物理的条件を満足しない

ことも起こり、よい結果を得るためには高精度の実測データが必要であった。このような観点から、筆者らは、制約式に物理的条件を付加して、できるだけ希望する結果が得られるようにすることを目的に、線形計画法²⁾³⁾を利用してデータ処理を行ない分光測光を行なった。

本論文では、光電管の減速電圧特性を利用し、線形計画法によってデータ処理を行なうことにより、入射光の分光組成を分析することが可能であることを示し、次

* 東京工業大学工学部

に、理論的に誘導した減速電圧特性式⁴⁾と実測値から干渉フィルタの分光透過率を求めた。

2. 線形計画法の理論

n 個の未知数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ を含んでいる m 個の連立一次方程式

$$\left. \begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + \dots + a_{3,n}x_n &= b_3 \\ \dots &\dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \dots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

と同じ未知数を含んでいる一次式

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n + c_0 \dots\dots\dots(2)$$

が与えられているとき、連立方程式(1)を満足する負でない解の中で、式(2)を最小にする解を求めることを考える。

いま、連立方程式(1)の階数 r は、 $r=n$ ならば答えは一義的に定まるので、ここでは $r < n$ とする。すると、 r 個の未知数は $n-r=k$ 個の残りの未知数の一次結合で表わされる。余分な方程式を除去すれば $r=m$ となる。そこで、 k 個の未知数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ を自由未知数、残りの r 個の未知数 $x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, \dots, x_{k+m}$ を基底未知数として式(1)を表わし、

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= \beta_1 - (\alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \dots + \alpha_{1,k}x_k) \\ x_{k+2} &= \beta_2 - (\alpha_{2,1}x_1 + \alpha_{2,2}x_2 + \dots + \alpha_{2,k}x_k) \\ x_{k+3} &= \beta_3 - (\alpha_{3,1}x_1 + \alpha_{3,2}x_2 + \dots + \alpha_{3,k}x_k) \\ \dots &\dots \\ x_{k+m} &= \beta_m - (\alpha_{m,1}x_1 + \alpha_{m,2}x_2 + \dots + \alpha_{m,k}x_k) \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

とする。必要なときには未知数の番号をつけかえる。ここで、 $\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, \beta_3 \geq 0, \dots, \beta_m \geq 0$ と仮定する。式(3)を式(2)に代入すれば、

$$\begin{aligned} Z &= c_0 + \sum_{j=1}^m c_{k+j}\beta_j + (c_1 - \sum_{j=1}^m c_{k+j}\alpha_{j,1})x_1 \\ &+ (c_2 - \sum_{j=1}^m c_{k+j}\alpha_{j,2})x_2 + (c_3 - \sum_{j=1}^m c_{k+j}\alpha_{j,3})x_3 \\ &+ \dots\dots\dots \\ &+ (c_k - \sum_{j=1}^m c_{k+j}\alpha_{j,k})x_k \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

となる。すべての自由未知数をゼロとすれば、

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0, x_2 = 0, x_3 = 0, \dots, x_k = 0 \\ x_{k+1} &= \beta_1, x_{k+2} = \beta_2, x_{k+3} = \beta_3, \dots, x_{k+m} = \beta_m \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

と許容解が得られる。式(4)の各未知数の係数がいずれも非負であれば、 Z の値を最も小さくするから式(5)が最適解となる。

一次式(4)の係数の中に負のものがあるとき、それらの負の係数をもった未知数の中から一つ選び x_s とする。 x_s の値を増せば Z は小さくなる。そのときの x_s の制限条件を調べる。そこで式(3)において x_s 以外の自由未知

数をゼロとすれば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= \beta_1 - \alpha_{1,s}x_s \\ x_{k+2} &= \beta_2 - \alpha_{2,s}x_s \\ x_{k+3} &= \beta_3 - \alpha_{3,s}x_s \\ \dots &\dots \\ x_{k+m} &= \beta_m - \alpha_{m,s}x_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

式(6)において、係数 $\alpha_{j,s} \leq 0$ のときには、それに対する基底未知数は $x_{k+j} \geq 0$ となり、制約条件は常に満足される。 $\alpha_{j,s} \leq 0, (j=1, 2, 3, \dots, m)$ とすべて正でなければ x_s には制限がなくなり最適解は存在しない。

そこで、 $\alpha_{j,s} > 0$ のものがあれば、 $\alpha_{j,s}, (j=1, 2, 3, \dots, m)$ の中で、 $\alpha_{j,s} > 0$ の条件を満足するものから比 $\beta_j/\alpha_{j,s}$ を作り、それらの中で最小のものの番号を l として

$$\frac{\beta_l}{\alpha_{l,s}} = \min \frac{\beta_j}{\alpha_{j,s}} \dots\dots\dots(7)$$

