有限要素法による磁気漏れ変圧器の磁界解析

中田 高義* 正会員 河瀬 順洋* 船越 浩昌*

Analysis of Characteristics of a Leakage Transformer by Using the Finite Element Method

Takayoshi Nakata Yoshihiro Kawase (Member)
and Hiroaki Funakoshi

(Department of Electrical Engineering, Okayama University)

ABSTRACT

Recently the finite element method has been introduced for the analysis of non-linear magnetic field. A new method has been developed by us to analyze flux distributions in transformers taking into account the secondary load. In this paper, the formulation of the method is performed and the characteristics of a leakage transformer are analyzed using this method. The following items are cleared by the analysis:

- (1) Flux distribution with time.
- (2) Effect of load resistance on the flux distribution.
- (3) Relationship between the secondary voltage and current.
- (4) Primary and secondary current-waveforms.

Computed results agree well with experimental ones.

The newly developed method is applicable not only to the leakage transformer but also to transformers on load.

1. ま え が き

蛍光ランプ用安定器などに用いられる磁気漏れ変圧器の高性能設計のためには、まずマイクロな磁束および吸引力分布を明らかにする必要がある。磁気漏れ変圧器の磁界解析は、単相変圧器の負荷時の磁束分布を求める問題と同じ解析法となるが、漏れインダクタンス、二次電流の大きさなど、種々の因子が相互作用を及ぼし合って解析は容易ではない。また鉄心の磁気特性は非線形性を有しているので解析はさらに複雑になる。

そこでわれわれは、電子計算機の高速、大容量化に伴って、電磁界の新しい数値解析法として脚光を浴びている、有限要素法をさらに発展させた新しい手法を開発した。すなわち一次および二次回路に対しそれぞれ電圧に関する方程式を立て、通常の有限要素法の式と連立させ、一次および二次電流と磁束を未知数とする新しい非線形磁界解析法を開発した。

本論文では、まず変圧器の負荷時を有限要素法を用いて解く新しい手法について述べた。次にこれを用いて磁気漏れ変圧器の磁束分布の時間的変化、および漏れ通路のギャップが磁気特性に及ぼす影響を明らかにした。最後に磁束分布を実測と比較することにより本手法の妥当性を示した。

2. 数 値 解 析

2.1 解析モデルと境界条件

図1に蛍光ランプ用安定器などに用いられる磁気漏れ変圧器の構造および結線図を示す。一次巻線の巻数 N_1 は735(ターン)、内部抵抗 R_1 は15.4 (Ω)、二次巻線の巻数 N_2 は810 (ターン)、内部抵抗 R_2 は20.5 (Ω) である。 V_1 , I_1 , V_2 , I_2 はそれぞれ一次、二次の電圧および電流であり、 R は負荷抵抗である。

図1 磁気漏れ変圧器の構造および結線図

解析領域は、磁束分布の対称性および磁束が鉄心の外側へはほとんど漏れないことより、図1の α - β - γ - δ - α とした。図2に分割図を示す。境界条件²⁾は、 α - β - γ - δ - α をベクトルポテンシャル A がゼロの固定境界条件²⁾ とする。

* 岡山大学工学部電気工学科
本原稿は昭和57年11月15日、第6回日本応用磁気学会学術講演会で関連講演をした。

図2 分割図

2.2 基礎方程式

渦電流を無視した磁界解析に必要な基礎方程式は、次式で与えられる²⁾。

$$\text{rot}(\nu \text{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{J}_0 \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{A}$ はベクトルポテンシャル、 ν は磁気抵抗率、 $\mathbf{J}_0$ は強制電流密度である。二次元場では(1)式は次式となる²⁾。

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J_0 \quad (2)$$

ただし、 A および J_0 はそれぞれ A 、 J_0 の z 方向成分である。

印加電圧が与えられる電気機器では、(1)式における $\mathbf{J}_0$ は未知量である。このように印加電圧が与えられた条件のもとで、(1)式を有限要素解析する手法を「電圧が与えられた有限要素法」³⁾と呼んでいる。磁気漏れ変圧器の場合も印加電圧が与えられ、電流は未知であるので本手法を用いる。磁気漏れ変圧器の場合は、負荷電流も考慮しなければならないので、以下に述べる手法を用いなければ解析が困難である。

