Rayleigh 大気における四次散乱光までの評価 (2)

正 会 員 関 根 征 士*

Estimation of Each Scattering Light up to the Fourth Order by Rayleigh Atmosphere (2)

Seishi Sekine (Member)

(Faculty of Engineering, Niigata University)

ABSTRACT

The second, the third and the fourth scattering light are estimated and the calculated results are discussed.

The first scattering light is more intense than the second scattering light and the second is more intense than the third. In general the scattering light of the n minus one order is more intense than the n th scattering light.

A logarithmic inversely proportional relationship is very nearly established between the scattering light of the second, the third and the fourth order for spectral energy and luminance except the first order.

Both the error of spectral energy and the error of luminance which are caused by neglecting the scattering light of a higher order than the third order increase according as either the sun's zenith distance z or the zenith distance θ of the observational direction is large and takes a maximum value when a difference between the sun's azimuth ϕ and the azimuth φ of the observational direction is 90 degrees if both z and θ are close to 90 degrees. And further, the shorter the wavelength λ is the more the error of spectral energy increases.

These errors of spectral energy at $\lambda=0.38\ \mu\text{m}$ and luminance may be respectively 4.9%, 0.32% at $z=1^\circ$, $\phi=0^\circ$, $\theta=0^\circ$, $\varphi=0^\circ$ and may be respectively 14.7%, 0.85% at $z=79^\circ$, $\phi=0^\circ$, $\theta=0^\circ$, $\varphi=\pm 90^\circ$.

前号 (第 60 巻 第 8 号) より続く。

9. 高次散乱光の評価

二次以上の高次散乱光の評価式は、一次散乱光の評価法を基本として導かれる。

この節では、二次散乱光と三次散乱光の評価式について述べる。四次散乱光については、その概略について簡単に示す。

9.1 二次散乱光: Es_2

(1) Es_{21} (ただし, $0 \leq \theta_1 < \pi/2$, $z \neq \theta_1$, $z \neq \theta$, $\theta_1 \neq \theta$)

図 6 において, $M_1: (\theta_1, \varphi_1)$ 方向から単位立体角の

範囲で P 点へ入射する一次散乱光の上半球 ($0 \leq \theta_1 < \pi/2$) からの放射照度 $Es_p (\text{Wm}^{-2})$ は, Es_1 の結果を参照して

図 6 二次散乱光の散乱透過の過程

* 新潟大学工学部

次式によって与えられる。

$$Es_p = J_0 \sec \theta_1 \frac{e^{-\beta h \sec z} - e^{-\beta h \sec \theta_1}}{\sec \theta_1 - \sec z} f(\cos \gamma_{21}) \dots\dots\dots (57)$$

したがって、 $M: (\theta, \varphi)$ 方向から単位立体角の範囲で、 O へ入射する二次散乱光の上半球からの法線放射照度 Es_{21} (Wm^{-2}) は、 Es_1 の評価法と同様にして求められる、次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} Es_{21} &= \int_0^{\pi/2} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{H \sec \theta} Es_p \sigma_{r22} e^{-\beta r} dr \\ &= J_0 \sec \theta_1 \int_0^{\pi/2} \frac{\sec \theta_1 \sin \theta_1}{\sec \theta_1 - \sec z} \\ &\quad \times \left(\frac{e^{-\beta H \sec z} - e^{-\beta H \sec \theta}}{\sec \theta - \sec z} - \frac{e^{-\beta H \sec \theta_1} - e^{-\beta H \sec \theta}}{\sec \theta - \sec \theta_1} \right) \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} f(\cos \gamma_{21}) f(\cos \gamma_{22}) d\varphi_1 d\theta_1 \dots\dots\dots (58) \end{aligned}$$

(2) Es_{22} (ただし、 $\pi/2 < \theta_1 \leq \pi$, $z \neq \theta$)

図 6 において、 $M_1: (\theta_1, \varphi_1)$ 方向から単位立体角の範囲で、 P 点へ入射する一次散乱光の下半球 ($\pi/2 < \theta_1 \leq \pi$) からの放射照度 Es_p (Wm^{-2}) は、次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} Es_p &= \int_0^{-(H-h) \sec \theta_1} J_0 e^{-\beta(h-r_1 \cos \theta_1) \sec z} \sigma_{r21} e^{-\beta r_1} dr_1 \\ &= J_0 \sec \theta_1 \frac{e^{-\beta H \sec z} - e^{-\beta(H-h) \sec z} - e^{-\beta(H-h) \sec \theta_1}}{\sec \theta_1 - \sec z} \\ &\quad \times f(\cos \gamma_{21}) \dots\dots\dots (59) \end{aligned}$$

したがって、 $M: (\theta, \varphi)$ 方向から単位立体角の範囲で、 O へ入射する二次散乱光の下半球からの法線放射照度 Es_{22} (Wm^{-2}) は、 Es_1 の場合と同様にして求められる、次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} Es_{22} &= J_0 \sec \theta \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sec \theta_1 \sin \theta_1}{\sec \theta_1 - \sec z} \\ &\quad \left(\frac{e^{-\beta H \sec z} - e^{-\beta H \sec \theta}}{\sec \theta - \sec z} - \frac{e^{-\beta H \sec z} - e^{-\beta H(\sec \theta - \sec \theta_1)}}{\sec \theta - \sec \theta_1} \right) \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} f(\cos \gamma_{21}) f(\cos \gamma_{22}) d\varphi_1 d\theta_1 \dots\dots\dots (60) \end{aligned}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} f(\cos \gamma_{21}) (\equiv \sigma_{r21}/\beta) &= C_1(1 + C_2 \cos^2 \gamma_{21}) \\ f(\cos \gamma_{22}) (\equiv \sigma_{r22}/\beta) &= C_1(1 + C_2 \cos^2 \gamma_{22}) \\ \cos \gamma_{21} &= \cos z \cos \theta_1 + \sin z \sin \theta_1 \cos(\phi - \varphi_1) \\ \cos \gamma_{22} &= \cos \theta_1 \cos \theta + \sin \theta_1 \sin \theta \cos(\varphi_1 - \varphi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (61)$$

したがって、 $M: (\theta, \varphi)$ 方向から単位立体角の範囲で、 O へ入射する二次散乱光の全法線放射照度 Es_2 (Wm^{-2}) は、次式によって与えられる。

$$Es_2 = Es_{21} + Es_{22} \dots\dots\dots (62)$$

9.2 三次散乱光: Es_3

(1) Es_{31} (ただし、 $0 \leq \theta_1 < \pi/2$, $0 \leq \theta_2 < \pi/2$, $z \neq \theta_1$, $z \neq \theta_2$, $z \neq \theta$, $\theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_1 \neq \theta$, $\theta_2 \neq \theta$)

図 7 において、 $M: (\theta, \varphi)$ 方向から単位立体角の範囲で、 O へ入射する一次、二次散乱光とも上半球からの三次散乱光の法線放射照度 Es_{31} (Wm^{-2}) は、一次および二次散乱光の評価法と同様にして求められる、次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} Es_{31} &= J_0 \sec \theta \int_0^{\pi/2} \sec \theta_2 \sin \theta_2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sec \theta_1 \sin \theta_1}{\sec \theta_1 - \sec z} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\sec \theta_2 - \sec z} \left(\frac{e^{-\beta H \sec z} - e^{-\beta H \sec \theta}}{\sec \theta - \sec z} - \frac{e^{-\beta H \sec \theta_2} - e^{-\beta H \sec \theta}}{\sec \theta - \sec \theta_2} \right) - \frac{1}{\sec \theta_2 - \sec \theta_1} \right. \\ &\quad \times \left(\frac{e^{-\beta H \sec \theta_1} - e^{-\beta H \sec \theta}}{\sec \theta - \sec \theta_1} - \frac{e^{-\beta H \sec \theta_2} - e^{-\beta H \sec \theta}}{\sec \theta - \sec \theta_2} \right) \Big] \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos \gamma_{31}) f(\cos \gamma_{32}) \\ &\quad \times f(\cos \gamma_{33}) d\varphi_1 d\varphi_2 d\theta_1 d\theta_2 \dots\dots\dots (63) \end{aligned}$$