とする。 x_s をゼロからしだいに大きくしたとき x_{k+l} が最初にゼロとなり、そのときの x_s は式(7)の値となる。

次に x_s と x_{k+l} を交換して、 x_s を基底未知数、 x_{k+l} を自由未知数とする。

式(3)の方程式から

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{\beta_l}{\alpha_{l,s}} - \left(\frac{\alpha_{1,1}}{\alpha_{l,s}}x_1 + \frac{\alpha_{1,2}}{\alpha_{l,s}}x_2 + \dots + \frac{\alpha_{1,s-1}}{\alpha_{l,s}}x_{s-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha_{l,s}}x_{k+l} + \frac{\alpha_{l,s+1}}{\alpha_{l,s}}x_{s+1} + \dots + \frac{\alpha_{l,k}}{\alpha_{l,s}}x_k \right) \dots\dots(8) \end{aligned}$$

が得られる。

これを式(3)の残りの方程式へ代入すれば、次式が求められる。

$$\begin{aligned} x_{k+j} &= \beta_j - \frac{\alpha_{j,s}\beta_l}{\alpha_{l,s}} - \left(\alpha_{j,1} - \frac{\alpha_{l,1}\alpha_{j,s}}{\alpha_{l,s}} \right)x_1 \\ &- \left(\alpha_{j,2} - \frac{\alpha_{l,2}\alpha_{j,s}}{\alpha_{l,s}} \right)x_2 - \dots \\ &- \left(\alpha_{j,s-1} - \frac{\alpha_{l,s-1}\alpha_{j,s}}{\alpha_{l,s}} \right)x_{s-1} + \frac{\alpha_{j,s}}{\alpha_{l,s}}x_{k+l} \\ &- \left(\alpha_{j,s+1} - \frac{\alpha_{l,s+1}\alpha_{j,s}}{\alpha_{l,s}} \right)x_{s+1} - \dots \\ &- \left(\alpha_{j,k} - \frac{\alpha_{l,k}\alpha_{j,s}}{\alpha_{l,s}} \right)x_k \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

ただし、 $j=1, 2, 3, \dots, l-1, l+2, \dots, m$ である。また、式(4)の x_s へ式(8)を代入すると、

$$\begin{aligned} Z &= c_0 + \sum_{j=1}^m c_{k+j}\beta_j + \frac{\beta_l}{\alpha_{l,s}} \left(c_s - \sum_{j=1}^m c_{k+j}\alpha_{j,s} \right) \\ &+ \left\{ c_1 - \sum_{j=1}^m c_{k+j}\alpha_{j,1} - \frac{\alpha_{l,1}}{\alpha_{l,s}} \left(c_s - \sum_{j=1}^m c_{k+j}\alpha_{j,s} \right) \right\} x_1 \\ &+ \left\{ c_2 - \sum_{j=1}^m c_{k+j}\alpha_{j,2} - \frac{\alpha_{l,2}}{\alpha_{l,s}} \left(c_s - \sum_{j=1}^m c_{k+j}\alpha_{j,s} \right) \right\} x_2 \\ &+ \dots + \left\{ c_{s-1} - \sum_{j=1}^m c_{k+j}\alpha_{j,s-1} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha_{l^*s-1}}{\alpha_{l^*s}}\left(c_s - \sum_{j=1}^m c_{k+j}\alpha_{j^*s}\right)\}x_{s-1} \\ & + \frac{1}{\alpha_{l^*s}}\left(-c_s + \sum_{j=1}^m c_{k+j}\alpha_{j^*s}\right)x_{k+l} \\ & + \left\{c_{s+1} - \sum_{j=1}^m c_{k+j}\alpha_{j^*s+1} - \frac{\alpha_{l^*s+1}}{\alpha_{l^*s}}\right. \\ & \cdot \left.\left(c_s - \sum_{j=1}^m c_{k+j}\alpha_{j^*s}\right)\right\}x_{s+1} + \cdots \\ & + \left\{c_k - \sum_{j=1}^m c_{k+j}\alpha_{j^*k} - \frac{\alpha_{l^*k}}{\alpha_{l^*s}}\right. \\ & \cdot \left.\left(c_s - \sum_{j=1}^m c_{k+j}\alpha_{j^*s}\right)\right\}x_k \cdots \cdots \cdots (10) \end{aligned}$$

となる.