図1において、一次および二次側でそれぞれ電圧 V_1 、 V_2 に関する方程式を立てると、一次側では、

$$V_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} + R_1 I_1 \quad (3)$$

二次側では、

$$V_2 = R_2 I_2 \\ = -\frac{d\Phi_2}{dt} - R_2 I_2 \quad (4)$$

ここで、 R_1 、 R_2 はそれぞれ一次および二次の巻線抵抗、 R はランプ抵抗、 I_1 、 I_2 はそれぞれ一次および二次電流である。また Φ_1 は一次巻線との磁束鎖交数、 Φ_2 は二次巻線との磁束鎖交数である。(3)式において、 V_1 は外部から与えられるので既知となる。しかし、(4)式の V_2 は I_2 によって変化するので未知数となるので、そのままでは未知数の数が方程式の数より多くなり、解析できない。よって(4)式を次式のように変形すれば未知数の数が少なくでき解析が可能となる。

$$0 = \frac{d\Phi_2}{dt} + (R_2 + R) I_2 \quad (5)$$

Φ_1 、 Φ_2 をベクトルポテンシャル A 、また I_1 、 I_2 を電流密度 J_0 を用いて表わすと(3)、(5)式は次式になる⁴⁾。

$$V_1 = \frac{d}{dt} \left(2L \cdot T_{c1} \int_{S_1} A dx dy \right) + R_1 S_{t1} J_{01} \quad (6)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left(2L \cdot T_{c2} \int_{S_2} A dx dy \right) + (R_2 + R) S_{t2} J_{02} \quad (7)$$

ここで、 L は鉄心の厚さ、 T_{c1} 、 T_{c2} は一次、二次巻線の単位面積当たりの巻数、 S_1 、 S_2 は、一次、二次巻線の領域、 S_{t1} 、 S_{t2} は、一次、二次導体の断面積、 J_{01} 、 J_{02} は一次、二次巻線の電流密度である。

2.3 定式化

(2)式にガラーキン法を適用し、重み関数として補間関数 N_i を

用いると次式で定義される G_i はゼロになる²⁾。

$$G_i = \iint_S N_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) + J_0 \right\} dx dy = 0 \quad (8)$$

ここで S は解析領域を示す。

ある一つの要素 e に着目すると(8)式は次式となる。

$$G_i^{(e)} = \iint_{S^{(e)}} \left\{ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \left(\nu^{(e)} \frac{\partial A^{(e)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \left(\nu^{(e)} \frac{\partial A^{(e)}}{\partial y} \right) \right\} dx dy \\ - \iint_{S^{(e)}} J_0^{(e)} N_i^{(e)} dx dy \quad (9)$$

ここで $S^{(e)}$ 、 $N_i^{(e)}$ 、 $\nu^{(e)}$ 、 $J_0^{(e)}$ は、それぞれ要素 e の解析領域、補間関数、磁気抵抗率および電流密度である。

一次三角形要素の場合、 $A^{(e)}$ は補間関数 N_{ke} を用いると次式で表わされる²⁾。

$$A^{(e)} = \sum_{k=1}^3 N_{ke} A_{ke} \quad (10)$$

(10)式を(9)式に代入すると次式となる。

$$G_i^{(e)} = \sum_{k=1}^3 \iint_{S^{(e)}} \nu^{(e)} \left(\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_{ke}}{\partial x} + \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_{ke}}{\partial y} \right) A_{ke} dx dy \\ - \iint_{S^{(e)}} J_0^{(e)} N_i^{(e)} dx dy \quad (11)$$

一次三角形要素を用いた場合の補間関数 $N_i^{(e)}$ は、次式で表わされる²⁾。

$$N_i^{(e)} = \frac{1}{2\Delta^{(e)}} (b_i^{(e)} + c_i^{(e)} x + d_i^{(e)} y) \quad (12)$$

ここで $\Delta^{(e)}$ は要素 e の面積である。また c_i 、 d_i は循環する添字 l 、 m 、 n によって次式で表わされる。

$$c_l = y_m - y_n \quad (13)$$

$$d_l = x_n - x_m \quad (14)$$

ただし、たとえば x_m 、 y_m はそれぞれ要素 e の頂点 m の x 、 y 座標を表わす。(12)式を(11)式に代入し整理すると次式となる。

$$G_i^{(e)} = \frac{\nu^{(e)}}{4\Delta^{(e)}} \sum_{k=1}^3 (c_i^{(e)} c_{ke} + d_i^{(e)} d_{ke}) A_{ke} - \frac{\Delta^{(e)} J_0^{(e)}}{3} \quad (15)$$