図 7 三次散乱光の散乱透過の過程

(2) Es_{32} (ただし、 $\pi/2 < \theta_1 \leq \pi$, $0 \leq \theta_2 < \pi/2$, $z \neq \theta_2$, $z \neq \theta$, $\theta_2 \neq \theta$)

図 7 において、 $M: (\theta, \varphi)$ 方向から単位立体角の範囲で O へ入射する一次散乱光は下半球から、二次散乱光は上半球からの三次散乱光の法線放射照度 Es_{32} (Wm^{-2}) は次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} Es_{32} &= J_0 \sec \theta \int_0^{\pi/2} \sec \theta_2 \sin \theta_2 \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sec \theta_1 \sin \theta_1}{\sec \theta_1 - \sec z} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\sec \theta_2 - \sec z} \left(\frac{e^{-\beta H \sec z} - e^{-\beta H \sec \theta}}{\sec \theta - \sec z} - \frac{e^{-\beta H \sec \theta_2} - e^{-\beta H \sec \theta}}{\sec \theta - \sec \theta_2} \right) - \frac{e^{-\beta H \sec z}}{\sec \theta_2 - \sec \theta_1} \right. \\ &\quad \times \left(\frac{1 - e^{-\beta H(\sec \theta - \sec \theta_1)}}{\sec \theta - \sec \theta_1} - \frac{e^{-\beta H \sec \theta_1}}{\sec \theta - \sec \theta_2} \right) \Big] \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos \gamma_{31}) f(\cos \gamma_{32}) f(\cos \gamma_{33}) \end{aligned}$$

$$\times d\varphi_1 d\varphi_2 d\theta_1 d\theta_2 \dots\dots\dots (64)$$

- (3) Es_{33} (ただし, $0 \leq \theta_1 < \pi/2$, $\pi/2 < \theta_2 \leq \pi$, $z \neq \theta_1$, $z \neq \theta_2$, $\theta_1 \neq \theta_2$)

図7において, $M: (\theta, \varphi)$ 方向から単位立体角の範囲でOへ入射する一次散乱光は上半球から, 二次散乱光は下半球からの三次散乱光の法線放射照度 $Es_{33}(\text{Wm}^{-2})$ は次式によって与えられる.

$$\begin{aligned} Es_{33} = & J_0 \sec\theta \int_{\pi/2}^{\pi} \sec\theta_2 \sin\theta_2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sec\theta_1 \sin\theta_1}{\sec\theta_1 - \sec z} \\ & \times \left[\frac{1}{\sec\theta_2 - \sec z} \left(\frac{e^{-\beta H \sec z} - e^{-\beta H \sec \theta}}{\sec\theta - \sec z} \right. \right. \\ & \left. \left. - e^{-\beta H \sec z} \frac{1 - e^{-\beta H(\sec\theta - \sec\theta_2)}}{\sec\theta - \sec\theta_2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sec\theta_2 - \sec\theta_1} \left(\frac{e^{-\beta H \sec \theta_1} - e^{-\beta H \sec \theta}}{\sec\theta - \sec\theta_1} \right. \right. \\ & \left. \left. - e^{-\beta H \sec \theta_1} \frac{1 - e^{-\beta H(\sec\theta - \sec\theta_2)}}{\sec\theta - \sec\theta_2} \right) \right] \\ & \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos\gamma_{31}) f(\cos\gamma_{32}) f(\cos\gamma_{33}) \\ & \times d\varphi_1 d\varphi_2 d\theta_1 d\theta_2 \dots\dots\dots (65) \end{aligned}$$

- (4) Es_{34} (ただし, $\pi/2 < \theta_1 \leq \pi$, $\pi/2 < \theta_2 \leq \pi$, $z \neq \theta_2$, $\theta_1 \neq \theta_2$)

図7において, $M: (\theta, \varphi)$ 方向から単位立体角の範囲でOへ入射する一次, 二次散乱光とも下半球からの三次散乱光の法線放射照度 $Es_{34}(\text{Wm}^{-2})$ は, 次式によって与えられる.

$$\begin{aligned} Es_{34} = & J_0 \sec\theta \int_{\pi/2}^{\pi} \sec\theta_2 \sin\theta_2 \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sec\theta_1 \sin\theta_1}{\sec\theta_1 - \sec z} \\ & \times \left[\frac{1}{\sec\theta_2 - \sec z} \left(\frac{e^{-\beta H \sec z} - e^{-\beta H \sec \theta}}{\sec\theta - \sec z} \right. \right. \\ & \left. \left. - e^{-\beta H \sec z} \frac{1 - e^{-\beta H(\sec\theta - \sec\theta_2)}}{\sec\theta - \sec\theta_2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{e^{-\beta H \sec z}}{\sec\theta_2 - \sec\theta_1} \left(\frac{1 - e^{-\beta H(\sec\theta - \sec\theta_1)}}{\sec\theta - \sec\theta_1} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1 - e^{-\beta H(\sec\theta - \sec\theta_2)}}{\sec\theta - \sec\theta_2} \right) \right] \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos\gamma_{31}) \\ & \times f(\cos\gamma_{32}) f(\cos\gamma_{33}) d\varphi_1 d\varphi_2 d\theta_1 d\theta_2 \dots\dots\dots (66) \end{aligned}$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} f(\cos\gamma_{31}) & (\equiv \sigma_{\gamma_{31}}/\beta) = C_1(1 + C_2 \cos^2\gamma_{31}) \\ f(\cos\gamma_{32}) & (\equiv \sigma_{\gamma_{32}}/\beta) = C_1(1 + C_2 \cos^2\gamma_{32}) \\ f(\cos\gamma_{33}) & (\equiv \sigma_{\gamma_{33}}/\beta) = C_1(1 + C_2 \cos^2\gamma_{33}) \\ \cos\gamma_{31} & = \cos z \cos\theta_1 + \sin z \sin\theta_1 \cos(\phi - \varphi_1) \\ \cos\gamma_{32} & = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \cos\gamma_{33} & = \cos\theta_2 \cos\theta + \sin\theta_2 \sin\theta \cos(\varphi_2 - \varphi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (67)$$

したがって, $M: (\theta, \varphi)$ 方向から単位立体角の範囲で, Oへ入射する三次散乱光の全法線放射照度 $Es_3(\text{Wm}^{-2})$ は次式によって与えられる.

$$Es_3 = Es_{31} + Es_{32} + Es_{33} + Es_{34} \dots\dots\dots (68)$$

9.3 四次散乱光: Es_4

図8は四次散乱光の散乱透過の過程を示している.

図8 四次散乱光の散乱透過の過程

$M: (\theta, \varphi)$ 方向から単位立体角の範囲で, Oへ入射する四次散乱光の全法線放射照度 $Es_4(\text{Wm}^{-2})$ は, 次式によって与えられる.

$$Es_4 = \sum_{j=1}^8 Es_{4j}; (j=1, 2, \dots, 8) \dots\dots\dots (69)$$

ここで, $Es_{4j}(\text{Wm}^{-2})$ は, それぞれ表2に示す各条件において, $M: (\theta, \varphi)$ 方向から単位立体角の範囲でOへ入射する四次散乱光の法線放射照度である.