ここで、自由未知数

$$\left. \begin{aligned} &x_j=0, \quad (j=1, 2, 3, \dots, s-1, k+l, s+1, \dots, k) \\ &\text{とおくと,} \\ &x_s = \frac{\beta_l}{\alpha_{l \cdot s}} \geq 0 \\ &x_{k+j} = \beta_j - \frac{\alpha_{j \cdot s} \beta_l}{\alpha_{l \cdot s}} \geq 0, \quad \left. \begin{aligned} &(j=1, 2, 3, \dots, m \\ &\quad \text{ただし } j \neq l) \end{aligned} \right\} \quad (11) \end{aligned} \right\}$$

となり，これらは許容解である．

Z の値としては

$$Z = c_0 + \sum_{j=1}^m c_{k+j} \beta_j + \frac{\beta_l}{\alpha_{l \cdot s}} \left(c_s - \sum_{j=1}^m c_{k+j} \alpha_{j \cdot s} \right) \cdots \cdots (12)$$

が得られるが、式(5)の後に述べたように負の係数をもった未知数を x_i としているから、

$$\frac{\beta_l}{\alpha_{l \cdot s}} \left(c_s - \sum_{j=1}^m c_{k+j} \alpha_{j \cdot s} \right) \leq 0 \dots \dots \dots (13)$$

となる。ゆえに、式(12)は $x_j=0$, ($j=1, 2, 3, \dots, m$) のとき求まった Z の値より大きくはならない。

もし、式(10)の x_j , ($j=1, 2, 3, \dots, s-1, k+l, s+1, \dots, k$) の係数がすべてゼロか正であれば、式(11)が最適解となる。負のものがあれば同様の計算をくり返し行なう。このように制約式が非退化であると、上述の計算課程をくり返し行なうことにより循環することなく、有限回の計算後には最適解が得られる。

3. 線形計画法理論の展開

q 個の非負の未知数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_q$ の値を求めようとする場合、その未知数と測定値 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_p$ の間に次の関係が成立しているとする。

$$\left. \begin{aligned} A_{1,1}X_1 + A_{1,2}X_2 + A_{1,3}X_3 + \cdots + A_{1,q}X_q &= B_1 \\ A_{2,1}X_1 + A_{2,2}X_2 + A_{2,3}X_3 + \cdots + A_{2,q}X_q &= B_2 \\ A_{3,1}X_1 + A_{3,2}X_2 + A_{3,3}X_3 + \cdots + A_{3,q}X_q &= B_3 \\ \vdots & \\ A_{p,1}X_1 + A_{p,2}X_2 + A_{p,3}X_3 + \cdots + A_{p,q}X_q &= B_p \end{aligned} \right\} (14)$$

ただし、 $A_{i \cdot j}$, ($i=1, 2, 3, \dots, p$, $j=1, 2, 3, \dots, q$) は定数 ($A_{i \cdot j}$ は測定値であってもよい) とする. 実際の測定においては測定値 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_p$ に誤差が含まれるので, 非負の補正值 $R_1, R_2, R_3, \dots, R_q$ を導入すると式 (4) は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} & A_{1\cdot 1}X_1 + A_{1\cdot 2}X_2 + A_{1\cdot 3}X_3 + \cdots \\ & \quad + A_{1\cdot q}X_q - R_1 \leq B_1 \\ & A_{1\cdot 1}X_1 + A_{1\cdot 2}X_2 + A_{1\cdot 3}X_3 + \cdots \\ & \quad + A_{1\cdot q}X_q + R_1 \geq B_1 \\ & A_{2\cdot 1}X_1 + A_{2\cdot 2}X_2 + A_{2\cdot 3}X_3 + \cdots \\ & \quad + A_{2\cdot q}X_q - R_2 \leq B_2 \\ & A_{2\cdot 1}X_1 + A_{2\cdot 2}X_2 + A_{2\cdot 3}X_3 + \cdots \\ & \quad + A_{2\cdot q}X_q + R_2 \geq B_2 \\ & \dots\dots\dots \\ & A_{p\cdot 1}X_1 + A_{p\cdot 2}X_2 + A_{p\cdot 3}X_3 + \cdots \\ & \quad + A_{p\cdot q}X_q - R_p \leq B_p \\ & A_{p\cdot 1}X_1 + A_{p\cdot 2}X_2 + A_{p\cdot 3}X_3 + \cdots \\ & \quad + A_{p\cdot q}X_q + R_p \geq B_p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

連立不等式 (15) は $p+q$ 次元空間の解の多面体を定めている。それらを満足する許容解の中で、 $\sum_{i=1}^p R_i$ を最小にするような解を最適解としてデータ処理を行なうことができる。

連立不等式 (5) は負でないスラック変数 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{2p}$ を導入することによって, 次の連立方程式が得られる.

$$\begin{aligned}
& A_{1,1}X_1 + A_{1,2}X_2 + A_{1,3}X_3 + \dots \\
& \quad + A_{1,q}X_q - R_1 + S_1 = B_1 \\
& A_{1,1}X_1 + A_{1,2}X_2 + A_{1,3}X_3 + \dots \\
& \quad + A_{1,q}X_q + R_1 - S_2 = B_1 \\
& A_{2,1}X_1 + A_{2,2}X_2 + A_{2,3}X_3 + \dots \\
& \quad + A_{2,q}X_q - R_2 + S_3 = B_2 \\
& A_{2,1}X_1 + A_{2,2}X_2 + A_{2,3}X_3 + \dots \\
& \quad + A_{2,q}X_q + R_2 - S_4 = B_2 \\
& \dots\dots\dots(16) \\
& \dots\dots\dots \\
& \dots\dots\dots \\
& A_{p,1}X_1 + A_{p,2}X_2 + A_{p,3}X_3 + \dots \\
& \quad + A_{p,q}X_q - R_p + S_{2p-1} = B_p \\
& A_{p,1}X_1 + A_{p,2}X_2 + A_{p,3}X_3 + \dots \\
& \quad + A_{p,q}X_q + R_p - S_{2p} = B_p
\end{aligned}$$

