Rayleigh 大気における四次散乱光までの評価 (1)

正 会 員 関 根 征 士*

Estimation of Each Scattering Light up to the Fourth Order by Rayleigh Atmosphere (1)

Seishi Sekine (Member)

(Faculty of Engineering, Niigata University)

ABSTRACT

Luminance and chromaticity of daylight are varied every minute under influence of a greater or lesser extent by a large number of effects.

The purpose of the present investigation is to make clear the relation between these factors and phases of variance.

The light of the sun is weakened by scattering and absorption as it penetrates the earth's atmosphere. The scattering of the light in the clear sky has two components caused by:

- (1) Rayleigh scattering by the air molecules.
- (2) Scattering by the aerosol (haze and dust).

The sunlight passing through Rayleigh Atmosphere (in which the molecular scattering only is considered and no absorption) is scattered in order by the air molecules and transmits in all directions in accordance with Rayleigh's phase function.

In this paper, the first scattering light by Rayleigh Atmosphere is estimated.

1. ま え が き

昼光の分光エネルギー、輝度および色度に関する研究は、これまで国内外の多くの研究者によって進められてきている。それらは、国際的には CIE 合成昼光標準に関する勧告や¹⁾、CIE 標準曇天空輝度分布についての推奨として²⁾、国内では照明学会における昼光標準確立調査委員会報告として集大成されている³⁾。これらはいずれも多くの観測結果に基づいている、すぐれた研究成果である。しかし、昼光がさまざまな要因によって変動や差異を生じることについての検討は、十分になされてい

ない。

昼光の光源は太陽である。太陽放射の分光エネルギーは、紫外・可視・赤外域では通常安定した定常的な放射として取り扱うことができる。大気を透過して地表面に到達する直射日光と、大気層での散乱によって生じる青空光は、下記に示す主な要因によって変化を受ける⁴⁾。

天文学的要因

- (1) 地球—太陽間の距離
- (2) 日赤緯
- (3) 時 角

地理学的要因

- (4) 観測点の緯度、経度
- (5) 観測点の高度

幾何学的要因

* 新潟大学工学部
本論文の一部は、昭和49年度電気関係学会関西支部連合大会、ならびに昭和50年1月照明学会公開研究会で講演したものである。

- (6) 太陽の天頂角, 方位角
 (7) 観測方向の天頂角, 方位角
 (8) 受光面の傾き

気象・物理学的要因

- (9) オゾン層による吸収
 (10) 純粋大気による吸収, 散乱
 (11) 大気中の水蒸気による吸収, 散乱
 (12) 大気中のエアロゾル (煙霧と塵埃) による吸収, 散乱
 (13) 雲による吸収・散乱 (反射を含む)
 (14) 地表面による反射

(1)~(8)については, 純粋数学的に取り扱うことができる. (9)については平均濃度による計算値が用いられる. (10)の散乱については Rayleigh の散乱理論より求められる. (11)~(13)については, 個々の粒子による散乱は Mie の散乱理論で記述されるが, 粒子の時空間的変動が大きくその機構は複雑で, 理論的評価は一般に困難を伴う. (14)については地表面の反射特性より求められる.

大気中の光の伝達理論としては, 高次の多重散乱を拡散放射とみなし, その放射伝達の微積分方程式を解く理論があり, 吸収のない分子散乱だけを考慮に入れた大気 (Rayleigh 大気) については, Chandrasekhar が見事な解法を示した⁵⁾. この理論は大気中の光の場を表わす上ではすぐれた理論であるが, 理論そのものが現象的にとらえにくく計算過程も複雑である.

本研究の目的は, Rayleigh 大気中を透過する太陽光が空気によって一次, 二次, 三次と逐次に高次の Rayleigh 散乱を受けつつ, 指向性をもって伝達していく理論を展開することによって, Rayleigh 大気における青空光の分光エネルギー, 輝度および色度の変動の要因とその様相との関係を解明することにある.

本論文では, 地表面の反射を考慮しない場合について, Rayleigh 大気における青空光の分光エネルギーの四次散乱光までの評価法, 一次, 二次, 三次, 四次の各散乱光の特性, ならびに四次以上の高次散乱光を無視することによって生じる誤差について検討したことを報告する.