表2 各四次散乱光 $Es_{41}, \dots, Es_{48}$ の散乱条件

	θ_1	θ_2	θ_3		θ_1	θ_2	θ_3
Es_{41}	↗	↗	↗	Es_{45}	↗	↗	↘
Es_{42}	↘	↗	↗	Es_{46}	↘	↗	↘
Es_{43}	↗	↘	↗	Es_{47}	↗	↘	↘
Es_{44}	↘	↘	↗	Es_{48}	↘	↘	↘

注 ↗印は $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \pi/2$ を, ↘印は $\pi/2 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 \leq \pi$ を意味する.

表2において, ↗印は $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \pi/2$ を, ↘印は $\pi/2 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 \leq \pi$ を意味する.

Es_{4j} の各散乱式は一次, 二次, 三次の散乱式と同様の評価法から求められる.

10. 位相関数の簡略化

各散乱式の位相関数は, 次のように定義される関数を用いて簡略化される.

$$\left. \begin{aligned} P_1(u, v) & = 1 + C_2 \cos^2 u \cos^2 v \\ P_2(u, v) & = 2C_2 \cos u \cos v \sin u \sin v \\ P_3(u, v) & = C_2 \sin^2 u \sin^2 v \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (70)$$

および

$$F_c(u, v) = 2P_1(u, v) + P_3(u, v) \dots\dots\dots (71)$$

ただし, u, v は独立変数で, $0 \leq u, v \leq \pi$ である.

これらの関数を用いて, 各次散乱光の位相関数はそれぞれ次のように表わされる.

(1) 一次散乱光の位相関数: PF_1

$$\left. \begin{aligned} F_{11} &= \frac{1}{2} F_c(z, \theta) \\ F_{12} &= \cos(\phi - \varphi) P_2(z, \theta) \\ F_{13} &= \frac{1}{2} [2\cos^2(\phi - \varphi) - 1] P_3(z, \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots [72]$$

として, PF_1 は次式によって与えられる.

$$\begin{aligned} PF_1 &= f(\cos \gamma_1) \\ &= C_1 [1 + C_2 \cos^2 \gamma_1] \\ &= C_1 [1 + C_2 \cos^2 z \cos^2 \theta \\ &\quad + 2C_2 \cos z \cos \theta \sin z \sin \theta \cos(\phi - \varphi) \\ &\quad + C_2 \sin^2 z \sin^2 \theta \cos^2(\phi - \varphi)] \\ &= C_1 \left[\frac{1}{2} \{2(1 + C_2 \cos^2 z \cos^2 \theta) + C_2 \sin^2 z \sin^2 \theta\} \right. \\ &\quad + \cos(\phi - \varphi) \cdot 2C_2 \cos z \cos \theta \sin z \sin \theta \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \{2\cos^2(\phi - \varphi) - 1\} C_2 \sin^2 z \sin^2 \theta \right] \\ &= C_1 \left[\frac{1}{2} \{2P_1(z, \theta) + P_3(z, \theta)\} \right. \\ &\quad + \cos(\phi - \varphi) P_2(z, \theta) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \{2\cos^2(\phi - \varphi) - 1\} P_3(z, \theta) \right] \\ &= C_1 [F_{11} + F_{12} + F_{13}] \dots\dots\dots [73] \end{aligned}$$

(2) 二次散乱光の位相関数: $PF_2(\theta_1)$

$$\left. \begin{aligned} F_{21}(\theta_1) &= \frac{1}{2} F_c(z, \theta_1) F_c(\theta_1, \theta) \\ F_{22}(\theta_1) &= \cos(\phi - \varphi) P_2(z, \theta_1) P_2(\theta_1, \theta) \\ F_{23}(\theta_1) &= \frac{1}{4} [2\cos^2(\phi - \varphi)] P_3(z, \theta_1) P_3(\theta_1, \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots [74]$$

として, $PF_2(\theta_1)$ は次式によって与えられる.

$$\begin{aligned} PF_2(\theta_1) &= \int_0^{2\pi} f(\cos \gamma_{21}) f(\cos \gamma_{22}) d\varphi_1 \\ &= \pi C_1^2 [F_{21}(\theta_1) + F_{22}(\theta_1) + F_{23}(\theta_1)] \dots\dots\dots [75] \end{aligned}$$

(3) 三次散乱光の位相関数: $PF_3(\theta_1, \theta_2)$

$$\left. \begin{aligned} F_{31}(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{2} F_c(z, \theta_1) F_c(\theta_1, \theta_2) F_c(\theta_2, \theta) \\ F_{32}(\theta_1, \theta_2) &= \cos(\phi - \varphi) P_2(z, \theta_1) P_2(\theta_1, \theta_2) \\ &\quad \times P_2(\theta_2, \theta) \\ F_{33}(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{8} [2\cos^2(\phi - \varphi) - 1] P_3(z, \theta_1) \\ &\quad \times P_3(\theta_1, \theta_2) P_3(\theta_2, \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots [76]$$

として, $PF_3(\theta_1, \theta_2)$ は次式によって与えられる.

$$\begin{aligned} PF_3(\theta_1, \theta_2) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos \gamma_{31}) f(\cos \gamma_{32}) f(\cos \gamma_{33}) \\ &\quad \times d\varphi_1 d\varphi_2 = \pi^2 C_1^3 [F_{31}(\theta_1, \theta_2) + F_{32}(\theta_1, \theta_2) \\ &\quad + F_{33}(\theta_1, \theta_2)] \dots\dots\dots [77] \end{aligned}$$

(4) 四次散乱光の位相関数: $PF_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$

$$\left. \begin{aligned} F_{41}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \frac{1}{2} F_c(z, \theta_1) F_c(\theta_1, \theta_2) \\ &\quad \times F_c(\theta_2, \theta_3) F_c(\theta_3, \theta) \\ F_{42}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \cos(\phi - \varphi) P_2(z, \theta_1) P_2(\theta_1, \theta_2) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &\times P_2(\theta_2, \theta_3) P_2(\theta_3, \theta) \\ F_{43}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \frac{1}{16} [2\cos^2(\phi - \varphi) - 1] P_3(z, \theta_1) \\ &\quad \times P_3(\theta_1, \theta_2) P_3(\theta_2, \theta_3) P_3(\theta_3, \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots [78]$$

として, $PF_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ は次式によって与えられる.

$$\begin{aligned} PF_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos \gamma_{41}) f(\cos \gamma_{42}) \\ &\quad \times f(\cos \gamma_{43}) f(\cos \gamma_{44}) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ &= \pi^3 C_1^4 [F_{41}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) + F_{42}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ &\quad + F_{43}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)] \dots\dots\dots [79] \end{aligned}$$

11. 散乱式の関数表示

$Es_1, Es_{21}, Es_{22}, Es_{31} \sim Es_{34}$ の各散乱式は, 比較すると互いに類似であり, 次の二つの型の数式から構成されている.

$$\left. \begin{aligned} &\frac{e^{-\beta H \sec u} - e^{-\beta H \sec \theta}}{\sec \theta - \sec u} \quad (0 \leq u < \pi/2) \\ &\frac{1 - e^{-\beta H (\sec \theta - \sec u)}}{\sec \theta - \cos u} \quad (\pi/2 < u \leq \pi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots [80]$$

このような場合, 共通な数式を関数表示することは各散乱式を簡潔にし, 比較検討したり, 計算機を使用する際にむだのないプログラミングをする上で有効である.