(6)、(7)式の時間微分項は、磁性体の非線形性を考慮するため差分近似する⁵⁾。差分近似法として後退差分を用いて、時刻 t と $t + \Delta t$ におけるベクトルポテンシャルを A^t 、 $A^{t+\Delta t}$ とすれば、時間微分項は次式となる⁵⁾。

$$\frac{\partial A^{t+\Delta t}}{\partial t} = \frac{A^{t+\Delta t} - A^t}{\Delta t} \quad (16)$$

(10)、(16)式を(6)、(7)式に代入すると次のようになる。

$$V_1^{t+\Delta t} = 2T_{c1} \cdot L \sum_{e=1}^{NL_1} \frac{\Delta^{(e)}}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{A_{ke}^{t+\Delta t} - A_{ke}^t}{\Delta t} \\ + R_1 \cdot S_{t1} \cdot J_{01}^{t+\Delta t} \quad (17)$$

$$0 = 2T_{c2} \cdot L \sum_{e=1}^{NL_2} \frac{\Delta^{(e)}}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{A_{ke}^{t+\Delta t} - A_{ke}^t}{\Delta t} \\ + (R_2 + R) S_{t2} \cdot J_{02}^{t+\Delta t} \quad (18)$$

ここで NL_1 、 NL_2 は、それぞれ一次、二次巻線を構成している要素数である。

次式で定義される F_1 、 F_2 は(17)、(18)式よりゼロになる。

$$F_1^{t+\Delta t} = V_1^{t+\Delta t} - \frac{2T_{c1} \cdot L}{3\Delta t} \sum_{e=1}^{NL_1} \Delta^{(e)} \sum_{k=1}^3 (A_{ke}^{t+\Delta t} - A_{ke}^t)$$

$$-R_1 \cdot S_{t1} \cdot J_{01}^{t+dt} = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$F_2^{t+dt} = -\frac{2T_{c2} \cdot L}{3\Delta t} \sum_{e=1}^{NL_2} \Delta^{(e)} \sum_{k=1}^3 (A_{ke}^{t+dt} - A_{ke}^t) \\ -(R_2 + R) S_{t2} \cdot J_{02}^{t+dt} = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

ニュートン・ラプソン法²⁾で、非線形解を求めるための方程式をマトリクス表示すれば、次の非対称ヘリ付きバンドマトリクス³⁾となる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial G_i^{t+dt}}{\partial A_j^{t+dt}} \left\{ \frac{\partial G_i^{t+dt}}{\partial J_{01}^{t+dt}} \right\} \left\{ \frac{\partial G_i^{t+dt}}{\partial J_{02}^{t+dt}} \right\} \\ \left\{ \frac{\partial F_1^{t+dt}}{\partial A_j^{t+dt}} \right\} \frac{\partial F_1^{t+dt}}{\partial J_{01}^{t+dt}} \frac{\partial F_1^{t+dt}}{\partial J_{02}^{t+dt}} \\ \left\{ \frac{\partial F_2^{t+dt}}{\partial A_j^{t+dt}} \right\} \frac{\partial F_2^{t+dt}}{\partial J_{01}^{t+dt}} \frac{\partial F_2^{t+dt}}{\partial J_{02}^{t+dt}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ \delta A_j^{t+dt} \} \\ \delta J_{01}^{t+dt} \\ \delta J_{02}^{t+dt} \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} \{ -G_i^{t+dt} \} \\ -F_1^{t+dt} \\ -F_2^{t+dt} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで、