2. 大気の高さ

大気は 0.03% の CO_2 を含む乾燥した空気 (純粋大気) で, 760 mmHg・0℃の等密度の大気とする.

海面上における重力加速度を g_0 (ms^{-2}), 海面からの高さ x (m) における重力加速度を g (ms^{-2}) とすれば, x が地球の半径 R (m) に比べて十分小さいという条件下では, 万有引力の法則を用いて次式が成り立つ.

$$g_0 = G \frac{M}{R^2}, \quad g = G \frac{M}{(R+x)^2} \quad \cdots (1)$$

ただし, G : 万有引力定数 ($\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$)

M : 地球の質量 (kg)

よって

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+x)^2} \quad \cdots (2)$$

と書き表わされる.

したがって, 海面上で気温 0℃における水銀柱の高さ h_{Hg} (m) とし, このときの水銀と空気の密度をそれぞれ ρ_{Hg} (kgm^{-3}), ρ_0 (kgm^{-3}) とすれば, 密度 ρ_0 の等密大気の高さ H_0 (m) は次式より求められる.

$$\begin{aligned} h_{Hg} \rho_{Hg} g_0 &= \int_0^{H_0} \rho_0 g \, dx \\ &= \int_0^{H_0} \rho_0 g_0 \frac{R^2}{(R+x)^2} \, dx \\ &= \rho g_0 \frac{RH_0}{R+H_0} \quad \cdots (3) \end{aligned}$$

ゆえに,

$$H_0 = \frac{1}{\frac{\rho_0}{h_{Hg} \rho_{Hg}} - \frac{1}{R}} \approx \frac{h_{Hg} \rho_{Hg}}{\rho_0}; \quad (1 \ll R) \quad \cdots (4)$$

ここで, $h_{Hg} = 760$ mm, $\rho_{Hg} = 13.5951 \text{ g/cm}^3$, $\rho_0 = 1.2925 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ とすれば, $H_0 = 799.4$ m となる.

3. エア・マス

太陽光は, 大気中を透過する際に散乱と吸収を受けて減衰する. この割合を規定するのに「エア・マス (大気路程ともいう)」なる量が一般に用いられる. エア・マスとは, 使用あるいは測定すべき目的物に達するまでに, 太陽光が大気中を透過する距離を示す係数である. すなわち, 太陽光が地表面に垂直 (天頂角 = 0°) に入射した場合に対する天頂角 z 方向から入射したときの透過距離の比である.

図 1 において, 大気の高さ H (m) (天頂角 = 0°), 天頂角 z 方向の大気の厚さを H_z (m) とすれば, エア・マス m_{gr} は次式によって与えられる⁴⁾.

$$m_{gr} = \frac{H_z}{H} \frac{P}{P_0} \quad \cdots (5)$$

図 1 太陽光が大気中を透過する距離

ここで、 $P_0(\text{mmHg})$, $P(\text{mmHg})$ はそれぞれ海面上と測定点における気圧であり、 H_z は図 1 の $\triangle ABC$ に余弦定理を用いて次式より求められる。

$$H_z = \sqrt{R^2 \cos^2 z + 2RH + H^2} - R \cos z \quad \dots\dots\dots(6)$$

平面大気においては、 $H_z = \sec z \cdot H$ と表わされる。

$H=7994 \text{ m}$ の場合について、 $\sec z$ と $P/P_0=1$ のときの m_{gr} , ならびに 厳密な値が必要ときに用いられる Bemporad の値との比較を表 1 に示す⁴⁾。 $\sec z$ の Bemporad の値に対する誤差は、 $0^\circ \leq z < 70^\circ$ では非常に小さく、 $z=70^\circ$ で 0.7% , $z=80^\circ$ で 2.9% である。また高度が高くなれば P は小さくなり、したがって m_{gr} も小さくなる。大気圏外では $m_{gr}=0$ となる。

表 1 太陽の天頂角 z とエア・マス (大気路程)⁴⁾

z	$\sec z$	m_{gr}	Bemporad の値
0°	1.00	1.00	1.00
30°	1.15	1.15	1.15
60°	2.00	2.00	2.00
70°	2.92	2.92	2.90
80°	5.76	5.63	5.60
85°	11.47	10.69	10.39
87°	19.10	16.04	15.36
89°	57.30	28.35	26.96
90°	∞	39.94	39.70