11.1 関数の定義

(1) 一般式

独立変数 u, v, w を用いて次のような関数を定義する (ただし, $0 \leq u, v, w < \pi/2, \pi/2 < u, v, w \leq \pi, u \neq \theta, u \neq v$)

(a) 80式を次のように関数表示する.

$$\left. \begin{aligned} G_1(u) &= [e^{-\beta H \sec u} - e^{-\beta H \sec \theta}] \\ &\quad / (\sec \theta - \sec u) \\ G_2(u) &= [1 - e^{-\beta H (\sec \theta - \sec u)}] \\ &\quad / (\sec \theta - \cos u) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots [81]$$

(b) 81式を用いて次の関数を定義する.

$$\left. \begin{aligned} H_{11}(u, v) &= [G_1(u) - G_1(v)] / (\sec v - \sec u) \\ H_{12}(u, v) &= [G_1(u) - e^{-\beta H \sec u} G_2(v)] \\ &\quad / (\sec v - \sec u) \\ H_{21}(u, v) &= [G_2(u) - e^{-\beta H \sec u} G_1(v)] \\ &\quad / (\sec v - \sec u) \\ H_{22}(u, v) &= [G_2(u) - G_2(v)] / (\sec v - \sec u) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots [82]$$

(c) 82式を用いて次の関数を定義する.

$$\left. \begin{aligned} Q_{11}(u, v, w) &= [H_{11}(u, w) - H_{11}(v, w)] \\ &\quad / (\sec v - \sec u) \\ Q_{31}(u, v, w) &= [H_{11}(u, w) - e^{-\beta H \sec u} H_{21}(v, w)] \\ &\quad / (\sec v - \sec u) \\ Q_{31}(u, v, w) &= [H_{12}(u, w) - H_{12}(v, w)] \\ &\quad / (\sec v - \sec u) \\ Q_{71}(u, v, w) &= [H_{12}(u, w) - e^{-\beta H \sec u} H_{22}(v, w)] \\ &\quad / (\sec v - \sec u) \\ Q_{22}(u, v, w) &= [H_{21}(u, w) - e^{-\beta H \sec u} H_{11}(v, w)] \\ &\quad / (\sec v - \sec u) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots [83]$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{42}(u, v, w) &= [H_{21}(u, w) - H_{21}(v, w)] \\ &\quad / (\sec v - \sec u) \\ Q_{62}(u, v, w) &= [H_{22}(u, w) - e^{\beta H \sec u} H_{12}(v, w)] \\ &\quad / (\sec v - \sec u) \\ Q_{82}(u, v, w) &= [H_{22}(u, w) - H_{22}(v, w)] \\ &\quad / (\sec v - \sec u) \end{aligned} \right\}$$

(d) 次の関数を定義する.

$$\left. \begin{aligned} S_2(u) &= \sec \theta \sec u \sin u \\ S_3(u, v) &= \sec \theta \sec v \sin v \sec u \sin u \\ S_4(u, v, w) &= \sec \theta \sec w \sin w \sec v \sin v \sec u \\ &\quad \times \sin u \end{aligned} \right\} \dots [84]$$

(2) 特 異 式

(a) $G_1(u)$ について $u = \theta$ の場合

$$G_1(u)_{u=\theta} = G_1^*(u) = \beta H e^{-\beta H \sec u} \dots [85]$$

(b) $H_{11}(u, v)$, $H_{22}(u, v)$ について(c) $u = v$, $u \neq \theta$ の場合

$$\left. \begin{aligned} H_{11}(u, u) &\equiv H_{11}^*(u) \\ &= [G_1^*(u) - G_1(u)] / (\sec \theta - \sec u) \\ H_{22}(u, u) &\equiv H_{22}^*(u) \\ &= [G_2(u) - e^{-\beta H \sec \theta} G_1^*(u)] \\ &\quad / (\sec \theta - \sec u) \end{aligned} \right\} \dots [86]$$

(d) $u = v = \theta$ の場合

$$\begin{aligned} H_{11}(u, u)_{u=\theta} &\equiv H_{11}^{**} \\ &= \frac{1}{2} (\beta H)^2 e^{-\beta H \sec \theta} \dots [87] \end{aligned}$$

(e) $Q_{11}(u, v, w)$, $Q_{51}(u, v, w)$, $Q_{42}(u, v, w)$, $Q_{82}(u, v, w)$ について(f) $u = v$, $u \neq w$, $u \neq \theta$ の場合

$$\left. \begin{aligned} Q_{11}(u, u, w) &= [H_{11}^*(u) - H_{11}(u, w)] \\ &\quad / (\sec w - \sec u) \\ Q_{51}(u, u, w) &= [H_{11}^*(u) - G_1^*(u) G_2(w) \\ &\quad + H_{12}(u, w)] / (\sec w - \sec u) \\ Q_{42}(u, u, w) &= [H_{22}^*(u) - G_1^*(u) G_1(w) \\ &\quad + H_{21}(u, w)] / (\sec w - \sec u) \\ Q_{82}(u, u, w) &= [H_{22}^*(u) - H_{22}(u, w)] \\ &\quad / (\sec w - \sec u) \end{aligned} \right\} \dots [88]$$

(g) $u = v = w$, $u \neq \theta$ の場合

$$\left. \begin{aligned} Q_{11}(u, u, u) &= [H_{11}^{**} - H_{11}^*(u)] \\ &\quad / (\sec \theta - \sec u) \\ Q_{82}(u, u, u) &= [H_{22}^*(u) - e^{-\beta H \sec \theta} H_{11}^*(u)] \\ &\quad / (\sec \theta - \sec u) \end{aligned} \right\} \dots [89]$$

(h) $u = v = \theta$, $u \neq w$ の場合

$$\left. \begin{aligned} Q_{11}(u, u, u)_{u=\theta} &= [H_{11}^{**} - \{G_1^*(u) - G_1(w)\}] \\ &\quad / (\sec w - \sec u) \\ Q_{51}(u, u, u)_{u=\theta} &= [H_{11}^{**} - G_1^*(u) G_2(w) \\ &\quad + \{G_1^*(u) - e^{-\beta H \sec \theta} \\ &\quad \times G_2(w)\} / (\sec w - \sec u)] \\ &\quad / (\sec w - \sec u) \end{aligned} \right\} \dots [91]$$

(i) $u = v = w = \theta$ の場合

$$Q_{11}(u, u, u)_{u=\theta} = \frac{1}{6} (\beta H)^3 e^{-\beta H \sec \theta} \dots [91]$$

11.2 散 乱 式

(1) 一般式 (ただし, $z \neq \theta_1$, $z \neq \theta_2$, $z \neq \theta_3$, $z \neq \theta$, $\theta_1 \neq \pi/2$, $\theta_2 \neq \pi/2$, $\theta_3 \neq \pi/2$)

各散乱式の一般式は, 上記の関数を用いて次のように表わされる.