連立不等式 (15) の解と連立方程式 (16) の解は 1 対 1 の対応をなす。このようにして連立不等式は連立方程式を解くことに帰着できる。これらのデータ処理は制約条件式 (16) のもとに目的関数

$$Z = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n \dots\dots\dots(17)$$

を最小とする $X_1, X_2, X_3, \dots, X_q$ を求める問題となる.

スラック変数は不等式を等式に変えるための変数であるが，その係数が正のときには，最初の基底解を求めるのにも利用される．しかし負のときには利用できない．

そこで、スラック変数の係数が負のときには、新たな変数としてそれは物理的に何ら意味をもたないで、ただ基底解を求めるための技巧変数を便法として導入する。もちろん、この技巧変数は最終的には消去されなければならない変数である。そのためにはきわめて大きな値の係数をつけた技巧変数を目的関数に加えればよい。ここで、非負の技巧変数 $V_1, V_2, V_3, \dots, V_p$ を導入して書きかえらる

$$\left. \begin{aligned} & A_{1,1}X_1 + A_{1,2}X_2 + A_{1,3}X_3 + \dots \\ & + A_{1,q}X_q - R_1 + S_1 = B_1 \\ & A_{1,1}X_1 + A_{1,2}X_2 + A_{1,3}X_3 + \dots \\ & + A_{1,q}X_q + R_1 - S_2 + V_1 = B_1 \\ & A_{2,1}X_1 + A_{2,2}X_2 + A_{2,3}X_3 + \dots \\ & + A_{2,q}X_q - R_2 + S_3 = B_2 \\ & A_{2,1}X_1 + A_{2,2}X_2 + A_{2,3}X_3 + \dots \\ & + A_{2,q}X_q + R_2 - S_4 + V_2 = B_2 \\ & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \\ & A_{p,1}X_1 + A_{p,2}X_2 + A_{p,3}X_3 + \dots \\ & + A_{p,q}X_q - R_p + S_{2p-1} = B_p \\ & A_{p,1}X_1 + A_{p,2}X_2 + A_{p,3}X_3 + \dots \\ & + A_{p,q}X_q + R_p - S_{2p} + V_p = B_p \\ & X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, \dots, X_q \geq 0 \\ & R_1 \geq 0, R_2 \geq 0, R_3 \geq 0, \dots, R_p \geq 0 \\ & S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, S_3 \geq 0, \dots, S_{2p} \geq 0 \\ & V_1 \geq 0, V_2 \geq 0, V_3 \geq 0, \dots, V_p \geq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

を制約条件とし、目的関数

$$Z = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_p + M(V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_p) \dots\dots\dots (19)$$

を最小にするものを求めることになる。ただし、 M は式 (19) の他の係数より十分大きな正数とする。式 (18) を用いて目的関数の技巧変数を消去すれば、

$$\begin{aligned} Z = & M \left\{ \sum_{i=1}^p B_i - \sum_{i=1}^p A_{i,1}X_1 - \sum_{i=1}^p A_{i,2}X_2 \right. \\ & - \sum_{i=1}^p A_{i,3}X_3 - \dots - \sum_{i=1}^p A_{i,q}X_q \left. \right\} \\ & - (M-1) \sum_{i=1}^p R_i + M \sum_{i=1}^p S_{2i} \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

を得る。

かくして、スラック変数、技巧変数を導入することによって、測定値に誤差が含まれている場合のデータ処理に線形計画法が応用できることが示された。なお、式 (18)、(20) は基本的には、それぞれ式 (1)、(2) に対応するものである。

4. 応 用 例

光の振動を $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots, \nu_q$ とし、その振動数に対する光源のエネルギー強度を $S(\nu_1), S(\nu_2), S(\nu_3), \dots, S(\nu_q)$,