4. 大気中を透過する太陽光

すでに述べたように、太陽光は大気中を透過して地上に達するまでに散乱および吸収によって減退する。これらの減衰は Lambert の法則にしたがい、次式によって与えられる⁴⁾。

$$J = J_0 \exp[-m_{gr} H(k_a + k_z + k_w + k_d)] \quad \dots\dots\dots(7)$$

ただし、 J : 到達太陽光エネルギー (Wm^{-2})

J_0 : 大気圏外太陽光エネルギー (Wm^{-2})

k_a : 純粋大気による消散係数 (m^{-1})

k_z : オゾン層による吸収係数 (m^{-1})

k_w : 水蒸気による消散係数 (m^{-1})

k_d : エロゾルによる消散係数 (m^{-1})

ここで $k_z = k_w = k_d = 0$ とし、 k_a を吸収を考慮に入れない散乱だけの係数とした大気が Rayleigh 大気である。

5. 光 の 散 乱

5.1 散 乱 断 面 積

光の流れの中に置かれた、任意な大きさと形状をもった物体が、入射した光のエネルギーを吸収して再放射体となり、二次光を放射する現象を一般に散乱といい、このときの二次光を散乱光という。また、入射光の進行方向と散乱光の進行方向とのなす角を散乱角という。

図 2 に示すように、強さ $I_0(\text{Wm}^{-2})$ の入射光の方向を Z 軸に選び、物体内の適当な点を原点 O にとった球座標 (r, θ, φ) を考える。物体は I_0 を吸収して散乱光を

図 2 Z 軸方向へ進行する光が原点 O におかれた物体に入射することによって生ずる電気双極子モーメント P と、 O から十分遠方にある点 $Q: (\theta, \varphi)$ における P からの放射による電界 E_x

発する。この散乱光の放射強度 $I_s(\text{Wsr}^{-1})$ は

$$I_s = I_0 F(\theta, \varphi) \quad \dots\dots\dots(8)$$

と表わされる。ここで $F(\theta, \varphi)$ ($\text{m}^2 \text{sr}^{-1}$) は散乱光の角度分布で指向特性を表わし、 θ と φ だけの関数である。

原点 O から十分離れた観測点 Q を含む仮想の微小面積 $dS(\text{m}^2)$ をとり、物体から発せられた散乱光が dS に入射する放射束について考える。 O が dS に張る立体角 $d\omega$ (sr) は、距離 OQ を $r(\text{m})$, r と dS の法線とのなす角 δ とすれば、立体角の定義から $d\omega = dS \cos \delta / r^2$ である。したがって物体から OQ 方向へ I_s で出て、 $d\omega$ の範囲で dS に入射する散乱光の放射束を $d\Phi(\text{W})$ とすれば、次式が成り立つ。

$$I_s = \frac{d\Phi}{d\omega} = \frac{d\Phi r^2}{dS \cos \delta} \quad \dots\dots\dots(9)$$

一方、この $d\Phi$ が Q 点における $dS \cos \delta$ の面を OQ の延長方向へ単位立体角内を流れ出るときの強さ $I(\text{Wm}^{-2} \text{sr}^{-1})$ は、 $I = d\Phi / (dS \cos \delta)$ であることから、(8), (9) 式より

$$I = \frac{I_0 F(\theta, \varphi)}{r^2} \quad \dots\dots\dots(10)$$

を得る⁸⁾。

(10) 式の右边を、全球面について積分した全散乱光の強さを $I_0 \text{Cscs}$ に等しいとおいて定義される Cscs をその物体の散乱断面積と称し、

$$\text{Cscs} = \int F(\theta, \varphi) d\omega (\text{m}^2) \quad \dots\dots\dots(11)$$

と書くことができ、面積の次元をもつ。ここで、 $d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ で全立体角で積分される。

