簡単な形をした光源による照明の幾何學的計算

正會員 山 内 二 郎

(電氣試験所第一部)

Geometrical Calculation of Illumination due to Light from Luminous Sources of Simple Forms.*

By Ziro Yamanouti, member.

Electrotechnical Laboratory, Ministry of Communications,

Tokyo.

内 容 梗 概

照明は一つのベクトルと考へられるからある座標系について三つの分照明を求めると空間の任意の位置において任意の方向の照明を容易に求めることが出来る。本文に於ては次の假定を置いて種々な簡単な形をした光源による分照明を計算したのである。

- (1) 光源には Lambert の輻射の餘弦法則が成立つ。
- (2) 光源の極小部分には逆自乗の法則が成立つ。
- (3) 考へてゐる場は均一な媒質で充されてゐて、吸収、反射其他これに類する現象が存在しない。
- (4) 光源の固有輝度は均一に分布されてゐる。

本文に考へた形は (1) 點 (2) 直線 (3) 圓弧 (4) 圓板 (5) 矩形板 (6) 球 及 (7) 圓柱である。普通考へるやうに光源がその幾何學的中心に集中したものとして逆自乗の法則を用ひて計算した値に乘すべき係數 C をも計算した。

尙光束の計算にこの分照明を用ひ得ることも述べてある。

目 次

第一章	緒 論
第二章	記 號
第三章	照 明
第四章	光源の三つの基本形
第五章	種々な形の光源
第一節	直 線 [長さ $2h$]
第二節	圓 弧 [半徑 a 弧の中心角 ϕ]
第三節	圓 板 [半徑 a]
第四節	球 [半徑 a]

*This paper will be published in English, as the Researches of the Electrotechnical Laboratory,
No. 148, Oct. 1924.

第五節 圓柱〔半徑 α 、長さ $2h$ 〕

第六章 光束の計算

第七章 摘要

Synopsis.

The illumination can be considered a vector and the component illuminations enable us to calculate easily the illumination in the space. We calculate the component illuminations due to light from luminous sources of various forms assuming the following assumptions:

- (1) Lambert's cosine law of radiation holds to the luminous sources,
- (2) Inverse square law holds to infinitesimal element of sources,
- (3) Field is filled with uniform medium with neither absorption, reflection, nor such like,
- and (4) Intrinsic brilliancy is uniform all over the luminous sources,

The forms of the sources considered are

- (1) Point,
- (2) Straight line,
- (3) Circular arc,
- (4) Circular disc,
- (5) Rectangular disc,
- (6) Sphere,
- and (7) Circular cylinder.

The correction factors, C , to be multiplied to the values given by the inverse square law are calculated for the illumination whose direction is towards the geometrical center of the source.

The total flux falling on a certain disc emitted from the source above cited is obtainable using these component illuminations.

When both the source and the receiving surface can be considered to be two circles on the same sphere, we can calculate the total flux falling on the disc emitted from the source very easily.

第一章 緒論

光力の測定、照明の測定には殆ど何時でも光源がその幾何學的中心に集中したものと考へてその光源による照明はその點光源からの距離の自乗に逆比例すると云ふ逆自乗の法則に基いて計算してゐる。今迄も多くの大家達によつて、直線、球、圓板、無限に長い帶、圓柱等の光源についてこの法則があてはまるかどうかかなり研究し盡くされてゐる（各項參照）。しかし今迄に筆者の知り得た範圍ではそれ等の解答はある特殊の場合についてのみ求めてあつて空間の任意の位置で任意の方向の照明は殆ど得られてゐないと云つてよい位である。勿論 Pole⁽⁴⁾ のやうに（第四章第一節參照）完全に求められたものもないではないがそれすらも可成複雑して居る。

物理的測光の應用が廣くなつて來、従つて光束をより正確に計算する必要が生じ

て來た。その上近來建築方面でも晝光照明の計算が云々されるやうになつて來たがその場合にも光源となる窓の大きさが光源から被照面までの距離に比して閑却し得ない位であるから此場合にも逆自乗の法則は適用し難い。即ち本論文に於ては次のやうに假定して任意の位置に於て任意の方向の照明の計算、光束の計算を試みたのである。

(假定1) 光源には Lambert の輻射の餘弦法則が成立つ。

(假定2) 光源の極小部分に對して距離の逆自乗の法則が成立つ。

(假定3) 考へて居る場は均一な媒質で充たされてゐて、反射、屈折其他これに類する現象は存在しない。

(假定4) 光源の固有輝度は光源の全體に均一に分布されて居る。

本論文に考へた處の光源の形は次のやうなものである。

(1) 點 源

(2) 直 線 [長さ $2h$]

(3) 圓 弧 [半徑 a , 弧の長さ $a\psi$]

(4) 圓 板 [半徑 a]

(5) 矩形板 [巾 $2a$, 長さ $2h$]

(6) 球 [半徑 a]

(7) 圓 柱 (半徑 a , 長さ $2h$)

第 二 章 記 號

S = 照明を求めやうとする點、

E = S 點に於て求めやうとする方向の照明、

E_s = S 點に於ての最大照明、

E_x, E_y, E_z = カーテシヤン座標系に於ての三つの分照明、

E_ρ, E_θ, E_ϕ = 極座標に於ての三つの分照明、

E_r, E_ϕ, E_z = 圓柱座標系の三つの分照明、

λ, μ, ν = 光線の方法餘弦、

λ', μ', ν' = 照明の方法の方法餘弦、

λ'', μ'', ν'' = 光源の極小部分の方法の方法餘弦、

α = 光線の發射角、

β = 光線と照明 E とのなす角、

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ = 光線と極座標系に於ての各主要方向とのなす角、

$\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ = 光線と圓柱座標系に於ての各主要方向とのなす角、

r_1, r_2, r_3 = 照明 E の方向とある座標系に於ての三つの分照明とのなす角、

x, y, z = カーテシヤン座標系に於ての S 點の座標、

ρ, θ, ϕ = 極座標系に於ての S 點の座標、

r, ϕ, z = 圓柱座標系に於ての S 點の座標、

b = 固有輝度、

I = 考へてゐる方向の光力、

$I_\perp$ = 光源に垂直な方向の光力、

p = 光源の極小部分から S 點に至る距離、

Φ = 光束

C = 正しい E_p の値を得るために逆自乗の法則によつて求めた値 $\frac{I}{\rho^2}$ に乗すべき係數。

第三章 照 明

萬國照明委員會の採用した定義(本誌第七卷第一號拔萃大正十二年四月發行參照)によれば、ある面に於てある點の照明とはその點に、その考へてゐる方向に垂直にゐた極小面の光束密度である。

先づ直交座標系をとつて考へて見る。光源のある極小部分から發散された光束による S 點 (x, y, z) の光源の方向の光束密度を dE とすれば dE による S 面の照明は定義によつて (考へてゐる方向に垂直にゐた極小面を S 面とする)

$$dE = dE_\perp \cos \beta$$

茲に β は光線と E との間の角である。 $dE_\perp$ は $\frac{b \cdot ds}{p^2} \cos \alpha$ で與へられる。但し b は固有輝度、 p は S 點から極小部分 ds に至る距離、 α は光線の發射角。この dE を光源の S 面と同じ側にあつて S 點に面する部分について積分するとこの光源によつて S 點に考へてゐる方向に生ずる照明即ち S 面上の照明が得られる。即ち

$$E = \int dE_\perp \cos \beta \dots \dots \dots (1)$$

今 μ, ν を光線の方向餘弦、 λ', μ', ν' を照明 E の方向の方向餘弦とすれば

$$\cos \beta = \lambda \lambda' + \mu \mu' + \nu \nu'$$

となるから (1) 式は次のやうに書くことが出来る。

$$E = \lambda' E_x + \mu' E_y + \nu' E_z \dots \dots \dots (1a)$$

$$\begin{cases} E_x = \int \lambda dE_0 \\ E_y = \int \mu dE_0 \\ E_z = \int \nu dE_0 \end{cases} \dots \dots \dots (2)$$

で與へられ、積分の範圍は (1) 式と同じ。

假定 (3) によつて今考へてゐる場では光源自體の他の部分が遮つてゐる他には光線を遮つてゐるものがないから (1a) 式から S 點に於ての最大照明 E_s を次のやうに書くことが出来る。

$$E_s = xE_x + yE_y + zE_z \dots \dots \dots (3)$$

但し x, y, z は座標軸に平行な三つの單位ベクトルで E_x, E_y, E_z は各座標軸の方向の分照明でその大さは (2) 式によつて與へられる。かやうに S 點に於て最大照明を考へれば、それは E_x, E_y, E_z と云ふ三つの分照明 (附記一) を持つたベクトルとなる。Hyde⁽¹⁾ Steinmetz⁽⁶⁾ は既に光束密度は一つのベクトルと考へられると指摘してはゐる。(附記二)。