光電管の分光感度をそれぞれ $R(\nu_1), R(\nu_2), R(\nu_3), \dots, R(\nu_q)$ とする。また、各振動数に対する光電管の減速電圧特性を減速電圧 $V=0$ (V) で 1 に正規化したものを、 $U_{\nu_1}(V), U_{\nu_2}(V), U_{\nu_3}(V), \dots, U_{\nu_q}(V)$ で表わす。すると各振動数の光が同時に光電管へ入射したときの減速電圧特性 $I(V)$ は次式で示される。

$$\begin{aligned} I(V) = & U_{\nu_1}(V)S(\nu_1)R(\nu_1) + U_{\nu_2}(V)S(\nu_2)R(\nu_2) \\ & + U_{\nu_3}(V)S(\nu_3)R(\nu_3) + \dots + U_{\nu_q}(V)S(\nu_q)R(\nu_q) \\ = & \sum_{i=1}^q U_{\nu_i}(V)S(\nu_i)R(\nu_i) \\ = & \sum_{i=1}^q U_{\nu_i}(V)P(\nu_i) \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ただし、 $P(\nu_i) = S(\nu_i)R(\nu_i)$ である。

いま、減速電圧 $V_1, V_2, V_3, \dots, V_p$ の P 個の電圧に対する光電流を測定すれば、式 (21) より式 (14) に対応する次のような P 元連立方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} I(V_1) = & U_{\nu_1}(V_1)P(\nu_1) + U_{\nu_2}(V_1)P(\nu_2) \\ & + U_{\nu_3}(V_1)P(\nu_3) + \dots + U_{\nu_q}(V_1)P(\nu_q) \\ I(V_2) = & U_{\nu_1}(V_2)P(\nu_1) + U_{\nu_2}(V_2)P(\nu_2) \\ & + U_{\nu_3}(V_2)P(\nu_3) + \dots + U_{\nu_q}(V_2)P(\nu_q) \\ I(V_3) = & U_{\nu_1}(V_3)P(\nu_1) + U_{\nu_2}(V_3)P(\nu_2) \\ & + U_{\nu_3}(V_3)P(\nu_3) + \dots + U_{\nu_q}(V_3)P(\nu_q) \\ & \dots\dots\dots \\ I(V_p) = & U_{\nu_1}(V_p)P(\nu_1) + U_{\nu_2}(V_p)P(\nu_2) \\ & + U_{\nu_3}(V_p)P(\nu_3) + \dots + U_{\nu_q}(V_p)P(\nu_q) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ゆえに、式 (22) の連立方程式を解くことにより、 $P(\nu_1), P(\nu_2), P(\nu_3), \dots, P(\nu_q)$ の値が求まる。したがって、光電管の分光感度が明らかであれば、光源のエネルギー分布が決定でき、逆に光源のエネルギー分布が既知であれば、光電管の分光感度が求まる。また、各振動数に対する分光透過率 $T(\nu_1), T(\nu_2), T(\nu_3), \dots, T(\nu_q)$ の光学フィルタをそう入したとき、

$$P_T(\nu_i) = S(\nu_i)R(\nu_i)T(\nu_i) \dots\dots\dots (23)$$

とすれば、次式から分光透過率が求まる。

$$T(\nu_i) = \frac{P_T(\nu_i)}{P(\nu_i)} \dots\dots\dots (24)$$

平面状の陰極・陽極を平行に配置した Cs_3Sb 光電管の減速電圧対光電流特性の式は次式で表わされる⁴⁾。

$$\begin{aligned} I_p = & KQ(\nu) \left\{ \frac{1}{8} E_v^2 \left\{ -\sin^{-1}(1) + \sin^{-1} \right. \right. \\ & \cdot \left(\frac{E_v + 2(E_g + \chi - h\nu + ev)}{E_v} \right) \left. \right\} \\ & - E_v \left(\frac{1}{2} E_v + E_g + \chi - h\nu + ev \right) \cos^{-1} \\ & \cdot \left(\frac{E_v + E_g + \chi - h\nu + ev}{E_v} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} E_v + E_g + \chi - h\nu + eV \right) \\ \{ (h\nu - E_g - x - eV) (E_v + E_g + \chi - h\nu + eV) \}^{1/2} \} \dots\dots\dots 25$$

ただし、 K は定数、 $Q(\nu)$ は光電子放出に関する量子効率、 E_v は価電子帯の上端準位、 E_g は禁示帯幅、 χ は電子親和力、 h はプランクの定数、 ν は光の振動数、 e は電子の電荷、 V は減速電圧である。

いま、減速電圧がゼロ (V) の点で光電流を 1 に規格化すれば、

$$U_s(V) = \frac{I_p}{I_{p0}} \dots\dots\dots 26$$

となる。ただし、 I_{p0} は式 (25) において $V=0$ とおいた値で

$$I_{p0} = KQ(\nu) \left\{ \frac{1}{8} E_v^2 \left\{ -\sin^{-1}(1) + \sin^{-1} \left(\frac{E_v + 2(E_g + \chi - h\nu)}{E_v} \right) \right\} - E_v \left(\frac{1}{2} E_v + E_g + \chi - h\nu \right) \cos^{-1} \left(\frac{E_v + E_g + \chi - h\nu}{E_v} \right) \right\}^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} E_v + E_g + \chi - h\nu \right) \{ (h\nu - E_g - x) (E_v + E_g + x - h\nu) \}^{1/2} \} \dots\dots\dots 27$$