5.2 Rayleigh 散乱

Rayleigh の散乱理論は、物体がエネルギーを吸収せず、その大きさがその媒質内の光の波長に比べて十分小さいという条件下で適用できる近似的な便法である。

均一な一次電界 $E_0(\text{Vm}^{-1})$ の中に、波長に比べて十分小さい物体を置いたと考える。この E_0 により一般に

物体内に分極が起こり、内外の電界が変化を受ける。分極電荷によってできた電気双極子モーメント $P(\text{Cm})$ は、物体が等方性媒質であれば、一般に入射電界の方向にかかわらず E_0 と同じ方向のベクトル

$$P = \alpha E_0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

で与えられる⁸⁾。ここで α は分極率を表わす比例定数で、 Fm^2 の単位をもつ。

一次電界が、角周波数 $\omega(\text{s}^{-1})$ なる時間因子 $e^{j\omega t}$ をもつ交番電圧 $E_0 e^{j\omega t}$ の場合も(12式)は成立し、この場合の電気双極子モーメントは $P e^{j\omega t}$ である。

真空中で、図2の原点Oに生じた、波長 $\lambda(\text{m})$ に比べて十分小さい電気双極子モーメントを P とし、 P の正方向と動径 $r(=OQ$: 観測方向) とのなす角を χ とする。 P からの放射による十分遠方の電界は、近似的に χ 方向だけの成分となり、次式によって与えられる(時間因子 $e^{j\omega t}$ は省略する⁸⁾)。

$$E_\chi = \frac{k^2 P \sin \chi}{4\pi \epsilon_0 r} e^{-jkr} (\text{Vm}^{-1}) \quad \dots\dots\dots(13)$$

ただし、 ϵ_0 : 真空の誘電率 (Fm^{-1})

k : 伝播定数で $k=2\pi/\lambda$ (m^{-1})

それゆえ、単位立体角内を流れ出る散乱光の強さ I ($\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}$) (ポインテング・ベクトル) は

$$I = \epsilon_0 c |E_\chi|^2 \quad \dots\dots\dots(14)$$

ただし、 C : 光速

となる⁸⁾。一方、最初に加わる一次電界 E_0 による入射光の強さ $I_0(\text{Wm}^{-2})$ (ポインテング・ベクトル) は

$$I_0 = \epsilon_0 c |E_0|^2 \quad \dots\dots\dots(15)$$

である⁸⁾。物体が等方性であれば、入射光の進行方向 Z と P は直角であり、 P 方向を x 軸に選んで、散乱光を r (θ, φ) 方向で観測したとすれば、

$$\cos \chi = \frac{|P \cdot r|}{Pr} = \sin \theta \cos \varphi \quad \dots\dots\dots(16)$$

であることから

$$\sin \chi = \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} \quad \dots\dots\dots(17)$$

となる。したがって(14)、(15式)の I 、 I_0 が(10式)の I 、 I_0 にそれぞれ等しいとして、さらに(12)、(13式)から次の関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{I_0 F(\theta, \varphi)}{r^2} \\ F(\theta, \varphi) &= \frac{k^4 |\alpha|^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(18)$$

したがって、散乱断面積 $Csca$ は(9式)の定義から

$$\begin{aligned} Csca &= \frac{k^4 |\alpha|^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{k^4 |\alpha|^2}{6\pi \epsilon_0^2} \quad \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

となる。

5.3 空気中の散乱

空気は窒素、酸素などの多原子分子より成る混合気体であるが、通常これらを総称して空気分子という。Rayleigh 大気における光散乱は、空気の密度のゆらぎによって生じるのであって、個々の空気分子によるものでないため確率論的扱いをすべきであるが、ここでは空気分子が無秩序に運動していて、統計的平均として等方性であるという Lorentz の仮定を満足するとして、Lorentz の局所電界の理論を適用する。Lorentz-Lorenz の法則⁹⁾

$$\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N}{3\epsilon_0} \alpha \quad \dots\dots\dots(20)$$

ただし、 ϵ : 空気の誘電率 (Fm^{-1})

n : 空気の屈折率で $n^2 = \epsilon/\epsilon_0$

N : 単位容積中の空気の分子数 (m^{-3})

α : 一次電界 E_0 によって生じた電気双極子モーメントの平均値を $\bar{P}$ として、 $\bar{P} = \alpha E_0$ と表わされるとき分極率 (Fm^3)