以上は前にも述べたやうに直交座標系による場合であるが時には他の座標系による方が便利な場合がある。それで次には極座標系の場合を考へて見やう。

ベクトル E_s が S 點 (ρ, θ, ϕ) に於て各主要方向に並行な分照明を E_ρ, E_θ, E_ϕ とし、各方向の單位ベクトルを u, v, w とすれば (3a) 式が得られる。

$$E_s = uE_\rho + vE_\theta + wE_\phi \dots \dots \dots (3a)$$

E_ρ, E_θ, E_ϕ の大さは (4) 式で求められる。

$$\begin{cases} E_\rho = \int dE_0 \cdot \cos \beta_1 \\ E_\theta = \int dE_0 \cdot \cos \beta_2 \\ E_\phi = \int dE_0 \cdot \cos \beta_3 \end{cases} \dots \dots \dots (4)$$

茲に $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ は光線が各主要方向となす角とし、積分範圍は (1) 式のと對應する。

もし場が圓柱座標系に適してゐるものとすれば E_s の S 點 (r, ϕ, z) に於ての分照明 E_r, E_ϕ, E_z を (5) 式によつて求めると (3b) 式となる。

$$E_s = rE_r + sE_\phi + tE_z \dots \dots \dots (3b)$$

但し r, s, t は各主要方向の単位ベクトルである。

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \int dE_s \cos \beta_1' \\ E_s &= \int dE_s \cos \beta_2' \\ E_z &= \int dE_s \cos \beta_3' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

但し β' は光線が各主要方向となす角で、積分範囲は (1) 式に對應する。

即ち空間のある位置においてある方向の照明を求めるにはその場合に最も適當した座標系によつて三つの分照明 $E_1 E_2 E_3$ を求め、その分照明の方向と今考へてゐる照明の方向となす角を $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ とすれば (1a) 式は

$$E = E_1 \cos \gamma_1 + E_2 \cos \gamma_2 + E_3 \cos \gamma_3 \dots \dots \dots (1b)$$

となるが先に求めた $E_1 E_2 E_3$ をこの (1b) 式に入れて求めやうとする照明を完全に計算することが出来る。

よつて次に各場合の三つの分照明を求めて見た。但し本論文には S 面の切面が光源を切らない場合についてのみ求めた。尙かやうにして求めた照明が逆自乗の法則から求めた値とどれ位離れてゐるかを見るために最も簡単な場合即ち光源の幾何學的中心にむかふ照明を採つてそれを得るために逆自乗の法則によつて求めた値に乘すべき係數 C を計算してみた。

第 四 章 光源の三つの基本形

次の三つの形が光源の基本形と考へられる。

- (1) 點、若くは球狀の點源、
- (2) 極小直線、若くは圓柱狀の點源、
- (3) 極小面、若くは平面狀の點源、

この場合には原點を光源において極座標系を用ゐるのが便利であることは明かである。 $\theta_0 = 0$ の方向には (2) の場合には直線の方角を、(3) の場合には面に垂直な方角を取る。さうすると對稱であるから

$$E_\theta = E_{\phi_1} = 0 \dots \dots \dots (6)$$

また光源に垂直な方向の光力を I_0 とすれば、今考へてゐる方向の光力 I は各

$$I = I_0, I_0 \sin \theta_0, I_0 \cos \theta_0 \dots \dots \dots (7)$$

となり従つて何れの場合にも

$$E_\rho = \frac{I}{\rho^2} \dots \dots \dots (8)$$

即ちこの場合には逆自乗の法則はそのまゝにあてはまるから

$$C=1. \dots\dots\dots (9)$$

(6) 及 (8) から何れの場合にも最大照明 E_0 は

$$E_0 = \frac{I}{\rho_0^2}$$

によつて與へられその方向は光源へ向ふ。

(7) 及 (8) から E_0 の等しい面を定められる。その垂直及水平断面は第一、第二、第三圖のやうになる。

(左) 垂直断面

(右) 水平断面

第一圖 均一點源の場合の等しい E_0 の面

第三圖 面點源の場合の等しい、 E_0 の面

(面の方向の水平に向けられた時)

(左) 垂直断面

(右) 水平断面

第二圖 直線點源の場合の等しい、 E_0 の面

(左) 垂直断面

(右) 水平断面

第五章 種々な形の光源

光源の数が数個ある場合も容易に得られるが、本論文に於ては其一個の簡単な光源のみある場合を考へる。尙何れの場合に於ても光源の幾何學的中心に座標系の原点を置く。

1. 直線〔長さ $2h$ 〕

圓柱座標系を用ふる。Z 軸は光源の長さの方向にとる。

對稱から

$$E_{\phi} = 0 \dots \dots \dots (11a)$$

光源の上に z なる處に極小部分 dz を考へると (第四圖)

$$p^2 = r_0^2 + (z_0 - z)^2,$$

$$\cos \alpha = \frac{r_0}{p},$$

$$\beta_1' = \alpha,$$

$$\cos \beta_3' = \frac{z_0 - z}{p}$$

となるから、 E_r は次のやうになる。

$$\begin{aligned} E_r &= \int_{-h}^h \frac{b \, dz}{p^2} \cos \alpha \cdot \cos \beta_1' = \int_{-h}^h \frac{b^{\frac{1}{2}} r_0^2 \, dz}{[r_0^2 + (z_0 - z)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{b}{2} \left[\frac{z_0 - z}{r_0^2 + (z_0 - z)^2} + \frac{1}{r_0} \tan^{-1} \frac{z_0 - z}{p} \right]_{-h}^h \\ &= -\frac{b}{2} \left[\frac{z_0 + h}{r_0^2 + (z_0 + h)^2} - \frac{z_0 - h}{r_0^2 + (z_0 - h)^2} + \frac{1}{r_0} \left\{ \tan^{-1} \frac{z_0 + h}{r_0} - \tan^{-1} \frac{z_0 - h}{r_0} \right\} \right] \\ &= \frac{b}{2} \left[\frac{z_0 + h}{p_1^2} - \frac{z_0 - h}{p_2^2} + \frac{\omega}{r_0} \right] \end{aligned} \quad (11b)$$

但し p_1 = 光源の下端から S 點に至る距離、

p_2 = 光源の上端からの距離、

ω = S 點に於て光源の含まれる角、(第四圖参照)

Norden⁽²⁾ 及 Cooper⁽³⁾ は平行な平面の上の照明を求めて居るが、勿論その結果は $E_r \cos \phi$ に相當して居る。 ϕ は光源と S 點とのなす面と今考へてゐる平面とのなす角

である。同様に

$$\begin{aligned} E_z &= \int_{-h}^h \frac{br_0(z_0-z) dz}{[r_0^2+(z_0-z)^2]^2} = -\frac{br_0}{2} \left[\frac{1}{r_0^2+(z_0-z)^2} \right]_{-h}^h \\ &= -\frac{br_0}{2} \left[\frac{1}{r_0^2+(z_0-h)^2} - \frac{1}{r_0^2+(z_0+h)^2} \right] \\ &= -\frac{br_0}{2} \left[\frac{1}{p_2^2} - \frac{1}{p_1^2} \right] \dots\dots\dots (11c) \end{aligned}$$

Pole⁽⁴⁾は被照面の方向餘弦を用ひて直線光源による照明を求めてゐるがそれは即ちこの(11b)と(11c)とを(1b)によつてあらはしたEに他ならない。Norden⁽⁵⁾は光源に垂直な面の照明即ち茲に云ふ(11c)を他の方法によつて求めて居る。

さて $r_0 \rightarrow 0$ の時の E_r 及 E_z の極限の値は實際問題としてはさして重要な問題ではないがたゞ數學的興味から求めてみると次の様な結果になる。即ち $z_0^2 > h^2$ の所では即ち光源の延長上では E_r も E_z も共に零になり、 $z_0^2 < h^2$ の所即ち光源の上では E_z は零になるが E_r は $\frac{\pi b}{2r_0}$ になる。併し光源の兩端では稍趣を異にしてゐる。即ち兩端に近寄るのに其近寄り方によつて値がちがつて来る。今光源と θ をなす直線に沿つて近寄つて行つたとすれば $E_r \rightarrow \frac{b}{2r_0} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]$, $E_z \rightarrow \pm \frac{b \sin^2 \theta}{2r_0}$ となる、特に $\theta = \frac{\pi}{2}$ の時には $E_r \rightarrow \frac{\pi b}{4r_0}$, $E_z \rightarrow \pm \frac{b}{2r_0}$ となる。負號は下端に於ての値である。