$$\begin{aligned} Es_1 &= J_0 \sec \theta G_1(z) PF_1 \\ Es_{21} &= J_0 \int_0^{\pi/2} S_2(\theta_1) H_{11}(z, \theta_1) PF(\theta_1) d\theta_1 \\ Es_{22} &= J_0 \int_{\pi/2}^{\pi} S_2(\theta_1) H_{12}(z, \theta_1) PF(\theta_1) d\theta_1 \\ Es_{31} &= J_0 \int_0^{\pi/2} d\theta_2 \int_0^{\pi/2} S_3(\theta_1, \theta_2) Q_{11}(z, \theta_1, \theta_2) \\ &\quad \times PF_3(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 \\ Es_{32} &= J_0 \int_0^{\pi/2} d\theta_2 \int_{\pi/2}^{\pi} S_3(\theta_1, \theta_2) Q_{31}(z, \theta_1, \theta_2) \\ &\quad \times PF_3(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 \\ Es_{33} &= J_0 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_2 \int_0^{\pi/2} S_3(\theta_1, \theta_2) Q_{51}(z, \theta_1, \theta_2) \\ &\quad \times PF_3(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 \\ Es_{34} &= J_0 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_2 \int_{\pi/2}^{\pi} S_3(\theta_1, \theta_2) Q_{71}(z, \theta_1, \theta_2) \\ &\quad \times PF_3(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 \\ Es_{41} &= J_0 \int_0^{\pi/2} d\theta_3 \int_0^{\pi/2} d\theta_2 \int_0^{\pi/2} [S_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ &\quad / (\sec \theta_1 - \sec z)] [Q_{11}(z, \theta_2, \theta_3) \\ &\quad - Q_{11}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)] PF_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) d\theta_1 \\ Es_{42} &= J_0 \int_0^{\pi/2} d\theta_3 \int_0^{\pi/2} d\theta_2 \int_{\pi/2}^{\pi} [S_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ &\quad / (\sec \theta_1 - \sec z)] [Q_{11}(z, \theta_2, \theta_3) \\ &\quad - e^{-\beta H \sec z} Q_{22}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)] \\ &\quad \times PF_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) d\theta_1 \\ Es_{43} &= J_0 \int_0^{\pi/2} d\theta_3 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_2 \int_0^{\pi/2} [S_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ &\quad / (\sec \theta_1 - \sec z)] [Q_{31}(z, \theta_2, \theta_3) \\ &\quad - Q_{31}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)] PF_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) d\theta_1 \\ Es_{44} &= J_0 \int_0^{\pi/2} d\theta_3 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_2 \int_{\pi/2}^{\pi} [S_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ &\quad / (\sec \theta_1 - \sec z)] [Q_{51}(z, \theta_2, \theta_3) \\ &\quad - e^{-\beta H \sec z} Q_{42}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)] \\ &\quad \times PF_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) d\theta_1 \\ Es_{45} &= J_0 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_3 \int_0^{\pi/2} d\theta_2 \int_0^{\pi/2} [S_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ &\quad / (\sec \theta_1 - \sec z)] [Q_{51}(z, \theta_2, \theta_3) \\ &\quad - Q_{51}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)] PF_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) d\theta_1 \\ Es_{46} &= J_0 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_3 \int_0^{\pi/2} d\theta_2 \int_{\pi/2}^{\pi} [S_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ &\quad / (\sec \theta_1 - \sec z)] [Q_{51}(z, \theta_1, \theta_3) \\ &\quad - e^{-\beta H \sec z} Q_{82}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)] \\ &\quad \times PF_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) d\theta_1 \\ Es_{47} &= J_0 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_3 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_2 \int_0^{\pi/2} [S_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \end{aligned} \dots [92]$$

$$\begin{aligned}
 & /(\sec\theta_1 - \sec\theta_2) [Q_{71}(z, \theta_2, \theta_3) \\
 & - Q_{71}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)] PF_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) d\theta_1 \\
 E_{s48} = & \int_0^\pi \int_{\pi/2}^\pi d\theta_3 \int_{\pi/2}^\pi d\theta_2 \int_{\pi/2}^\pi [S_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\
 & /(\sec\theta_1 - \sec\theta_2) \times [Q_{71}(z, \theta_2, \theta_3) \\
 & - e^{-\beta H \sec\theta_2} Q_{82}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)] \\
 & \times PF_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) d\theta_1
 \end{aligned}$$

(2) 特異式 (付録参照)

12. 計算結果の検討

(1) 散乱透過関数の特性

具体的計算に際して使用した大気圏外太陽光の分光エネルギー $J_0(\lambda)(\text{Wm}^{-2}\mu\text{m}^{-1})^{10)}$ と、気温 0°C の等温純粋大気の光学的厚さ $\tau(\lambda)^{11)}$ を表 3 に示す。

表 3 大気圏外太陽光の分光エネルギー $J_0(\lambda)^{10)}$ と、気温 0°C の等温純粋大気の光学的厚さ $\tau(\lambda)^{11)}$

波長 λ (μm)	$J_0(\lambda)$ ($\text{Wm}^{-2}\mu\text{m}^{-1}$)	$\tau(\lambda)$	波長 λ (μm)	$J_0(\lambda)$ ($\text{Wm}^{-2}\mu\text{m}^{-1}$)	$\tau(\lambda)$
0.38	1.120	0.4494	0.57	1.712	0.08477
0.39	1.098	0.4033	0.58	1.715	0.07897
0.40	1.429	0.3630	0.59	1.700	0.07367
0.41	1.751	0.3277	0.60	1.666	0.06880
0.42	1.747	0.2966	0.61	1.635	0.06433
0.43	1.639	0.2691	0.62	1.602	0.06022
0.44	1.810	0.2447	0.63	1.570	0.05643
0.45	2.006	0.2231	0.64	1.544	0.05294
0.46	2.066	0.2038	0.65	1.511	0.04971
0.47	2.033	0.1865	0.66	1.486	0.04673
0.48	2.074	0.1711	0.67	1.456	0.04397
0.49	1.950	0.1572	0.68	1.527	0.04141
0.50	1.942	0.1447	0.69	1.402	0.03903
0.51	1.882	0.1335	0.70	1.369	0.03682
0.52	1.833	0.1233	0.71	1.344	0.03477
0.53	1.842	0.1140	0.72	1.314	0.03286
0.54	1.783	0.1057	0.73	1.290	0.03107
0.55	1.725	0.09805	0.74	1.260	0.02941
0.56	1.695	0.09110	0.75	1.235	0.02786

各次散乱光の法線放射照度 $E_{si}(\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1})$ は、散乱式から

$$E_{si} = J_0 \cdot ST_i(\tau, z, \phi, \theta, \varphi); (i=1, 2, 3, 4) \dots\dots(93)$$

と表わすことができる。この $ST_i(\text{sr}^{-1})$ を散乱透過関数と名づける。したがって、各次散乱光の分光エネルギー $E_{si}(\lambda)(\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}\mu\text{m}^{-1})$ は次式によって与えられる。

$$\begin{aligned}
 E_{si}(\lambda) = & J_0(\lambda) ST_i(\lambda); (i=1, 2, 3, 4) \\
 \text{ただし、} & ST_i(\lambda) \equiv ST_i(\tau(\lambda), z, \phi, \theta, \varphi)(\text{sr}^{-1}) \dots\dots(94)
 \end{aligned}$$

図 9 は

- (a) $S: (1^\circ, 0^\circ), M: (0^\circ, 0^\circ)$
- (b) $S: (1^\circ, 0^\circ), M: (80^\circ, 180^\circ)$
- (c) $S: (79^\circ, 0^\circ), M: (0^\circ, 0^\circ)$
- (d) $S: (79^\circ, 0^\circ), M: (80^\circ, 180^\circ)$

のそれぞれの場合について、 $ST_i(\lambda)$ の波長特性を示している。いずれの場合も、 $ST_i(\lambda)$ は高次散乱光ほど値が小さくかつ長波長に対する短波長の割合が大きい。ま

図 9 散乱透過関数 $ST_1(\lambda), ST_2(\lambda), ST_3(\lambda)$ および $ST_4(\lambda)$ の波長特性

た(b)の $ST_1(\lambda)$, (d)の $ST_1(\lambda), ST_2(\lambda)$ については、波長域 $0.38 \sim 0.75 \mu\text{m}$ の間にその最大値を有する「最大波長」が存在する。これらの特性は次の理由から説明される。