となる。図 1 はその理論曲数を図示したものである。上式の各電圧に対する光電流値を使用して干渉フィルタの分光透過率を求めた。

光源の分光エネルギー分布を制限するために 図 2 のような A, B, C 3 枚の色ガラスフィルタ

図 1 減速電圧対光電流特性の理論曲線

図 2 色ガラスフィルタの分光透過率

図 3 組合せフィルタの分光透過率

をそう入した。

図 3 は A, B, C 3 枚の色ガラスフィルタを組み合わせた場合の分光透過率である。なお、光源には白熱ランプを使用し、光電管は平面状の陰極・陽極を平行に配置した構造の Cs_3Sb 光電管を使用した。白熱ランプを点灯し、A, B, C 3 枚の色ガラスフィルタを透過した光を光電管に入射させながら、陰極に対して陽極に減速電圧を印加して、減速電圧対光電流特性を測定した。図 4 は被測定の干渉フィルタをそう入したときの減速電圧対

図 4 干渉フィルタをそう入したときの減速電圧対光電流特性

未知数の係数				修正値の係数				スラック変数の係数				技巧変数の係数			
2.5791×10^{-1}	3.3046×10^{-1}	3.9155×10^{-1}	4.4307×10^{-1}	4.8683×10^{-1}	5.2432×10^{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.5791×10^{-1}	3.3046×10^{-1}	3.9155×10^{-1}	4.4307×10^{-1}	4.8683×10^{-1}	5.2432×10^{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.5762×10^{-1}	2.2769×10^{-1}	2.9010×10^{-1}	2.4467×10^{-1}	3.9218×10^{-1}	4.3362×10^{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.5762×10^{-1}	2.2769×10^{-1}	2.9010×10^{-1}	2.4467×10^{-1}	3.9218×10^{-1}	4.3362×10^{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8.5470×10^{-2}	1.4712×10^{-1}	2.0651×10^{-1}	2.6089×10^{-1}	3.0972×10^{-1}	3.5325×10^{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8.5470×10^{-2}	1.4712×10^{-1}	2.0651×10^{-1}	2.6089×10^{-1}	3.0972×10^{-1}	3.5325×10^{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.8027×10^{-2}	8.6765×10^{-2}	1.3948×10^{-1}	1.9085×10^{-1}	2.3881×10^{-1}	2.8273×10^{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.8027×10^{-2}	8.6765×10^{-2}	1.3948×10^{-1}	1.9085×10^{-1}	2.3881×10^{-1}	2.8273×10^{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.1434×10^{-2}	4.4470×10^{-2}	8.7656×10^{-2}	1.3364×10^{-1}	1.7880×10^{-1}	2.2156×10^{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.1434×10^{-2}	4.4470×10^{-2}	8.7656×10^{-2}	1.3364×10^{-1}	1.7880×10^{-1}	2.2156×10^{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.0559×10^{-2}	1.7858×10^{-2}	4.9605×10^{-2}	8.8275×10^{-2}	1.2900×10^{-1}	1.6923×10^{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.0559×10^{-2}	1.7858×10^{-2}	4.9605×10^{-2}	8.8275×10^{-2}	1.2900×10^{-1}	1.6923×10^{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0000×100	4.2044×10^{-3}	2.3755×10^{-2}	5.3755×10^{-2}	8.8701×10^{-2}	1.2522×10^{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0000×100	4.2044×10^{-3}	2.3755×10^{-2}	5.3755×10^{-2}	8.8701×10^{-2}	1.2522×10^{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0000×100	1.0125×10^{-4}	8.3534×10^{-3}	2.8984×10^{-2}	5.7151×10^{-2}	8.8984×10^{-2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0000×100	1.0125×10^{-4}	8.3534×10^{-3}	2.8984×10^{-2}	5.7151×10^{-2}	8.8984×10^{-2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0000×100	0.0000×100	1.3518×10^{-3}	1.2768×10^{-2}	3.3565×10^{-2}	5.9962×10^{-2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0000×100	0.0000×100	1.3518×10^{-3}	1.2768×10^{-2}	3.3565×10^{-2}	5.9962×10^{-2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0000×100	0.0000×100	0.0000×100	3.7541×10^{-3}	1.7087×10^{-2}	3.7563×10^{-2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0000×100	0.0000×100	0.0000×100	3.7541×10^{-3}	1.7087×10^{-2}	3.7563×10^{-2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0000×100	0.0000×100	0.0000×100	3.1548×10^{-4}	6.7750×10^{-3}	2.1154×10^{-2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0000×100	0.0000×100	0.0000×100	3.1548×10^{-4}	6.7750×10^{-3}	2.1154×10^{-2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0000×100	0.0000×100	0.0000×100	0.0000×100	1.5436×10^{-3}	1.0047×10^{-2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0000×100	0.0000×100	0.0000×100	0.0000×100	1.5436×10^{-3}	1.0047×10^{-2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0000×100	0.0000×100	0.0000×100	0.0000×100	0.0000×100	0.0000×100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0000×100	0.0000×100	0.0000×100	0.0000×100	0.0000×100	0.0000×100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(28')