を(19式)に代入して

$$Csca = \frac{9k^4}{6\pi N^2} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 \quad \dots\dots\dots(21)$$

を得る。ここで n は1にきわめて近いことから

$$\left. \begin{aligned} n^2 - 1 &= (n+1)(n-1) \simeq 2(n-1) \\ n^2 + 2 &\simeq 3 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(22)$$

と近似できる。したがって(21式)は

$$Csca = \frac{32\pi^3 (n-1)^2}{3\lambda^4 N^2} \quad \dots\dots\dots(23)$$

と表わされる。

この $Csca$ に N を乗じて得られる

$$\beta = Csca N = \frac{32\pi^3 (n-1)^2}{3\lambda^4 N} (\text{m}^{-1}) \quad \dots\dots\dots(24)$$

を体積散乱係数という。 β は光が単位長の媒質中を透過する際に散乱される全散乱光の総和を表わす係数である。

5.4 偏光の解消

(18式)に(20)、(22式)を適用して次式を得る。

$$I = \frac{I_0}{r^2} \frac{4\pi^2 (n-1)^2}{\lambda^4 N^2} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \quad \dots\dots\dots(25)$$

偏っていない光とは、機能的にいえば光を(エネルギーの吸収なく)二つの完全な偏光に分ける装置にかけたとき、強度の等しい二つの光線(強さを測定するのに十分な時間内に)に分けられる光をいう。

図2において、散乱光が yz 平面にあるとき、散乱光の電気ベクトル E_χ (P と r を含む面内で r に直角な方向) は散乱面(入射光と散乱光を含む平面で、ここでは yz 平面)に垂直に振動している ($\chi = \pi/2$)。これを垂

直偏光という。このときの散乱光の強さ $I_{\perp}(\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1})$ は、(25)式で $\varphi = \pi/2$ として次式によって与えられる。

$$I_{\perp} = \frac{I_0}{r^2} \frac{4\pi^2(n-1)^2}{\lambda^4 N^2} \quad (26)$$

また散乱光が zx 平面にあるとき ($\chi = \pi/2 - \theta$)、 $\mathbf{E}_x$ は散乱面 (zx 平面) に平行に振動している。これを平行偏光という。このときの散乱光の強さを $I_{\parallel}(\text{W}^{-2}\text{sr}^{-1})$ とすれば、(25)式で $\varphi = 0$ として、

$$I_{\parallel} = \frac{I_0}{r^2} \frac{4\pi^2(n-1)^2}{\lambda^4 N^2} (1 - \sin^2 \theta) \quad (27)$$

を得る。したがって入射光が完全な非偏光であれば、散乱光の強さ $I(\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1})$ は次式によって与えられる⁹⁾。

$$I = \frac{I_{\perp} + I_{\parallel}}{2} = \frac{I_0}{r^2} \frac{8\pi^2(n-1)^2}{3\lambda^4 N^2} \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \theta) \quad (28)$$

ここで、 $3/4(1 + \cos^2 \theta)$ の項を Rayleigh の位相関数という⁵⁾。

分割された二つの光の成分 $I_{\perp}$ と $I_{\parallel}$ によって定義される偏光度 P は次式によって表わされる⁹⁾。

$$P = \frac{I_{\perp} - I_{\parallel}}{I_{\perp} + I_{\parallel}} = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \quad (29)$$

すなわち、 $\theta = 90^\circ$ 方向では $P = 1$ で完全に垂直偏光している。しかし実際には、空気のように多原子分子よりなる気体などでは $\theta = 90^\circ$ 方向でも $P = 1$ にならず、完全には偏光していない。このような現象を偏光の解消 (偏りの減少ともいう) という。偏光解消の因子 ρ_n は次式によって与えられる⁵⁾⁹⁾。

$$\rho_n = \left| \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} \right|_{\theta=90^\circ} \quad (30)$$