Rayleigh 大気において、強さ $I_0(\lambda)(\text{Wm}^{-2}\mu\text{m}^{-1})$ の光が距離 $x(\text{m})$ を透過したときの強さ $I(\lambda)(\text{Wm}^{-2}\mu\text{m}^{-1})$ は(7), (24)式から次式によって表わされる。

$$I(\lambda) = I_0(\lambda) e^{-\frac{k_2}{\lambda^4} x} \dots\dots(95)$$

ただし、 k_2/λ^4 : 体積散乱光係数で k_2 は定数
この $I(\lambda)$ による散乱光の強さ $I_s(\lambda)(\text{Wm}^{-1}\text{sr}^{-1})$ は

$$I_s(\alpha) = I_0(\lambda) \frac{k_1}{\lambda^4} v e^{-\frac{k_2}{\lambda^4} x} \dots\dots(96)$$

ただし、 k_1/λ^4 : 体積散乱光の角度分布で k_1 は定数
 v : 散乱体の体積 (m^3)

である。仮りに $I_0(\lambda)$ が波長 λ に依存しないとすれば、最も強い散乱光は $\partial I_s(\lambda)/\partial \lambda = 0$ を満足する波長をもつ。したがってこのときの波長を $\lambda_{\max}^4$ とすれば、

$$\frac{\partial I_s(\lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{4k_1}{\lambda^5} v e^{-\frac{k_2}{\lambda^4} x} \left(1 - \frac{k_2}{\lambda^4} x\right) \dots\dots(97)$$

より

$$\lambda_{\max}^4 = k_2 x \quad \dots\dots\dots (98)$$

を得る。(95), (96)式は, 大気中を透過する光が λ^{-4} に対応した散乱を受けて消散するため, 短波長ほど減衰が大きく, また透過距離 x が長いほど減衰が大きくなることを示している. 換言すれば, 透過中に散乱される光の強さは λ^{-4} に対応して短波長ほど強く, x が長いほど空中に散乱される光量が多いため, 全散乱光の総和に対する高次散乱光の占める割合が大きくなることを意味する. さらに(96)式は, 散乱がくり返されるたびに, つまり高次散乱光ほど弱く ($k_1/\lambda^4 \ll 1$ であるため) なるが, 長波長に対する短波長の割合は大きくなることを示している. (98)式は最大波長が透過距離とともに増すことを示している.

図 10 波長 $\lambda = 0.40, 0.45$ および $0.50 \mu\text{m}$ における散乱次数に対する散乱透過関数 $ST_i(\lambda)$ ($i=1, 2, 3, 4$) の特性. 実線は $M: (0^\circ, 0^\circ)$, 破線は $M: (80^\circ, 180^\circ)$ の場合を示している.

図 10 は, 各散乱次数に対する散乱透過関数 $ST_i(\lambda)$ の波長特性を $0.40, 0.45, 0.50 \mu\text{m}$ の各波長について示している. (a)は $S: (1^\circ, 0^\circ)$, (b)は $S: (79^\circ, 0^\circ)$ の場合である. 図中, 実線は $M: (0^\circ, 0^\circ)$, 破線は $M: (80^\circ, 180^\circ)$ の場合を示している.

$ST_1(\lambda)$ を除外して, $ST_2(\lambda)$, $ST_3(\lambda)$ および $ST_4(\lambda)$ の対数値の間では, いかなる太陽位置 S と観測方向 M においても, すべての波長に対して十分な逆比例関係が成立する.

図 9, 図10から, 太陽の天頂角 z が小さいほど, つまり太陽高度が高いほど, 観測点に達する散乱光の強さの観測方向に対する依存度は, 太陽高度が低い場合に比べて小さいことが理解される.

図 11 は, 各散乱次数に対する観測方向別の輝度特性を (a) $S: (1^\circ, 0^\circ)$, (b) $S: (79^\circ, 0^\circ)$ の場合について示

図 11 散乱次数に対する輝度特性

している. 一次散乱光を除いて二次, 三次および四次の各散乱光の輝度の対数値の間には, いかなる太陽位置 S と観測方向 M においても, 十分な逆比例関係が成立する. (a)と(b)を比較すると, Rayleigh 大気における青空光の太陽位置の変化に対する輝度の変動は, 一次散乱光によって支配され, 二次以上の高次散乱光に対する依存度は小さいことが理解される.

12.2 四次以上の高次散乱光を無視することによって生じる誤差

(1) 分光エネルギーについての誤差

図 12 は

(a) $S: (1^\circ, 0^\circ)$, $M: (0^\circ, 0^\circ)$

(b) $S: (79^\circ, 0^\circ)$, $M: (80^\circ, 180^\circ)$

の場合について, 観測点に達する波長別の四次散乱光までの合計エネルギーに対する各次散乱光のエネルギーの割合

$$k_i(\lambda) = \frac{Es_i(\lambda)}{\sum_{i=1}^4 Es_i(\lambda)} \times 100(\%); \quad (i=1, 2, 3, 4) \dots\dots\dots (99)$$

図 12 四次散乱光までの合計エネルギーに対する各次散乱光のエネルギーの割合 $k_1(\lambda)$, $k_2(\lambda)$, $k_3(\lambda)$ および $k_4(\lambda)$ の波長特性

を示している。 $k_1(\lambda)$ は波長が長くなるほど $k_2(\lambda)$, $k_3(\lambda)$ および $k_4(\lambda)$ は逆に波長が短くなるほど、その値が大きくなる。

さらに、 $k_2(\lambda)$, $k_3(\lambda)$ および $k_4(\lambda)$ は太陽の天頂角 z と観測方向の天頂角 θ のいずれが大きくなっても増加し、 z および θ がともに 90° (地平線方向) に近い場合には、太陽の方位角 ϕ と、観測方向の方位角 φ との差 $|\phi - \varphi|$ が 90° のとき最大となる。なぜなら、12.1 節で述べたように、 z が大きくなれば太陽光の大気中の透過距離が長くなるため、空中へ波長の 4 乗に逆比例して散乱される光量が多くなり、観測点へ達する散乱光は高次散乱光の割合が増加するからである。また θ が大きくなれば、観測点に達する散乱光の透過距離が長くなって、最大波長が低次散乱光ほど長波長域へ移行するため (図 9 を参照)、短波長域では、高次散乱光の割合が相対的に増加するからである。

次に、Rayleigh 散乱の角度分布は、(32) 式から前方散乱光と後方散乱光の強さは等しく、散乱角 $\gamma = \pm 90^\circ$ 方向の散乱光の強さは、前方 (後方) 散乱光の約 $1/2$ であることが理解される。この特徴は一次散乱光では顕著に現われるが、高次散乱光ほど指向性が一樣になり弱められる。したがって z および θ がともに 90° に近い場合には、一次散乱光の散乱角 γ_1 における $\cos \gamma_1$ は (54) 式から

$$\begin{aligned} \cos \gamma_1 &= \cos z \cos \theta + \sin z \sin \theta \cos(\phi - \varphi) \\ &\simeq \cos(\phi - \varphi) \dots\dots\dots (100) \end{aligned}$$

となり、 $\gamma_1 = \pm 90^\circ$ 方向、すなわち $|\phi - \varphi| = 90^\circ$ 方向の一次散乱光の強さは最小となるため、一次散乱光に対する高次散乱光の割合は相対的に最大となる。