(1b)式によつて

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{r_0}{\rho_0} E_x + \frac{z_0}{\rho_0} E_z \\ &= \frac{bh \sin \theta_0}{2} \left[\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \frac{\omega}{hr_0} \right] \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

(12)に於て ρ_0 を非常に大にとれば

$$E_\rho \rightarrow \frac{2hb}{\rho_0^2} \sin \theta_0$$

となり、この方向の光力 $I = 2hb \sin \theta_0$ が得られる。 θ_0 は第四圖で明かであらう。これから

$$E_\rho = \frac{I}{4} \left[\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \frac{\omega}{hr_0} \right]$$

$$\text{従つて } C = \frac{\rho_0^2}{4} \left[\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \frac{\omega}{hr_0} \right] \dots\dots\dots (13)$$

を得る。

Pole⁽⁴⁾はこの(12)に相當する結論を得てゐるが惜しいことには ρ_0 を非常に大きく

が略ぼ成立つてゐることがわかる。

h を無限大にすると

$$E_r = -\frac{\pi b}{2r_0}$$

$$E_z = \theta$$

となる。従つて E は光源の直線からの垂直距離に逆比例し、その方向は光源に垂直な方向に向ふ。即ち等光束面は共軸の圓柱となる。尙 h が有限であつても前にも述べたやうに非常に光源に近い所ではこれと同じことが成立つてゐることが分る。

2. 圓 弧〔半径 a , 弧の長さ $a\phi$ 〕

此の場合にも圓柱座標系を用ひる。 z 軸には弧の圓の中心を通つて弧の平面に垂直な直線を探る。

分照明を求めるに當つて S 點の位置によつて三つの場合が考へられる。(1) S 點が弧の平面上にもなく、 z 軸の上にもない場合、(2) z 軸の上にある場合、(3) 弧の平面上にある場合。

(第一の場合) 此場合には S 點を $(r_0, 0, z_0)$ において考へる。さうすると弧の兩端の座標は $(a, \phi_1, 0)$ 及 $(a, \phi_2, 0)$ となる。

第 七 圖

$$p^2 = z_0^2 + r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos \phi,$$

$$\cos a = \frac{\sqrt{z_0^2 + (r_0 \cos \phi - a)^2}}{p},$$

$$\frac{\cos \beta_1'}{r_0 - a \cos \phi} = \frac{\cos \beta_2'}{-a \sin \phi} = \frac{\cos \beta_3'}{z_0} = \frac{1}{p},$$

従つて

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \int \frac{b a d \phi (r_0 - a \cos \phi) \sqrt{z_0^2 + (r_0 \cos \phi - a)^2}}{p^4}, \\ E_\phi &= \int \frac{b a d \phi (-\sin \phi) \sqrt{z_0^2 + (r_0 \cos \phi - a)^2}}{p^4}, \\ E_z &= \int \frac{b a d \phi \cdot z_0 \sqrt{z_0^2 + (r_0 \cos \phi - a)^2}}{p^4}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

圓弧全體に渡つて積分する。

(21) 式を見るに E_ϕ は初等函數で積分し得らるゝが E_r 及 E_z は三種類の 楕圓積分となる。

$a - r_0 \cos \phi = t$ と置いて E_ϕ を積分すると

$$\begin{aligned} E_\phi &= -\frac{ba^2}{r_0} \int \frac{\sqrt{z_0^2 + t^2}}{(z_0^2 + r_0^2 - a^2 + 2at)^2} dt \\ &= -\frac{ba^2}{r_0} \left[\frac{\sqrt{z_0^2 + t^2}}{z_0^2 + r_0^2 - a^2 + 2at} + \frac{1}{2a} \log(t + \sqrt{t^2 + z_0^2}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{z_0^2 + r_0^2 - a^2}{2a\sqrt{[z_0^2 + (r_0 + a)^2][z_0^2 + (r_0 - a)^2]}} \right. \\ &\quad \left. \log \frac{2[2az_0^2 - (z_0^2 + r_0^2 - a^2)(a - r_0 \cos \phi) + \sqrt{[z_0^2 + (r_0 + a)^2][z_0^2 + (r_0 - a)^2][z_0^2 + t^2]}}{z_0^2 + r_0^2 - a^2 + 2at} \right] \\ &= -\frac{ba^2}{2r_0} \left[\frac{\sqrt{z_0^2 + (r_0 \cos \phi - a)^2}}{z_0^2 + r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos \phi} + \frac{1}{2a} \log(a - r_0 \cos \phi + \sqrt{z_0^2 + (r_0 \cos \phi - a)^2}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{z_0^2 + r_0^2 - a^2}{\sqrt{[z_0^2 + (r_0 + a)^2][z_0^2 + (r_0 - a)^2]}} \right. \\ &\quad \left. \log \frac{2[2az_0^2 + z_0^2 + r_0^2 - a^2(r_0 \cos \phi - a) + \sqrt{[z_0^2 + (r_0 + a)^2][z_0^2 + (r_0 - a)^2][z_0^2 + (r_0 \cos \phi - a)^2]}}{z_0^2 + r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos \phi} \right]_{\phi_1}^{\phi_2} \end{aligned}$$

次に E_r 及 E_z を求めるには先づ $0 \leq \phi \leq \pi$ の場合を考へる。

$$\lambda_1 = \frac{z_0^2 + a^2 - r_0^2 + \sqrt{[z_0^2 + (r_0 + a)^2][z_0^2 + (r_0 - a)^2]}}{2r_0^2} \quad (> 0)$$

$$\lambda_2 = \frac{z_0^2 + a^2 - r_0^2 - \sqrt{[z_0^2 + (r_0 + a)^2][z_0^2 + (r_0 - a)^2]}}{2r_0^2} \quad (0 > \lambda_2 > -1)$$

$$m = \sqrt{\frac{1 + \lambda_2}{1 + \lambda_1}} \quad (< 1)$$

$$\frac{m - \cos \phi}{1 - m \cos \phi} = \operatorname{cn} u \quad \left[k'^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] \quad (22)$$

とすれば $\cos \phi = -1$ の時 $u = 0$,

$\cos \phi = -m$ の時 $u = K$,

$\cos \phi = 1$ の時 $u = 2K$

となる。但し K は第一種の楕圓完全積分をあらはすものとする。また (22) から

$$\cos \phi = \frac{m - \operatorname{cn} u}{1 - m \operatorname{cn} u},$$

$$\sin \phi = \frac{\sqrt{1-m^2} \operatorname{sn} u}{1-m \operatorname{cn} u},$$

$$d\phi = -\frac{\sqrt{1-m^2} \operatorname{dn} u}{1-m \operatorname{cn} u} du$$

となる。今 ϕ_1, ϕ_2 に對應する u の値を u_1, u_2 , とすれば E_r, E_z は次のやうになる。

$$E_r = \frac{b \cdot a}{\rho_o^2} \cdot \frac{1-\lambda_1 \lambda_2}{1+\lambda_1} \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \int_{u_2}^{u_1} \frac{\operatorname{dn}^2 u (k^2 + m k'^2 \operatorname{cn} u)}{(1+m \operatorname{cn} u)^2 (1-m \operatorname{cn} u)} du \dots (21b)$$

$$E_z = \frac{b \cdot a}{\rho_o^2} \cdot \frac{1-\lambda_1 \lambda_2}{1+\lambda_1} \sqrt{\frac{-\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}} \int_{u_2}^{u_1} \frac{\operatorname{dn}^2 u}{(1+m \operatorname{cn} u)^2} du \dots (21c)$$

次に $0 \geq \phi \geq -\pi$ の範圍で u は負となる。 $\operatorname{sn} u$ は u の奇函數であり、 $\operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ は偶函數であるから E_r 及 E_z は u の正の時と同じ値となる。即ち ϕ が如何なる値の時でも E_r 及 E_z は (21b) 及 (21c) であらはされ三種の楕圓積分で求められる。