[A] =

$$\begin{aligned}
 [X_1] &= \begin{bmatrix} P_T(\nu_1) \\ P_T(\nu_2) \\ P_T(\nu_3) \\ \vdots \\ P_T(\nu_6) \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_{12} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{24} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{12} \end{bmatrix}, & [X_2] &= \begin{bmatrix} P(\nu_1) \\ P(\nu_2) \\ P(\nu_3) \\ \vdots \\ P(\nu_6) \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_{12} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{24} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{12} \end{bmatrix}, & [B_1] &= \begin{bmatrix} 1.71 \times 10^3 \\ 1.71 \times 10^3 \\ 1.34 \times 10^3 \\ 1.34 \times 10^3 \\ 1.02 \times 10^3 \\ 1.02 \times 10^3 \\ 7.54 \times 10^2 \\ 7.54 \times 10^2 \\ 5.35 \times 10^2 \\ 5.35 \times 10^2 \\ 3.60 \times 10^2 \\ 3.60 \times 10^2 \\ 2.26 \times 10^2 \\ 2.26 \times 10^2 \\ 1.28 \times 10^2 \\ 1.28 \times 10^2 \\ 6.20 \times 10^1 \\ 6.20 \times 10^1 \\ 2.33 \times 10^1 \\ 2.33 \times 10^1 \\ 5.7 \times 10^0 \\ 5.7 \times 10^0 \\ 1.1 \times 10^0 \\ 1.1 \times 10^0 \end{bmatrix}, & [B_2] &= \begin{bmatrix} 8.20 \times 10^3 \\ 8.20 \times 10^3 \\ 6.37 \times 10^3 \\ 6.37 \times 10^3 \\ 4.83 \times 10^3 \\ 4.83 \times 10^3 \\ 3.54 \times 10^3 \\ 3.54 \times 10^3 \\ 2.49 \times 10^3 \\ 2.49 \times 10^3 \\ 1.66 \times 10^3 \\ 1.66 \times 10^3 \\ 1.04 \times 10^3 \\ 1.04 \times 10^3 \\ 5.87 \times 10^2 \\ 5.87 \times 10^2 \\ 2.91 \times 10^2 \\ 2.91 \times 10^2 \\ 1.20 \times 10^2 \\ 1.20 \times 10^2 \\ 3.64 \times 10^1 \\ 3.64 \times 10^1 \\ 7.7 \times 10^0 \\ 7.7 \times 10^0 \end{bmatrix} \quad \text{.....(28')}
 \end{aligned}$$

光電流特性曲数であり、図 5 は干渉フィルタをそう入しないときのそれである。

理論的には減速電圧 $V=0$ (V) で減速電圧特性曲数は飽和するはずであるが、実測するとそれ以前から飽和し始めるので、 $V=-0.2$ (V) から 0.05 (V) 間隔に $V=-0.75$ (V) まで電圧を選定した。

なお、光の振動数 ν は $\nu=6.0 \times 10^{14}$ (Hz) から $\nu=7.0 \times 10^{14}$ (Hz) までを、 $\nu=2.0 \times 10^{13}$ (Hz) 間隔に選んだ。このようにして作ったデータをマトリックス表示すれば次式のようなになる。

$$[A] \cdot [X_i] = [B_i] \quad \text{.....(29)}$$

ただし、ここで $[A]$, $[X_i]$, $[B_i]$ は式 (28') および式 (28'') で示すもので、 $i=1, 2$ である。この場合 $[B_1]$,

図 5 干渉フィルタをそう入しないときの減速電圧対光電流特性

$[B_2]$ はそれぞれ 被測定 の干渉フィルタをそう入したとき、およびしないときの実測値である。

また、目的関数は

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= -551516.90 P_T(\nu_1) - 858668.65 P_T(\nu_2) \\
 &\quad - 1198361.20 P_T(\nu_3) - 1560971.58 P_T(\nu_4) \\
 &\quad - 1940162.60 P_T(\nu_5) - 2327640.00 P_T(\nu_6) \\
 &\quad - 999999(R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_{12}) \\
 &\quad + 1000000(S_2 + S_4 + S_6 + \cdots + S_{24}) \quad \text{.....(29)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_2 &= -551516.90 P(\nu_1) - 858668.65 P(\nu_2) \\
 &\quad - 1198361.20 P(\nu_3) - 1560971.58 P(\nu_4) \\
 &\quad - 1940162.60 P(\nu_5) - 2327640.00 P(\nu_6) \\
 &\quad - 999999(R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_{12}) \\
 &\quad + 1000000(S_2 + S_4 + S_6 + \cdots + S_{24}) \quad \text{.....(30)}
 \end{aligned}$$