二次以上の高次散乱光の間では、対数の逆比例関係が成立するとして、 n を十分大きくとった n 次散乱光までの合計エネルギーに対する四次以上 n 次散乱光までの合計エネルギーの割合、すなわち四次以上の高次散乱光を無視することによって生じる誤差は、波長 $\lambda = 0.38 \mu\text{m}$ において、 $S: (1^\circ, 0^\circ)$, $M: (0^\circ, 0^\circ)$ では 4.9% , $S: (79^\circ, 0^\circ)$, $M: (80^\circ, 90^\circ)$ では 14.7% と推定される。

三次散乱光まで評価した分光エネルギーから色度値を求める場合、三刺激値 $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$, $\bar{z}(\lambda)$ はいずれも短波長域での値は小さく、したがって色度値に対する上記の誤差はさらに小さくなる。

(2) 輝度についての誤差

四次以上の高次散乱光を無視することによって生じる輝度の誤差は、分光エネルギーの場合と同様、 z および θ がともに天頂方向のとき最小で、ともに 90° 方向 (地平線方向) で ϕ と φ のなす角が 90° のとき最大となる。この誤差は $S: (1^\circ, 0^\circ)$, $M: (0^\circ, 0^\circ)$ では 0.32% , $S: (79^\circ, 0^\circ)$, $M: (80^\circ, 90^\circ)$ では 0.85% と推定される。

11. お わ り に

以上の結果、多重散乱を拡散放射した放射伝達の微積分方程式を解く方法によらず、上記の散乱光を三次散乱光まで評価することによって、地表面の反射を考慮しない場合における Rayleigh 大気青光の分光エネルギーを容易に算出し、その輝度および色度ならびにこれらの変動の様相を実用上許容できる誤差範囲で評価することが可能であるとの結論を得た。

引き続き、地表面の反射を考慮した場合の評価法ならびに Rayleigh 大気における青光の分光エネルギー、輝度および色度の変動の様相についての検討結果を報告する予定であり、混濁大気についての検討もすすめてある。

最後に、本学安藤教授、松下電器照明研究所長岡田博士、ならびに日本色彩研究所川上博士の絶えざるご指導と激励を感謝いたします。

また、電子計算機による計算処理にご協力いただいた本学遠藤技官に感謝いたします。

数値計算は、新潟大学情報処理センター (HITAC 8350)、および東京大学大型計算機センター (HITAC 8800/8700) の計算機で行なわれた。

参 考 文 献

- (1) CIE Recommendations on Standard Illuminants for Colorimetry. CIE Compte Rendu, Washington, 1965, p. 95 (1968)
- (2) Proc. CIE (1955) Vol. II Secretariat Committee 3. 2
- (3) 昼光標準確立調査研究委員会報告(1): 照学誌 54 (昭 45) 111
- (4) N. Robinson: Solar Radiation, Elsevier P. C. (1966)
- (5) S. Chandrasekhar: Radiative Transfer, Oxford press (1950)
- (6) 東京天文台編 理科年表 (昭 47)
- (7) R. Penndorf: J. Opt. Soc. Amer. 47 (1957) 176
- (8) H. C. Van de Hulst: Light scattering by small particles, John Wiley and Sons press (1957)
- (9) M. Kerker: The scattering of light and other electromagnetic radiation, Academic press (1969)
- (10) M. P. Thekaekara et al.: Appl. Optics 8 (1969) 1713, CIE Publication No. 20: JCIE 翻訳出版 No. 3

付 録

散乱式の特異式(ただし, $z \neq \theta_1$, $z \neq \theta_2$, $z \neq \theta_3$, $z \neq \theta$)

多次元の多重積分の近似計算法としては, (1)一次元の近似公式を拡張して使用する方法と, (2)乱数を用いるモンテカルロ法がある. 十二次元以上になると, 計算機を使用するにあたって(1)の方法は計算時間, 記憶容量からみて実際上不可能に近く, (2)の方法がこの場合, 非常に有効となる¹⁾. しかし五次元程度までの多重積分は, (1)の方法が(2)に比べてはるかに有効である. この場合, 特異式が必要となる.

また, 特異式は散乱式の特徴を知る上で重要である. はじめに次の関数を定義する.

$$(a) \left. \begin{aligned} R_{11}(u, v) &= S_2(v)H_{11}(u, v) \\ R_{12}(u, v) &= S_2(v)H_{12}(u, v) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

$$(b) \left. \begin{aligned} T_{11}(u, v, w) &= S_3(v, w)Q_{11}(u, v, w) \\ T_{31}(u, v, w) &= S_3(v, w)Q_{31}(u, v, w) \\ T_{51}(u, v, w) &= S_3(v, w)Q_{51}(u, v, w) \\ T_{71}(u, v, w) &= S_3(v, w)Q_{71}(u, v, w) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

(1) 二次散乱光について

$$(a) \theta_1 = 0 \text{ or } \pi \text{ の場合} \\ Es_{21} = Es_{22} = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$$(b) \theta_1 = \pi/2 \text{ の場合} \\ Es_{21} = Es_{22} = J_0 \sec \theta G_1(z) PF_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \dots\dots\dots(4)$$

(2) 三次散乱光について

$$(a) \theta_1 = \theta_2 = 0 \text{ or } \pi \text{ の場合} \\ Es_{31} = \dots\dots\dots = Es_{34} = 0 \dots\dots\dots(5)$$

$$(b) \theta_1 = \theta_2 = \pi/2 \text{ の場合} \\ Es_{31} = \dots\dots\dots = Es_{34} = J_0 \sec \theta G_1(z) PF_3\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \dots\dots\dots(6)$$

(ア) $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 \neq \pi/2$, $\theta_2 \neq \theta$ の場合

$$\left. \begin{aligned} Es_{21} = Es_{32} &= J_0 \int_0^{\pi/2} R_{11}(z, \theta_2) PF_3\left(\frac{\pi}{2}, \theta_2\right) d\theta_2 \\ Es_{33} = Es_{34} &= J_0 \int_{\pi/2}^{\pi} R_{12}(z, \theta_2) PF_3\left(\frac{\pi}{2}, \theta_2\right) d\theta_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

(イ) $\theta_1 \neq \pi/2$, $\theta_2 = \pi/2$, $\theta_1 \neq \theta$ の場合

$$\left. \begin{aligned} Es_{31} = Es_{33} &= J_0 \int_0^{\pi/2} R_{11}(z, \theta_1) PF_3\left(\theta_1, \frac{\pi}{2}\right) d\theta_1 \\ Es_{32} = Es_{34} &= J_0 \int_{\pi/2}^{\pi} R_{12}(z, \theta_1) PF_3\left(\theta_1, \frac{\pi}{2}\right) d\theta_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

(3) 四次散乱光について

$$(a) \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0 \text{ or } \pi \text{ の場合} \\ Es_{41} = \dots\dots\dots = Es_{48} = 0 \dots\dots\dots(9)$$

$$(b) \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \pi/2 \text{ の場合} \\ Es_{41} = \dots\dots\dots = Es_{48} = J_0 \sec \theta G_1(z) PF_4\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \dots\dots\dots(10)$$

(ア) $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, $\theta_3 \neq \pi/2$, $\theta_3 \neq \theta$ の場合

$$\left. \begin{aligned} Es_{41} = Es_{42} = Es_{43} = Es_{44} &= J_0 \int_0^{\pi/2} R_{11}(z, \theta_3) \\ &\quad \times PF_4\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \theta_3\right) \\ &\quad \times d\theta_3 \\ Es_{45} = Es_{46} = Es_{47} = Es_{48} &= J_0 \int_{\pi/2}^{\pi} R_{12}(z, \theta_3) \\ &\quad \times PF_4\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \theta_3\right) \\ &\quad \times d\theta_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