圓弧が完全な圓である場合には計算はやゝ簡單になる。對稱から

$$E_\phi = 0$$

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{2ab}{\rho_o^2} \cdot \frac{1-\lambda_1 \lambda_2}{1+\lambda_1} \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^{2K} \frac{\operatorname{dn}^2 u (k^2 + m k'^2 \operatorname{cn} u)}{(1+m \operatorname{cn} u)^2 (1-m \operatorname{cn} u)} du \\ &= \frac{4ab}{\rho_o^2} \cdot \frac{1-\lambda_1 \lambda_2}{1+\lambda_1} \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^K \frac{\operatorname{dn}^2 u (k^2 - m^2 k'^2 \operatorname{cn}^2 u)}{(1-m^2 \operatorname{cn}^2 u)^2} du \\ E_z &= \frac{2ab}{\rho_o^2} \cdot \frac{1-\lambda_1 \lambda_2}{1+\lambda_1} \sqrt{\frac{-\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}} \int_0^{2K} \frac{\operatorname{dn}^2 u}{(1+m \operatorname{cn} u)^2} du \\ &= \frac{4ab}{\rho_o^2} \cdot \frac{1-\lambda_1 \lambda_2}{1+\lambda_1} \sqrt{\frac{-\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}} \int_0^K \frac{\operatorname{dn}^2 u (1+m^2 \operatorname{cn}^2 u)}{(1-m^2 \operatorname{cn}^2 u)^2} du \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

三種の楕圓積分によつて容易に求められる。

a に比して ρ_o が非常に大きくなると、 $\lambda_1 = \cot^2 \theta$, $\lambda_2 = -1$, $m=0$ 及 $k=\sin \theta$. となり E_r

及 E_z は

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{ab}{\rho_o^2} \cos \theta \int_{u_2}^{u_1} \sin^2 \theta \operatorname{dn}^2 u du \\ &= \frac{ab}{\rho_o^2} \sin \theta \left[E(u, \sin \theta) \right]_{u_2}^{u_1} \\ E_z &= \frac{ab}{\rho_o^2} \cos \theta \int_{u_2}^{u_1} \operatorname{dn}^2 u du \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

$$= \frac{ab}{\rho_z^2} \cos \theta_0 \left[E(u, \sin \theta_0) \right]_{u_2}^{u_1}$$

即ち $E_\rho = E_r \sin \theta_0 + E_z \cos \theta_0$.

$$= \frac{b}{\rho_0^2} (\text{動徑の方向にて垂直な平面への正射影の楕圓弧の長さ})$$

従てこの θ_0 の方向の光力 I は

$$I = b (\text{動徑の方向に垂直な平面への正射影の楕圓弧の長さ})$$

となる。此から係数 C_2 も計算せられる。例へば圓の場合に $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ の方向について求めて見ると

$$E_\rho = \frac{8ab}{\sqrt{2}\rho_0^2} \cdot k \sqrt{\frac{k}{k'}} \int_0^K \frac{dn^2 u}{(1-m^2 \text{cn}^2 u)^2} \left(1 - \left(\frac{k'-k}{k'+k}\right)^2 \text{cn}^2 u\right) du \dots (25)$$

$$I = 4ab E_0$$

であるから

$$C = \frac{\sqrt{2}}{E_0} k \sqrt{\frac{k}{k'}} \int_0^K \frac{dn^2 u}{(1-m^2 \text{cn}^2 u)^2} \left(1 - \left(\frac{k'-k}{k'+k}\right)^2 \text{cn}^2 u\right) du \dots \dots$$

$$= \frac{k' \sqrt{2kk'}}{E_0} \left[\frac{k'^2 - k^2 - 2kk'}{2} ((k' - k)K - \frac{E}{k'}) + \frac{k(k'^2 - k^2 + 2kk')}{\sqrt{k'^2 - k^2}} (\eta K + k(E - K)) \right] (26)$$

茲に K 及 E は第一種及第二種の完全積分、 k 及 η は餘定係數 (complementary modulus) に對する第一種及第二種の不完全積分をあらはし $[\text{am } k = \cos^{-1} \sqrt{\frac{k}{k'}}]$, E_0 は定係數 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ なる時の第二種完全積分である。

第 八 圖

(第二の場合) S 點が Z 軸上にある場合は極めて容易である。

$$p^2 = a^2 + z_0^2$$

$$a = 0$$

$$\frac{\cos \beta_1'}{-a \cos \phi} = \frac{\cos \beta_2'}{-a \sin \phi} = \frac{\cos \beta_3'}{z_0} = \frac{1}{p}$$

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \int_0^{\pi} \frac{ba^2 d\phi (-\cos \phi)}{p^3} = \frac{ba^2 \sin \phi}{(a^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_\phi &= \int_0^{\pi} \frac{ba^2 d\phi (-\sin \phi)}{p^3} = \frac{ba^2 \cos \phi}{(a^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_z &= \int_0^{\pi} \frac{baz_0 d\phi}{p^3} = \frac{baz_0 \phi}{(a^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

積分範圍は ϕ_1, ϕ_2 である。

完全な圓の場合には

$$\left. \begin{aligned} E_r &= 0 \\ E_\phi &= 0 \\ E_z &= \frac{2\pi a \cdot b \cdot z_0}{(a^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27a)$$

(第三の場合) S 點が圓弧の平面上にある場合には ($\cos \alpha$ は常に正であるから) integrand の符號は S 點から圓に引いた切線の切點に對する弧の關係位置で變る。
 $|\phi| < \cos^{-1} \frac{a}{r_0}$ の範圍では (28) の値をとり、 $|\phi| > \cos^{-1} \frac{a}{r_0}$ の範圍では不定積分は反對の符號を持つ。

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \int \frac{abd\phi (r_0 - \cos\phi - a)(r_0 - a \cos\phi)}{(r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos\phi)^2} \\ &= \frac{b}{2r_0} \left[\frac{ar_0 \sin\phi}{r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos\phi} + \frac{r_0^2 + a^2}{r_0^2 - a^2} \tan^{-1} \left(\frac{r_0 + a}{r_0 - a} \tan \frac{\phi}{2} \right) - \phi \right] \\ E_\phi &= \int \frac{abd\phi (r_0 \cos\phi - a)(-a \sin\phi)}{(r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos\phi)^2} \\ &= \frac{1}{4r_0} \left[\log(r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos\phi) + \frac{r_0^2 - a^2}{r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos\phi} \right] \\ E_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

完全な圓の場合には

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{b}{\sqrt{r_0^2 - a^2}} \left[\frac{a}{r_0} + \frac{r_0^2 + a^2}{r_0^2 - a^2} \tan^{-1} \sqrt{\frac{r_0 + a}{r_0 - a}} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{r_0 - a}{r_0 + a}} \right] \\ E_\phi &= 0 \\ E_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (28a)$$

かやうに圓弧による空間のある位置のある方向の照明を計算することが出来る。
 尙 (25)、(27a) 及 (28) からある方向の光力を求めることが出来るがそれは勿論 Steinmetz⁽⁶⁾ の與へた値と同じである。最大光力が I_0 である線分の光源から出る全光束は $\pi^2 I_0$ で與へられるから、圓環光源から出る全光束は $\int \pi^2 b ds = 2\pi^2 a \cdot b$ となる。圓環の最大光力 I_0 は Z 軸の方向であるから $2\pi ab$ に等しい。即ちこの場合にも $\pi^2 I_0$ であらはすことが出来る。即ち線分の場合と同じ關係が成立つてゐる。全光束が等しい場合の配光曲線を作ると第九圖のやうになる。圖中曲線 1 は均一點源若くは球、曲線 2 は直線又は圓柱、曲線 3 は圓環の場合である。最大光力は 2 及 3 に於て等しくなる。

(26)、(27a) 及 (28) から $\theta_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ の C 曲線を求めることが出来る。

第九圖
等しい全光束の光源の配光曲線
1. 均一點源又は球
2. 直線又は圓柱
3. 圓環

第十圖 圓環

3. 圓 板 (半径 a)

- $\frac{\rho_0}{2a}$
- I $\theta_0 = 0$
 - II $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$
 - III $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

前節と同様な圓柱座標系を用ひる。

對稱から

$$E_\phi = 0 \dots\dots\dots (31a)$$

第十一圖

圓板の上の (r, ϕ) に極小面積中 $r \cdot dr \cdot d\phi$ を考えると(第十一圖)

$$p^2 = z_0^2 + r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos \phi,$$

$$\frac{\cos \alpha}{z_0} = \frac{\cos \beta_1'}{r_0 - r \cos \phi} = \frac{\cos \beta_2'}{z_0} = \frac{1}{p}$$

となるから

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \int \frac{bz_0(r_0 - r \cos \phi) r dr d\phi}{(z_0^2 + r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos \phi)^{3/2}} \\ E_z &= \int \frac{bz_0^2 r dr d\phi}{(z_0^2 + r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos \phi)^{3/2}} \end{aligned} \right\} (32)$$