実際の空気における散乱断面積 $\text{Csc}a(\text{m}^2)$ 、体積散乱の角度分布 $\sigma_{\theta}(\text{m}^2\text{sr}^{-1})$ 、および体積散乱係数 $\beta(\text{m}^{-1})$ はそれぞれ次式によって与えられる⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} \text{Csc}a &= \frac{8\pi^3(n_s^2-1)^2}{3\lambda^4 N_s^2} \frac{6+3\rho_n}{6-7\rho_n} \\ \sigma_{\theta} &= \frac{2\pi^2(n_s^2-1)^2}{3\lambda^4 N_s^2} \frac{6+3\rho_n}{6-7\rho_n} P(\cos \theta) \\ \beta &= \frac{8\pi^3(n_s^2-1)^2}{3\lambda^4 N_s^2} \frac{6+3\rho_n}{6-7\rho_n} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

ただし、 n_s : 標準空気*の屈折率で波長 λ によって値は異なる。

N_s : 標準空気の単位容積中の分子数 (m^{-3})

ここで、 $P(\cos \theta)$ は Rayleigh の位相関数で

$$P(\cos \theta) = 0.7629 (1 + 0.932 \cos^2 \theta) \quad (32)$$

ただし、 θ : 散乱角

と表わされる⁷⁾。なお気温 $t(^{\circ}\text{C})$ における空気の屈折率

* 気圧 760 mmHg (=1013.250 mb), 気温 15°C で 0.03% の CO_2 を含む乾燥した空気⁷⁾。

n は、Lorentz-Lorenz の法則

$$\frac{n_s^2-1}{4\pi N_s} = \frac{n^2-1}{4\pi N} = \text{一定} \quad (33)$$

ただし、

N : t における単位容積中の空気の分子数 (m^{-3})

から求められる⁷⁾。ゆえに $\text{Csc}a$ は t に関係なく一定である。

図 3 波長 $\lambda = 0.40, 0.55 \mu\text{m}$ の体積散乱の角度分布 σ_{θ} 。→印は入射光の進行方向

図 3 に標準空気における波長 $\lambda = 0.40, 0.55 \mu\text{m}$ の σ_{θ} を示す。 $\sigma_{\theta}(\lambda = 0.40)$ と $\sigma_{\theta}(\lambda = 0.55)$ はそれぞれ $3.4244 \times 10^{-7} P(\cos \theta)$ 、 $9.2492 \times 10^{-7} P(\cos \theta)$ である。ただし、偏光解消の項 $(6+3\rho_n)/(6-7\rho_n) = 1.061$ 、 $N_s = 2.54743 \times 10^{25}/\text{m}^3$ 、 $\lambda = 0.40$ の $(n_s^2-1)^2 = 3.1989 \times 10^{-7}$ および $\lambda = 0.55$ の $(n_s^2-1)^2 = 3.0884 \times 10^{-7}$ とする⁷⁾。

6. 大気の光学的厚さ

Rayleigh 大気中の 2 点 s と s' の間の光学的厚さ $\tau(s, s')$ は次式によって表わされる⁷⁾。

$$\tau(s, s') = \int_s^{s'} \beta ds \quad (34)$$

したがって、地上から大気の頂点までの Rayleigh 大気の光学的厚さでは

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^{\infty} \beta dx \\ &= \text{Csc}a \int_0^{\infty} N dx \quad (35) \end{aligned}$$

ただし、 N : 高度 $x(\text{m})$ における空気の分子数 (m^{-3}) と表わされる。

気圧は空気の重さによって生じる。ある高さの気圧はその点より上方にある空気量に比例する。高さ x と $x+4x$ における気圧をそれぞれ P と $P+4P$ とすれば、静力学的には

$$dP = -\rho dx \quad (36)$$

ただし、 ρ : x における空気の密度 (kgm^{-3}) が成り立つ。

一方、気体の状態方程式

$$P = R\rho T \quad (37)$$

ただし、 R : 気体定数

T : 絶対温度 (K)

から (36)式は

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dx}{RT} \quad \dots\dots\dots (38)$$

と表わされる．両辺を積分して

$$\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{1}{R} \int_0^x \frac{dx}{T} \quad \dots\dots\dots (39)$$