である。

制約条件式 (28) を満足する非負解の中で目的関数式 (29), あるいは式 (30) を最小にするものを電子計算機によって実際に計算すると表 1 のようになる。この結果を従来

表 1 計算結果

光の振動数 ($\times 10^{14}$ Hz)	$P_T(\nu_i)$	$P(\nu_i)$	分光透過率 (%)
6.0	0.00×10^0	0.00×10^0	
6.2	2.05×10^1	5.69×10^2	3.60
6.4	6.51×10^1	3.59×10^3	1.81
6.6	3.01×10^3	9.50×10^3	31.7
6.8	7.01×10^2	4.87×10^3	14.4
7.0	0.00×10^0	1.11×10^1	0.00

の方法で求めた曲数上に $\times$ 印で示すと図 6 のようになる。なお、式 (28) は式 (18) に、式 (29), (30) は式 (20) にそれぞれ対応している。目的関数の定数は解に関係しないので式 (29), (30) ではそれを省略している。式 (20) の M はここでは $M=1000000$ とした。

図 6 干渉フィルタの分光透過率

5. 考 察

光の振動数 $\nu=6.0 \times 10^{14}$ (Hz) に対しては、干渉フィルタをそう入しない $P(\nu_i)$ の値はゼロとなっている。これは図 3 のような組合わせフィルタをあらかじめそう入しているの、その振動数の光がほとんど透過しないためである。光源の分光エネルギー分布が連続であるので、式 (22) は近似式である。しかし、上述のような方法

でデータ処理すれば、従来の方法によって測定した値と大体一致した答が得られた。主として曲線の両端において違いが大きい、その付近では組合わせフィルタの分光透過率が小さく、そのために誤差が拡大されたものと思われる。

分光エネルギー分布が連続である光源で光電管を照射したときには、理論的には積分方程式になる。しかし、積分方程式は特殊の場合を除いて、一般には解析的に解くことは困難である。解析的に解き得ない積分方程式は数値解法によって解かれる。積分方程式の数値解法は積分方程式を近似的に連立方程式で表わし、それを解くことになる。しかし、実測値を使用する場合には誤差が含まれているので、その方法でよい結果を得ることはなかなか困難である。

一般に、実測値のデータ処理は最小自乗法によってなされる⁵⁾。最小自乗法は正規分布をした偶然誤差の含まれているデータに対しては有効である。けれども、系統誤差とか過失誤差の含まれているものに対しては適用できない。物理現象の測定の場合には現象が不安定になったりして、実測値としてよいデータが得られないときがある。

そのようなデータを使用して解くと、最小自乗法でデータ処理をしてもよい値が得られず、物理的条件に反する見当ちがいの結果が得られることがしばしばある。それに対して線形計画法では、解く際に種々な条件を付加することが可能であり、目的関数も任意にできる。一般には、線形計画法の解は負でないという条件で解いているが、負であってもよい条件をつけることもでき、また任意な物理的条件を付加できる。それゆえ、理論的に近似であるものとか、系統誤差、過失誤差などの含まれているデータ処理に対して線形計画法は適用できる。

減速電圧対光電流特性式として理論的に誘導した式を

用いたが、それにこだわる必要はなく、実測値とよく合う関数形であれば何でもよい。必要なことは実測値とよく一致する関数形を使用することである。もちろん、関数形のかわりに実測値を使用してもよい。実測値としては有効数字が多く高精度なものが得られるようにして、誤差を極力減少させるように努めることが望ましい。

6. 結 言

従来一般に、実測値のデータ処理は最小自乗法によって行われてきた。しかし、実測値として誤差の小さいもの、測定値を数多く得ることが困難な場合もある。そのような場合のデータ処理として線形計画法が有用であるとし、各値が正、残差の絶対値の総和が最小という目的関数のもとに、光電管の減速電圧特性を利用して、干渉フィルタの分光透過率を求めた。線形計画法で得た解が従来の方法で得た値にかなりよく一致した。線形計画法では、制約式として、種々な物理的条件を付加することが可能であり、また目的関数も、場合に応じて適当に変えられるので、種々のデータ処理に利用できるものと考えられる。終わりに、本研究の数値計算は東京大学大型電子計算機を利用して計算したことを付記する。

参 考 文 献

- (1) 山口, 小林: 照学誌 52-4 (昭43) 108
- (2) H. M. Wagner: Operat. Res. 6-2 (1958) 190
- (3) 森口, 宮下: 線形計画法 岩波講座 現代応用数学 (1958)
- (4) 山口, 小林: 電学誌 90-3 (昭45) 495
- (5) M. Merriman: A text-book on the method of least squares, John Wiley & Sons, New York (1911)

(受付1970年6月19日, 再受付同年10月23日)