積分範圍は $r = 0, a, \phi = 0, 2\pi$ であるから

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{\pi bz_0}{2r_0} \left[\frac{z_0^2 + r_0^2 + a^2}{\sqrt{[z_0^2 + (r_0 + a)^2][z_0^2 + (r_0 - a)^2]}} - 1 \right] \\ &= \frac{\pi bz_0 (p_1 - p_2)^2}{4r_0 p_1 p_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31b)$$

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \frac{\pi b}{2} \left[1 - \frac{z_0^2 + r_0^2 - a^2}{\sqrt{[z_0^2 + (r_0 + a)^2][z_0^2 + (r_0 - a)^2]}} \right] \\ &= \frac{\pi b [4a^2 - (p_1 - p_2)^2]}{4p_1 p_2} \\ &= \frac{\pi b}{2} (1 - \cos \omega) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31c)$$

茲に p_1 は S 點より圓板の端に至る最大距離、 p_2 は最短距離、 ω は E_r の方向に平行な直徑の S 點に含まれる角を表す。(31c) の前の式は勿論 Foote⁽⁷⁾ 及吉岡氏⁽¹⁰⁾ によつて與へられたものと同じ。最後の式は吉岡氏⁽¹⁰⁾ によつて求められてゐる。

z_0 が零に近付いた時の E_r, E_z の極限值については極限に $r_0 \equiv a$ である時には $E_r \rightarrow 0$, $r_0 = a$ の時には近づくその方向によつて異つた値を持つ。 θ をその方向の圓板の面となす角、 ϕ をその方向の面上の正射影がその極限の S を通る半徑となす角とすれば E_r は $\frac{\pi b}{2} \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \sin^2 \phi}}$ となり特に $\theta = \frac{\pi}{2}$ の時には $\frac{\pi b}{2}$ になる。また E_z は $r_0 < a$ 即ち圓板の上の點に近付く時は $\pi b, r_0 > a$ 即ち圓板の外の點の時は 0, $r_0 = a$ 即ち圓板の端では $\frac{\pi b}{2} \left[1 + \frac{\cos \theta \cos \phi}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \sin^2 \phi}} \right]$ となる。特に $\theta = \frac{\pi}{2}$ の時は $E_z \rightarrow \frac{\pi b}{2}$ である。しかるに $z_0 = 0$ である幾何學的平面上では $E_r = 0, E_z$ は圓板上で πb 、圓板の端で $\frac{\pi b}{2}$ 、圓板外では 0 である。

(31b) 及 (31c) から

$$E_{\rho} = \frac{r_0}{\rho_0} E_r + \frac{z_0}{\rho_0} E_z$$

$$= \frac{\pi a^2 b \cos \theta_0}{p_1 p_2} \dots \dots \dots (33)$$

となり、 ρ_0 を a に比して非常に大にとれば

$$E_{\rho} \rightarrow \frac{\pi a^2 b \cos \theta_0}{\rho_0^2}$$

となり $I = \pi a^2 b \cos \theta_0$ を得るから

$$E_{\rho} = \frac{I}{p_1 p_2} \dots \dots \dots (33a)$$

Z 軸上では

$$E_{\rho} \rightarrow \frac{I}{d^2} \quad (8)$$

d は S 點から圓板の端に至る距離をあらはす。

(33) 又は (33a) から

$$C = \frac{\rho_0^2}{p_1 p_2} \dots \dots \dots (34)$$

となるから此から C 曲線も逆自乗の法則からののはづれの等位面も求められる。第十二圖及第十三圖に示す通りである。第十三圖から $\theta_0 = 45^\circ$ の方向ではこのはづれは殆んど零に等しい即ち逆自乗の法則が成立つことが分る。

a が無限に大きくなると

$$E_r = 0 \quad E_z = \pi b \dots \dots \dots (35)$$

即ち無限にひろがつた面では E_0 は一定で πb に等しく光源に垂直にむかふが、此は Rosa⁽⁸⁾ が既に述べてゐる通りである。有限の場合で前に述べたやうに非常に光源に近い場合にも同様のことが云はれる。

第十二圖 圓板

- I $\theta_0 = 0$
- II $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$
- III $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$
- IV $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$

第十三圖

圓板光源の場合の逆自乗法則からのば
づれ(百分率)の等位面の垂直断面
(距離の單位=光源の直徑)

(31b)及(31c)から任意の位置で任意の方向の
照明を求めることが出来るがこれを求めるのに
McAllister⁽⁹⁾ の提示した等光束球を用ふともつ
と樂に求めることが出来る。氏の理論の説明は
立體角の稍的確でない假定を含んでゐるが、こ
の等光束球の理論は正しく圓板光源にあてはま
る。圓板の代りにAMB(第十四圖)の凹球面を
用ひ中空球の照明の理論と同じやうにして完全
に説明し得る。

等光束球の面上では ω は一定であるから(31c)
の最後の式によつて等光束球の面上の點に於て
光源に平行な面上の照明即ち E_z は全球面上で
一定である。即ち第十四圖の最下點Sの E_z に等
しい。この値はまた(33b)で容易に求められる。
また球面上の照明 E_{iw} も S. 點の E_w に等しく、
その値は
もとより

(33b) に等しい。即ち球面上の照明 E_w とその
點に於て光源に平行な面上の照明 E_z とは等し
い。即ち S 點に於ての最大照明 E_0 は (36)
であらばされ方向は天頂 M へむかふ。

$$E_0 = \frac{\pi b(1 - \cos \omega)}{2 \cos \theta} \dots \dots \dots (36)$$

θ は角 SMO に等しい。但し圓板の端に於ては
成立しない。

第十四圖

*東京帝國大學、尾本義一氏：筆者が先頃同氏に遭つた時親切にも等光束球について種々教示せられる所
があつた。筆者は McAllister の説明に不備があつた様に思へたので省なかつたのであつた。

E_r の大さ及方向を知るから此から任意の位置の任意の方向の照明を極めて容易に求められる。たとへば

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\pi b (1 - \cos \omega)}{2 \cos \theta} \sin \theta \\ &= \frac{\pi b (p_1 - p_2)^2}{4 p_1 p_2} \cdot \frac{z_0}{r_0} \\ E_\rho &= \frac{\pi b (1 - \cos \omega)}{2 \cos \theta} \cdot \frac{2 R \cos \theta - 2 R \sin^2 \frac{\omega}{2} \cos \theta}{\rho_0} \\ &= \frac{\pi b R \sin^2 \omega}{2 \rho_0} \\ &= \frac{\pi a^2 b}{p_1 p_2} \cdot \frac{z_0}{\rho_0} \end{aligned}$$

4. 矩形板 (長さ $2h$, 巾 $2a$)

直交座標系を考へる。 x 軸は面に垂直に、 y 軸は BC 邊に平行に、 z 軸は AB 邊に平

第十五圖

行にとる(第十五圖)。板上 (y, z) に極小面積 $dy \cdot dz$ を考へると

$$\begin{aligned} p_2 &= x_0^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2, \\ \frac{\cos \alpha}{x_0} &= \frac{\lambda}{x_0} = \frac{\mu}{y_0 - y} = \frac{\nu}{z_0 - z} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
 E_x &= bx_o^2 \int \frac{dy dz}{p^4} \\
 &= \frac{b}{2} \left[\frac{y_o - y}{\sqrt{x_o^2 + (y_o - y)^2}} \tan^{-1} \frac{z_o - z}{\sqrt{x_o^2 + (y_o - y)^2}} + \frac{z_o - z}{\sqrt{x_o^2 + (z_o - z)^2}} \tan^{-1} \frac{y_o - y}{\sqrt{x_o^2 + (z_o - z)^2}} \right]_{-a, -h}^{a, h} \\
 &= \frac{b}{2} \left(-\omega_1 \frac{y_o - a}{\sqrt{x_o^2 + (y_o - a)^2}} + \omega_3 \frac{y_o + a}{\sqrt{x_o^2 + (y_o + a)^2}} \right. \\
 &\quad \left. - \omega_4 \frac{z_o - h}{\sqrt{x_o^2 + (z_o - h)^2}} + \omega_2 \frac{z_o + h}{\sqrt{x_o^2 + (z_o + h)^2}} \right) \\
 E_y &= bx_o \int \frac{(y_o - y) dy dx}{p^4} = -\frac{b}{2} \left[\frac{x_o}{\sqrt{x_o^2 + (y_o - y)^2}} \tan^{-1} \frac{z_o - z}{\sqrt{x_o^2 + (y_o - y)^2}} \right]_{-a, -h}^{a, h} \\
 &= \frac{b}{2} \left[\omega_1 \frac{x_o}{\sqrt{x_o^2 + (y_o - a)^2}} - \omega_3 \frac{x_o}{\sqrt{x_o^2 + (y_o + a)^2}} \right] \\
 E_z &= bx_o \int \frac{(z_o - z) dy dz}{p^4} = -\frac{b}{2} \left[\frac{x_o}{\sqrt{x_o^2 + (z_o - z)^2}} \tan^{-1} \frac{y_o - y}{\sqrt{x_o^2 + (z_o - z)^2}} \right]_{-a, -h}^{a, h} \\
 &= \frac{b}{2} \left[\omega_4 \frac{x_o}{\sqrt{x_o^2 + (z_o - h)^2}} - \omega_2 \frac{x_o}{\sqrt{x_o^2 + (z_o + h)^2}} \right]
 \end{aligned} \tag{41}$$

但し $\omega_1 = \angle ASB$, $\omega_2 = \angle BSC$, $\omega_3 = \angle CSD$, $\omega_4 = \angle DSA$.