となる．ここで T が一定の等温大気とすれば，(39)式は

$$P = P_0 e^{-\frac{x}{RT}} \quad \dots\dots\dots (40)$$

となる．

0℃の等温大気については，(4)式と(37)式から

$$RT = \frac{P_0}{\rho_0} = \frac{h_{Hg} \rho_{Hg}}{\rho_0} = H_0 \quad \dots\dots\dots (41)$$

を得る．(41)式を(40)式に代入すれば

$$P = P_0 e^{-\frac{x}{H_0}} \quad \dots\dots\dots (42)$$

となる．

空気の密度 ρ は空気の分子数 $N(\text{m}^{-3})$ と空気分子の平均質量 $\bar{m}(\text{kg})$ の積である．したがって等温大気においては次式が成り立つ．

$$\frac{P}{\bar{m}N} = \frac{P_0}{\bar{m}N_0} = RT = \text{一定} \quad \dots\dots\dots (43)$$

ただし， $N_0: 760 \text{ mmHg}$ ，0℃における空気の分子数 (m^{-3})．

(43)式を(42)式に代入して

$$N = N_0 e^{-\frac{x}{H_0}} \quad \dots\dots\dots (44)$$

を得る．

(44)式を(35)式に代入すれば， τ は次式によって与えられる．

$$\begin{aligned} \tau &= C \text{sca} \int_0^\infty N_0 e^{-\frac{x}{H_0}} dx \\ &= C \text{sca} N_0 H_0 \\ &= \beta_0 H_0 \quad \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

ただし， $\beta_0: 760 \text{ mmHg}$ ，0℃における空気の体積散乱係数

ここで， $\beta_0 H_0$ は等密大気の光学的厚さである．したがって，等温大気の光学的厚さは等密大気のそれに等しい．

なお，(45)式の τ はエア・マスが1のときの光学的厚さである．エア・マスが m_{gr} のときの光学的厚さは $m_{gr} \tau$ である．

7. 記号の定義

散乱光の評価式に使用する主な記号について説明する．すでに述べた記号についても合わせて示す．図4に

図4 地上の観測点Oを原点とし，天頂方向をZ軸とした球座標における太陽位置 $S:(z, \phi)$ ，観測方向 $M:(\theta, \phi)$ および観測方向に法線をとる受光面D

示すように，地上の観測点Oを原点とする球座標を考え，受光面は観測方向にその法線をとるものとする．

$S:(z, \phi)$ ：太陽位置． z は天頂角で， $0 \leq z < \pi/2$ とする． ϕ は方位角で真南方向を0とする．

$M:(\theta, \phi)$ ：観測方向． θ は天頂角で， $0 \leq \theta < \pi/2$ とする． ϕ は方位角で真南方向を0とする．

$J_0(\lambda)$ ：大気圏外太陽光の分光エネルギー ($\text{W m}^{-2} \mu\text{m}^{-1}$)

H ：大気の高さ (m)

$\sigma_r(\lambda)$ ：体積散乱光の角度分布 ($\text{m}^{-1} \text{sr}^{-1}$)

$\beta(\lambda)$ ：体積散乱係数 (m^{-1})

$f(\cos \gamma)$ ：位相関数で次式によって与えられる．

$$\begin{aligned} f(\cos \gamma) &= \frac{\sigma_r(\lambda)}{\beta(\lambda)} \quad \dots\dots\dots (46) \\ &= C_1 (1 + C_2 \cos^2 \gamma) \end{aligned}$$

ただし， $C_1 = 0.7629/4\pi$

$C_2 = 0.932$

γ ：散乱角

$f(\cos \gamma)$ は γ だけの位相関数である．

λ ：波長 (m)

その他の記号についてはそのつどに説明する．また添字 λ は特にことわらない限り省略して記述する．

8. 一次散乱光の評価

地表面の反射を考慮しない場合の Rayleigh 大気における青空光は，太陽光が空気によって一次，二次，三次と逐次に高次の散乱を受けつつ，指向性を持って伝達していく全散乱光の総和として表わされる．

この節では，観測方向から単位立体角内で観測点へ入射する一次散乱光の法線放射照度 $E_{s1}(\text{Wm}^{-2})$ と，放射輝度 $L_{s1}(\text{Wm}^{-2} \text{sr}^{-1})$ の評価法について述べる．