(イ) $\theta_1 = \theta_3 = \pi/2$, $\theta_2 \neq \pi/2$, $\theta_2 \neq \theta$ の場合

$$\left. \begin{aligned} Es_{41} = Es_{42} = Es_{45} = Es_{46} &= J_0 \int_0^{\pi/2} R_{11}(z, \theta_2) \\ &\quad \times PF_4\left(\frac{\pi}{2}, \theta_2, \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad \times d\theta_2 \\ Es_{43} = Es_{44} = Es_{47} = Es_{48} &= J_0 \int_{\pi/2}^{\pi} R_{12}(z, \theta_2) \\ &\quad \times PF_4\left(\frac{\pi}{2}, \theta_2, \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad \times d\theta_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

(ウ) $\theta_2 = \theta_3 = \pi/2$, $\theta_1 \neq \pi/2$, $\theta_1 \neq \theta$ の場合

$$\left. \begin{aligned} Es_{41} = Es_{43} = Es_{45} = Es_{47} &= J_0 \int_0^{\pi/2} R_{11}(z, \theta_1) \\ &\quad \times PF_4\left(\theta_1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad \times d\theta_1 \\ Es_{42} = Es_{44} = Es_{46} = Es_{48} &= J_0 \int_{\pi/2}^{\pi} R_{12}(z, \theta_1) \\ &\quad \times PF_4\left(\theta_1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad \times d\theta_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

(エ) $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 \neq \pi/2$, $\theta_3 \neq \pi/2$, $\theta_2 \neq \theta_3$, $\theta_2 \neq \theta$, $\theta_3 \neq \theta$ の場合

$$\left. \begin{aligned} Es_{41} = Es_{42} &= J_0 \int_0^{\pi/2} d\theta_3 \int_0^{\pi/2} T_{11}(z, \theta_2, \theta_3) \\ &\quad \times PF_4\left(\frac{\pi}{2}, \theta_2, \theta_3\right) d\theta_2 \\ Es_{43} = Es_{44} &= J_0 \int_0^{\pi/2} d\theta_3 \int_{\pi/2}^{\pi} T_{31}(z, \theta_2, \theta_3) \\ &\quad \times PF_4\left(\frac{\pi}{2}, \theta_2, \theta_3\right) d\theta_2 \\ Es_{44} = Es_{46} &= J_0 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_3 \int_0^{\pi/2} T_{51}(z, \theta_2, \theta_3) \\ &\quad \times PF_4\left(\frac{\pi}{2}, \theta_2, \theta_3\right) d\theta_2 \\ Es_{47} = Es_{48} &= J_0 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_3 \int_{\pi/2}^{\pi} T_{71}(z, \theta_2, \theta_3) \\ &\quad \times PF_4\left(\frac{\pi}{2}, \theta_2, \theta_3\right) d\theta_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

(*) $\theta_1 \neq \pi/2, \theta_2 = \pi/2, \theta_3 \neq \pi/2, \theta_1 \neq \theta, \theta_3 \neq \theta$ の場合

$$\left. \begin{aligned} Es_{41} = Es_{43} &= J_0 \int_0^{\pi/2} d\theta_3 \int_0^{\pi/2} T_{11}(z, \theta_1, \theta_3) \\ &\quad \times PF_4\left(\theta_1, \frac{\pi}{2}, \theta_3\right) d\theta_1 \\ Es_{42} = Es_{44} &= J_0 \int_0^{\pi/2} d\theta_3 \int_{\pi/2}^{\pi} T_{31}(z, \theta_1, \theta_3) \\ &\quad \times PF_4\left(\theta_1, \frac{\pi}{2}, \theta_3\right) d\theta_1 \\ Es_{45} = Es_{47} &= J_0 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_3 \int_0^{\pi/2} T_{51}(z, \theta_1, \theta_3) \\ &\quad \times PF_4\left(\theta_1, \frac{\pi}{2}, \theta_3\right) d\theta_1 \\ Es_{46} = Es_{48} &= J_0 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_3 \int_{\pi/2}^{\pi} T_{71}(z, \theta_1, \theta_3) \\ &\quad \times PF_4\left(\theta_1, \frac{\pi}{2}, \theta_3\right) d\theta_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

(カ) $\theta_1 \neq \pi/2, \theta_2 \neq \pi/2, \theta_3 = \pi/2, \theta_1 \neq \theta_2, \theta_1 \neq \theta, \theta_2 \neq \theta$ の場合

$$\left. \begin{aligned} Es_{41} = Es_{45} &= J_0 \int_0^{\pi/2} d\theta_2 \int_0^{\pi/2} T_{11}(z, \theta_1, \theta_2) \\ &\quad \times PF_4\left(\theta_1, \theta_2, \frac{\pi}{2}\right) d\theta_1 \\ Es_{42} = Es_{46} &= J_0 \int_0^{\pi/2} d\theta_2 \int_{\pi/2}^{\pi} T_{31}(z, \theta_1, \theta_2) \\ &\quad \times PF_4\left(\theta_1, \theta_2, \frac{\pi}{2}\right) d\theta_1 \\ Es_{43} = Es_{47} &= J_0 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_2 \int_0^{\pi/2} T_{51}(z, \theta_1, \theta_2) \\ &\quad \times PF_4\left(\theta_1, \theta_2, \frac{\pi}{2}\right) d\theta_1 \\ Es_{44} = Es_{48} &= J_0 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_2 \int_{\pi/2}^{\pi} T_{71}(z, \theta_1, \theta_2) \\ &\quad \times PF_4\left(\theta_1, \theta_2, \frac{\pi}{2}\right) d\theta_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

参 考 文 献

- (1) 山内二郎ほか：電子計算機のための数値計算法Ⅱ
(昭 49)

(受付 1975 年 7 月 10 日)

文 献 ガ イ ド

◎International Lighting Review

Vol. 26 No. 1 (1976)

- ・公共照明における芸術的効果 p. 1~7, 写20
- ・屋外照明用移動実験室 p. 8~12, 写5, 図3, 表3
- ・南アフリカにおける屋外照明の光景 p. 13~17, 写8
- ・道路照明における若干の新しい情勢 p. 18~21, 写5, 図3
- ・インスブルグにおける第12回冬季オリンピック
クゲーム p. 22~27, 写9, 図2

◎International Lighting Review

Vol. 26 No. 3/4 (1975)

- ・Lüntenbeck 城の照明設計者の仕事 p. 77~83, 写25, 図2
- ・照明設計の教育方法について p. 84~86, 写3, 図2
- ・照明の建築 p. 87~91, 写6, 図1
- ・照明設計の実際的アプローチ p. 93~97, 図11
- ・照明設計の良否は目が判断する p. 98~101, 写10, 図4

- ・シミュレーションによる照明設計の研究

p. 102~105, 写14

- ・沖縄海洋博の照明 p. 106~113, 写8, 図10

◎Light and Lighting Vol. 69. No. 1 (1976)

- ・旅行施設の照明 p. 6~9, 写14
- ・事務所照明に何を望むか p. 18~27, 写23

◎Light and Lighting Vol. 69 No. 2 (1976)

- ・ディスプレイ照明 p. 46~57, 写21
- ・たばこ工場と事務所の照明 (Bristol) p. 64~67, 写10

Light and Lighting Vol. 69 No. 5/6 (1976)

- ・三つの市民センター p. 90~98, 写23
- 市民センター (Aylesbury 市)
- Harrow 市の市民センター (その1)
- 市民センター (Hounslow 市)
- ・国際展示センター p. 104~107, 写11, 図2
- ・照明軌道 (使用と選択) p. 108~114, 図22, 写14, 表1
- ・ホテルにおける装飾照明 p. 115, 写3
- ・スカンジナビアの照明見本市 p. 118, 写7