(41) は次に示す尾本氏*の述べられた多角形光源の場合の法則の特定の場合にすぎない。光源が多角形である場合には、S 點に於て各邊の含む角を ω 、各邊と S 點との決定する平面と今考へてゐる被照面とのなす角を δ (各邊と S 點の決定する平面の正方向は光源のある側にむかふものとす) ととれば照明 E は

$$E = \frac{b}{2} \Sigma \omega \cdot \cos \delta \dots \dots \dots (42)$$

となり Σ は多角形の全邊について加へ合せることをあらはす。

$$\begin{aligned}
 E_\phi &= \sin \theta_o \cos \phi_o \cdot E_x + \sin \theta_o \sin \phi_o \cdot E_y + \cos \theta_o \cdot E_z \\
 &= \frac{ahb \sin \theta_o \cos \phi_o}{2} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{\omega_1}{\sqrt{x_o^2 + (y_o - a)^2}} + \frac{\omega_3}{\sqrt{x_o^2 + (y_o + a)^2}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{a} \left(\frac{\omega_4}{\sqrt{x_o^2 + (z_o - h)^2}} + \frac{\omega_2}{\sqrt{x_o^2 + (z_o + h)^2}} \right) \right] \dots \dots \dots (43)
 \end{aligned}$$

θ_o 及 ϕ_o は圖に明かであらう。この場合には $I = 4ah \cdot b \cdot \sin \theta_o \cos \phi_o$ となるから

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{\rho_o^2}{8} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{\omega_1}{\sqrt{x_o^2 + (y_o - a)^2}} + \frac{\omega_3}{\sqrt{x_o^2 + (y_o + a)^2}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{a} \left(\frac{\omega_4}{\sqrt{x_o^2 + (z_o - h)^2}} + \frac{\omega_2}{\sqrt{x_o^2 + (z_o + h)^2}} \right) \right] \dots \dots \dots (44)
 \end{aligned}$$

第十六圖 矩形板

- I $\frac{a}{h} = 1$
 II $\frac{a}{h} = \frac{1}{2}$
 III $\frac{a}{h} < \frac{1}{10}$

第十六圖は x 軸上で $a=h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{10}h$ 及 0 に對する C 曲線を示す。この場合には幅が長さの半分よりも小さければ ρ_c が光源の長さの二倍に相當する位近くても幅はないものと考えて差支ない。

x_c が零になつた時の E_x, E_y 及 E_z の極限值は S の位置及近寄り方に因て異つた値をとる。S 點が板上の點に近付く時には $E_x \rightarrow \pi b$ 、板外の同じ平面上の點に近付く時には $E_x \rightarrow 0$ 、又端を含み光源と δ なる角をなす平面に沿ふて近付く時は $\frac{\pi b}{2}(1+\cos\delta)$ となる。特に $\delta = \frac{\pi}{2}$ 即ち $y_c = \pm a$ 又は $z_c = \pm h$ なる面に沿ふて近付く時には $\frac{\pi b}{2}$ となる。又もし S 點が隅に近付く時にはその近付く方向がその隅に會する二つの端に夫々 η 及 ζ と云ふ角 (η は y 軸に平行な端となす角、 ζ は z 軸と平行な軸となす角)と

すれば

$$E_x \rightarrow \frac{b}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \eta \cdot \frac{\cos \zeta}{\sin \eta} + \zeta \cdot \frac{\cos \eta}{\sin \zeta} \right]$$

となり特に $\eta = \zeta = \frac{\pi}{2}$ の時には即ち $y_c = \pm a$ 及 $z_c = \pm h$ であらはされる四直線に沿うて近寄る時には $E_x \rightarrow \frac{\pi b}{4}$ となる。

E_y の値は近寄つてから S が AB にも CD にもない時には $E_y \rightarrow 0$ 、上に述べた平面に沿ふて AB 又は CD に近寄る時には $E_y \rightarrow \pm \frac{\pi b}{2} \sin \delta$ (正號は AB に、負號は CD に於て) 特に $\delta = \frac{\pi}{2}$ の時には $E_y \rightarrow \pm \frac{\pi b}{2}$ 。

E_z の値は E_y の場合に對應して DA 又は BC の上では $E_z \rightarrow \pm \frac{\pi b}{2} \sin \delta$ で其他の點

では $E_z \rightarrow 0$. 特に $\delta = \frac{\pi}{2}$ の時には $E_z \rightarrow \frac{\pi b}{2}$

また S が隅に近寄る時にはその方向が x 軸となす角を ξ とし、 η 及 ς を前の通りにとると

$$E_y \rightarrow -\frac{\varsigma b}{2} \frac{\cos \xi}{\sin \varsigma},$$

$$E_z \rightarrow -\frac{\eta b}{2} \frac{\cos \xi}{\sin \eta};$$

となり特に $\xi=0$, $\eta=\varsigma=\frac{\pi}{2}$ の時には $E_y \rightarrow \pm \frac{\pi b}{4}$, $E_z \rightarrow \pm \frac{\pi b}{4}$.

しかし $z_0=0$ の幾何學的平面では $E_y=0$, $E_z=0$, E_x は板上で πb , 端で $\pm \frac{\pi b}{2}$, 隅で $\pm \frac{\pi b}{4}$ である。

h が無限に大きくなると ω_1 及 ω_3 は π になり ω_2 及 ω_4 は零となる、よつて

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{b\pi}{2} \left[\frac{y_0+a}{\sqrt{x_0^2+(y_0+a)^2}} - \frac{y_0-a}{\sqrt{x_0^2+(y_0-a)^2}} \right] \\ E_y &= \frac{b\pi}{2} \left[\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+(y_0-a)^2}} - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+(y_0+a)^2}} \right] \\ E_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

$$E_r = \frac{\pi abx_0}{2r_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x_0^2+(y_0-a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x_0^2+(y_0+a)^2}} \right] \dots\dots\dots (45a)$$

Hyde⁽¹⁾ は此に對應する E を求めてゐるがそれは (45) を (1b) によつてあらはしたものと同一。

尙 a が同時に無限大になれば $E_x = \pi b$, $E_y = E_z = 0$ となり前節に示したものと符合する。

次に h は有限であつて a が非常に小さくなつたとすれば $\omega_1 = \omega_3 = \omega$, $\omega_2 = \omega_4 = 0$ となるから

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{ab}{x_0^2+y_0^2} \left[\frac{\omega}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} + \frac{z_0+h}{x_0^2+y_0^2+(z_0+h)^2} - \frac{z_0-h}{x_0^2+y_0^2+(z_0-h)^2} \right] \\ E_y &= \frac{ab}{x_0^2+y_0^2} \left[\begin{array}{c} x_0 y_0 \\ \sqrt{x_0^2+y_0^2} \end{array} \left[\begin{array}{c} \omega \\ \sqrt{x_0^2+y_0^2} \end{array} + \frac{z_0+h}{x_0^2+y_0^2+(z_0+h)^2} - \frac{z_0-h}{x_0^2+y_0^2+(z_0-h)^2} \right] \right] \\ E_z &= ab x_0 \left[\frac{1}{x_0^2+y_0^2+(z_0-h)^2} - \frac{1}{x_0^2+y_0^2+(z_0+h)^2} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots (46)$$

Huutek⁽¹¹⁾ はこの E_x に對應するものを求めてゐる。

$$E_p = abh \sin \theta \cos \phi \left[\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \frac{\omega}{hr_0} \right]$$

$$= \frac{I}{4} \left[\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \frac{\omega}{hr_0} \right] \dots \dots \dots (47)$$

但し $I = 4 abh \sin \theta \cos \phi$ となるからである。 p_1 は S 點から光源の下端に至る距離、 p_2 は上端に至る距離をあらはす。

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{I}{2} \left[\frac{z_0 + h}{p_1^2} - \frac{z_0 - h}{p_2^2} + \frac{\omega}{r_0} \right] \\ E_z &= \frac{I r_0}{2} \left[\frac{1}{p_2^2} - \frac{1}{p_1^2} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (48)$$

(47) 及 (48) から明かなやうに全く直線光源の場合に對應する。((12a)(11b)(11c) 参照) たゞ I の値がちがふのみである。前者では平面的であるが後者は圓柱的である。故に C 曲線も逆自乗法則からのはずれの等位曲線も第五圖及第六圖をそのまま用ふることが出来る。

5. 球 (半徑 a)

此の場合には共心の極座標系を用ふるのが便利であることは云ふまでもない。しかる時は

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= 0 \\ E_\phi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (51a)$$

であるから唯 E_ρ のみを計算すればよい。しかも此の値は既に Rosa⁽⁸⁾ の示すやうに

$$\left. \begin{aligned} E_\rho &= \frac{\pi a^2 b}{\rho_0^2} \\ I &= \pi a^2 b \text{ であるから} \\ &= \frac{I}{\rho_0^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (51b)$$

となり

$$C = 1 \dots \dots \dots (52)$$

となる。即ち $\pi a^2 b$ の點源と全く同じ。

6. 圓 柱 (長さ $2h$ 、半径 a)

共軸の圓柱座標系を用ひる。

$$E_\phi = 0 \dots \dots \dots (61a)$$

光原の上に $(a_1 \phi_1 z)$ に極小面積 $a d\phi \cdot dz$ を考へると

$$p^2 = (z_0 - z)^2 + r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos \phi,$$

$$\frac{\cos \alpha}{r_0 \cos \phi - a} = \frac{\cos \beta_1'}{r_0 - a \cos \phi} = \frac{\cos \beta_3'}{z_0 - z} = \frac{1}{p}$$

となるから

$$\begin{aligned} E_r &= \int \frac{ab(r_0 - a \cos \phi)(r_0 \cos \phi - a) d\phi dz}{p^4} \\ &= -\frac{ab}{2} \left[\frac{\sin \phi}{\sqrt{r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos \phi}} \tan^{-1} \frac{z_0 - z}{\sqrt{r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos \phi}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{z_0 - z}{2ar_0} \left\{ \phi - \frac{2[(z_0 - z)^2 + r^2 + a^2]}{\sqrt{[(z_0 - z)^2 + (r_0 + a)^2][(z_0 - z)^2 + (r_0 - a)^2]}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{(z_0 - z)^2 + (r_0 + a)^2}{(z_0 - z)^2 + (r_0 - a)^2}} \tan \frac{\phi}{2} \right) \right\} \right]_{-h, -\cos^{-1} \frac{a}{r_0}}^{h, \cos^{-1} \frac{a}{r_0}} \\ &= -\frac{b}{r_0} \left[a \left\{ \tan^{-1} \frac{z_0 - h}{\sqrt{r_0^2 - a^2}} - \tan^{-1} \frac{z_0 + h}{\sqrt{r_0^2 - a^2}} \right\} + \frac{z_0 - h}{2} \left\{ \frac{u_1 + 1}{\sqrt{u_1}} \cot^{-1} \sqrt{\frac{t}{u_1}} - 2 \cot^{-1} \sqrt{t} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{z_0+h}{2} \left\{ \frac{u_2+1}{\sqrt{u_2}} \cot^{-1} \sqrt{\frac{t}{u_2}} - 2 \cot^{-1} \sqrt{t} \right\} \dots \dots \dots (61b)$$

$$\begin{aligned} E_z &= \int \frac{ab(z_0-z)(r_0 \cot \phi - a) d\phi dz}{p^4} \\ &= \frac{b}{4} \left[-\phi + \frac{2[(z_0-z)^2 + r_0^2 - a^2]}{\sqrt{[(z_0-z)^2 + (r_0+a)^2][(z_0-z)^2 + (r_0-a)^2]}} \right. \\ &\quad \left. \tan^{-1} \sqrt{\frac{(z_0-z)^2 + (r_0+a)^2}{(z_0-z)^2 + (r_0-a)^2}} \tan \frac{\phi}{2} \right] \frac{h, \cos^{-1} \frac{a}{r_0}}{-h, \cos^{-1} \frac{a}{r_0}} \\ &= \frac{b}{1+t} \left[\frac{t+u_1}{\sqrt{u_1}} \cot^{-1} \sqrt{\frac{t}{u_1}} - \frac{t+u_2}{\sqrt{u_2}} \cot^{-1} \sqrt{\frac{t}{u_2}} \right] \dots \dots \dots (61c) \end{aligned}$$

茲に $t = \frac{r_0+a}{r_0-a}$, $u_1 = \frac{(z_0-h)^2 + (r_0+a)^2}{(z_0-h)^2 + (r_0-a)^2}$, $u_2 = \frac{(z_0+h)^2 + (r_0+a)^2}{(z_0+h)^2 + (r_0-a)^2}$,

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{b}{\rho_0} \left[a \tan^{-1} \frac{2h\sqrt{r_0^2-a^2}}{r_0^2+z_0^2-a^2-h^2} - \frac{z_0}{2} \left\{ \frac{1+u_1 t}{\sqrt{u_1}} \cot^{-1} \sqrt{\frac{t}{u_1}} + \frac{1+u_2 t}{\sqrt{u_2}} \cot^{-1} \sqrt{\frac{t}{u_2}} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{h}{2} \left\{ \frac{u_1+1}{\sqrt{u_1}} \cot^{-1} \sqrt{\frac{t}{u_1}} + \frac{u_2+1}{\sqrt{u_2}} \cot^{-1} \sqrt{\frac{t}{u_2}} - 4 \cot^{-1} \sqrt{t} \right\} \right] \dots (62) \end{aligned}$$

しかるに $I = 4ahb \sin \theta$ であるから

$$\begin{aligned} C &= \frac{\rho_0}{4ah \sin \theta_0} \left[a \tan^{-1} \frac{2h\sqrt{r_0^2-a^2}}{r_0^2+z_0^2-a^2-h^2} - \frac{z_0}{2} \left\{ \frac{1+u_1 t}{\sqrt{u_1}} \cot^{-1} \sqrt{\frac{t}{u_1}} + \frac{1+u_2 t}{\sqrt{u_2}} \cot^{-1} \sqrt{\frac{t}{u_2}} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{2} \left\{ \frac{u_1+1}{\sqrt{u_1}} \cot^{-1} \sqrt{\frac{t}{u_1}} + \frac{u_2+1}{\sqrt{u_2}} \cot^{-1} \sqrt{\frac{t}{u_2}} - 4 \cot^{-1} \sqrt{t} \right\} \right] \dots (63) \end{aligned}$$

$z_0=0$ の時は $E_z=0 \dots \dots \dots (64a)$

$$E_r = \frac{b}{r_0} \left[2a \tan^{-1} \frac{h}{\sqrt{r_0^2-a^2}} + h \left(\frac{u+1}{\sqrt{u}} \cot^{-1} \sqrt{\frac{t}{u}} + 2 \cot^{-1} \sqrt{t} \right) \right] \dots \dots \dots (64b)$$

但し $u = \frac{h^2 + (r_0-a)^2}{h^2 + (r_0+a)^2}$.

この (64b) は Hyde^{(13),(1)} によつて求められたものと同じ。

$r_0 < a$ であると $E=0$

r_0 が a に近付く時の極限值は $h^2 < z_0^2$ の時 $E_r=0$, $E_z=0$, $h^2 > z_0^2$ の時 $E_r=\pi b$, $E_z=0$. また S 點が兩底 (光源と反對側を正とす) と θ なる角をなしその底への正射影がその最後の S 點を通る半徑と ϕ をなす直線に沿つて兩端に近付いて行く時は $E_r \rightarrow \frac{\pi b}{2} \left(1 - \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \sin^2 \phi}} \right)$, $E_z \rightarrow \pm \frac{\pi b}{2} \frac{\cos \phi \cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \sin^2 \phi}}$ となり特に兩底の平

面の中で近付いて行けば $\theta=0$ であるから $E_r \rightarrow \frac{\pi b}{2}$, 尚軸にひかつて近付いて行けば $\phi=0$ であるから $E_z \rightarrow \frac{\pi b}{2}$,

h が無限に大きくなれば $u_1 \rightarrow 1, u_2 \rightarrow 1$ であるから

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{\pi ab}{r_0} \\ E_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (65)$$

即ち Rosa⁽⁸⁾ の示すやうに E_r は軸からの距離に逆比例し方向も軸に垂直の方向へひかふ。

h が無限に小なれば

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{bh}{r_0} \left[\frac{u_3 - a}{u_3 + t} \sqrt{t} + \frac{u_3 + 1}{\sqrt{u_3}} \cot^{-1} \sqrt{\frac{t}{u_3}} - 2 \cot^{-1} \sqrt{t} \right] \\ E_z &= \frac{bh}{z_0} \frac{(t - u_3)(u_3 - 1)}{t^2 - 1} \left[\frac{t + u_3}{u_3^2 + t^2} \sqrt{t} - \frac{t}{\sqrt{u_3}} \cot^{-1} \sqrt{\frac{t}{u_3}} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots (66)$$

但し $u_3 = \frac{z_0^2 + (r_0 + a)^2}{z_0^2 + (r_0 - a)^2}$

Hyde⁽¹⁾ は $z_0 = 0$ の時の E_r を求めてゐる。此の場合には $u_3 = t^2$ となる。

第十八圖
圓柱

I	$\frac{a}{h} = 1$
II	$\frac{a}{h} = \frac{1}{2}$
III	$\frac{a}{h} = \frac{1}{50}$
IV	$\frac{a}{h} = \frac{1}{100}$
V	$\frac{a}{h} = 0$

a が零になると E_r 及 E_z は丁度 $2ab$ の固有輝度を持つた直線光源と同じになる。
(11b) 及 (11c) 参照)

圓柱の大きさが照明に及ぼす影響を見るために種々の $\frac{a}{h}$ の比をとつて $z_0=0$ の方向で C を求めて見た。(第十八圖)。此の圖によつて明かなやうにもし直徑が長さの百分の一以下の太さの時には長さ等しく $2ab$ なる輝度を有する直線と考へて差支ない。またもし距離が長さの五倍位より大ならば直徑が長さの五十分の一位の太さでも直線と考へて差支なくなる。

第六章 光束の計算

前章に於て分照明の値を求めたがこれ等の値を用ふれば如何なる方向でも如何なる位置でもある面へ受ける全光束を計算することが出来る。

しかし被照面の平面が光源の或部分を切る時に面の一方の照明のみを考へるから E_z は前章で求めたものと異つた値となつて來ることは忘れてはならない。たとへば既に述べた通り被照面の兩面の照明が等しい時にはその時の分照明の價は前章では零であるとせられてゐる。所々に對稱からとあるのはこれに外ならない。(附記一)。

光束の計算は一般に決して簡單ではない。光源が面であつて被照面が圓板、矩形若くは一般に多角形の時には光源の微小部分を S 點にあき、被照面が光源と考へた時の微小部分の面上の照明は丁度この微小部分から被照面に送られた全光束となる。この關係からかう云ふ場合の總光束を計算することが出来る場合がある。

また光源も被照面も圓板であつて同一の球の小圓として考へることの出来る場合には等光束球の理論と同じやうにして凹球面を以ておきかへて簡單に

$$\Phi = \frac{b SS'}{D^2}$$

とすることが出来る。茲に S, S' は光源及被照面のあきかへられた凹球面の面積、 D はこの球の直徑をあらはす。書き直せば

$$\Phi = \pi^2 b \cdot hh'$$

h 及 h' は二つの弓形の高さである。

第七章 摘 要

ある點の照明とはその點に於て今考へてゐる方向に垂直にあかれた平面上の光束密度である。その點の最大密度は一つのベクトルと考へられ次の式の一つであら

はすことが出来る。

$$E_x = xE_x + yE_y + zE_z \dots \dots \dots (3)$$

$$= uE_\rho + vE_\theta + wE_\phi \dots \dots \dots (3a)$$

$$= rE_r + sE_\phi + tE_z \dots \dots \dots (3b)$$

(3) は直交座標系、(3a) は極座標系、(3b) は圓柱座標系の場合の式である。

ある座標系で三つの分照明を求めることが出来ると、次の (1b) を便つて任意の方向の照明 E を求めることが出来る。

$$E = E_1 \cos \gamma_1 + E_2 \cos \gamma_2 + E_3 \cos \gamma_3 \dots \dots \dots (1b)$$

E_1, E_2, E_3 は三つの分照明、 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ は E の方向と E_1, E_2, E_3 の方向とのなす角を示す。

光源が點源(均一でなくても)又は球の場合には

$$E_\rho = \frac{I}{\rho^2} \dots \dots \dots (10)$$

従つて $C = 1 \dots \dots \dots (9)$

となり E_ρ の方向は動徑の方向である。

光源が次に示す形の何れかである場合には 第五章によつて如何なる大さの場合でも三つの分照明を求めることが出来る。

- (1) 直 線
- (2) 圓 弧
- (3) 板 (圓形又は多角形)
- (4) 圓 柱

光源がその幾何學的の中心に集中されたと考へた時に逆自乗の法則によつて求めた値を實際の値に校正すべき係數 C を各々の場合について求めることが出来る。光源から被照面までの距離が光源の大さに比較して小さい場合にはこの C は 1 と考へられない。直線の場合にはその直線と 60 度をなす方向、圓板の場合には 45 度をなす方向では C は殆ど 1 即ち逆自乗の法則があてはまる。

これ等の分照明を用ひてある面に入る全光束を求めることが出来る。

もし光源も被照面も共に一つの球の二圓となるやうな球が考へられる場合にはその光源から出て被照面に入る光束は

$$\Phi = \pi^2 b \cdot h h'$$

で求められる。 h 及 h' は二つの圓板と球となすそれぞれの球帯の高さである。

本論文を結ぶにあつて、種々な便宜、助言、援助を與へられた多くの人々に深く感謝の意を表はしたい。特に本論文の煩雜な數計算、その數値の圖示等は村木勝一、伊藤太吉、永井虎雄の三君の手によつてせられたのであることを記して置きたい。また東京帝國大學の大山松次郎先生、尾本義一、星合正治の諸氏の好意によつて既刊の諸文獻を読むことが出來たので、特に尾本氏は親切にも文獻について助言を與へられ、等光束球の理論及多角形光源による照明の一般式を教示せられ、それを本論文に應用することを許されたことは感謝に堪へない。最後に電氣試験所第一部の神保成吉、米田麟吉、沼倉三郎の諸氏の常に變らない友情をもつて、貴重な助言、批評、討論を與へられたことを茲に記して感謝の意を表はす。

参 考 文 献

- (1) Edward P. Hyde; Bull. Bureau of Standards, Vol. 3, p. 81, 1907.
- (2) K. Norden; E. T. Z., p. 883, 1908.
- (3) M. D. Cooper; Elect. World, Vol. 54, p. 711, 1909.
- (4) Joseph Pole; E. T. Z., p. 440, 1911.
- (5) K. Norden; E. T. Z., p. 757, 1907.
- (6) C. P. Steinmetz; Radiation, Light, and Illumination, p. 197, 1918.
- (7) Paul D. Foote; Bull. Bureau of Standards, Vol. 12, p. 583, 1915.
- (8) E. B. Rosa; Bull. Bureau of Standards, vol. 6, p. 543, 1910.
(As we could not get the original paper, we referred to Barrow's "Light, Photometry and Illumination").
- (9) A. G. McAllister; Elec. World, Vol. 56, p. 1356, 1910.
- (10) 吉岡美勝; オーム, Vol. 8, No. 9, p. 330, 1921.
- (11) Adolf Hnatek; Z. f. Phys. Vol. 22, p. 186, 1924.
- (12) E. P. Hyde; Bull. Bureau of Standards, Vol. 2, p. 7.

(附記一) S 點に於て或分照明の方向に垂直な平面が光源を切る場合にはその分照明の値はその方向の照明の實際の値を與へはしない。云ふまでもなく單に照明と云ふ場合には面の一面のみを考へるが分照明と云ふ場合には兩面を考へるから分照明の大きさは丁度兩面の照明の實際値の差となり方向はその大きい方と同じくなる。

(附記二) Steinmentz*は光源が全く平面の同じ側にあれば照明はヴェクトルと考へて加へ合せることが出来るが兩側にまたがる時には考へられないと云つてゐるが、たとひ兩側にあつてもその一方のみについて考へるならば全く同様に取扱ふことが出来る。S面のS點に於ての切面が光源を切る場合にもその考へてゐる側だけの光源について考へれば全く同様にヴェクトルとして取扱つて差支ない。Steinmentzはまた球面上の照明の例を舉げてその上の照明はヴェクトルとして取扱へないと云つてゐるが球面上の極小面については夫々全く上のことが成立つからその場合でも確かにヴェクトルとして取扱へる。被照面が他の形をしてゐてもその面の間に反射等さへなければ全く同様に取扱へることは明かである。

* 参考文献(6). P. 286