$$G_i = \sum_{e=1}^{NE} G_i^{(e)} \quad (NE: \text{全要素数}) \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\frac{\partial G_i^{t+dt}}{\partial A_j^{t+dt}} = \sum_{e=1}^{NE} \left\{ \frac{\nu^{(e)t+dt}}{4\Delta^{(e)}} (c_i^{(e)} c_j^{(e)} + d_i^{(e)} d_j^{(e)}) \right. \\ \left. + \frac{2}{\Delta^{(e)}} \frac{\partial \nu^{(e)t+dt}}{\partial (B^{(e)t+dt})^2} \sum_{k=1}^3 \frac{c_i^{(e)} c_{ke} + d_i^{(e)} d_{ke}}{4\Delta^{(e)}} \right. \\ \left. \cdot A_{ke}^{t+dt} \sum_{l=1}^3 \frac{c_j^{(e)} c_{le} + d_j^{(e)} d_{le}}{4\Delta^{(e)}} A_{le}^{t+dt} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\frac{\partial G_i^{t+dt}}{\partial J_{01}^{t+dt}} = -\sum_{e=1}^{NL_1} \frac{\Delta^{(e)}}{3} \delta_i^{(e)} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\frac{\partial G_i^{t+dt}}{\partial J_{02}^{t+dt}} = -\sum_{e=1}^{NL_2} \frac{\Delta^{(e)}}{3} \delta_i^{(e)} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\frac{\partial F_1^{t+dt}}{\partial A_j^{t+dt}} = -\frac{2T_{c1} \cdot L}{3\Delta t} \sum_{e=1}^{NL_1} \Delta^{(e)} \delta_j^{(e)} \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\frac{\partial F_1^{t+dt}}{\partial J_{01}^{t+dt}} = -R_1 \cdot S_{t1} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\frac{\partial F_1^{t+dt}}{\partial J_{02}^{t+dt}} = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\frac{\partial F_2^{t+dt}}{\partial A_j^{t+dt}} = -\frac{2T_{c2} \cdot L}{3\Delta t} \sum_{e=1}^{NL_2} \Delta^{(e)} \delta_j^{(e)} \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\frac{\partial F_2^{t+dt}}{\partial J_{01}^{t+dt}} = 0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\frac{\partial F_2^{t+dt}}{\partial J_{02}^{t+dt}} = -(R_2 + R) S_{t2} \quad \dots\dots\dots (31)$$

ただし、 $\delta_i^{(e)}$ はクロネッカーのデルタであり、 $B^{(e)}$ は要素 e の磁束密度である。

(21)式は時刻 $t+dt$ に関する式であるので、これを半周期全体にわたって連立させて解く、いわゆる「時間周期有限要素法」を用いて解く。「時間周期有限要素法」の詳細については文献(4)に譲る。

3. 解析および検討

3.1 磁束分布

図3に、負荷抵抗 R が271.4(Ω)の場合の磁束分布の時間的変化を示す。ただし、一次電圧が最大の瞬間を $\omega t = 0^\circ$ とした。

図3 磁束分布の時間的変化

$\omega t = 0^\circ$ から 90° 程度までは、一次側の磁束が増加するので、それを妨げるように二次電流が流れる。その結果、漏れ通路を通る磁束が多くなる。 $\omega t = 90^\circ$ から 150° 程度までは反対に一次側の磁束が減少するので、それを妨げるように二次電流が流れ漏れ通路を通る磁束が減少する。

図4 負荷抵抗 R を変化させたときの磁束分布 ($\omega t = 90^\circ$)

図4に負荷抵抗 R を変化させたときの磁束分布を示す。ただし、 $\omega t = 90^\circ$ だけとした。負荷抵抗を大きくするにつれて二次電流が小さくなるので、漏れ通路を通る磁束は少なくなることがよくわかる。

図5 二次側電圧—電流特性

図5に負荷抵抗を変化させたときの二次側電圧—電流特性を、漏れ通路のギャップ長 D をパラメータとして示す。この曲線は垂下特性を有しているから、電圧が大きい範囲では定電流とみなすことができる。すなわち電圧が大きく変化しても二次電流の変化は少ないことがわかる。またギャップが大きくなるにつれて磁束

は漏れ通路を通りにくくなるから、二次電流が増加することがわかる。

3.3 実験的検討

図 6 に磁束波形を記録するための測定回路を示す。ただし、負荷抵抗 R は $271.4(\Omega)$ とした。各磁路の磁束波形 ϕ_1, ϕ_L, ϕ_2

図 6 磁束波形測定回路

図 7 磁束波形

図 8 一次、二次電流の時間的変化

は、 $a-b, c-d, e-f$ 間に巻いたさぐりコイルの誘起電圧を積分し、 $X-Y$ レコーダに描かせることにより求めた。

図 7 に各部の磁束波形の測定値を示す。同図には計算波形も示した。実験波形と計算波形は良く一致している。すなわち、一次端子電圧が与えられた負荷時の磁界解析を行なうための本手法は妥当であることがわかる。図 7 から明らかなように、一次側の磁束 ϕ_1 は電圧とはほぼ 90° 位相が異なっており、 ϕ_2 は負荷電流により ϕ_1 より位相が遅れ、逆に ϕ_L は ϕ_1 より進むことがよくわかる。

図 8 に一次および二次電流の時間的変化を示す。同図には計算波形も示す。実験波形と計算波形はよく似ているが、一次電流のピーク値において実験値と計算値に差が生じている。これは実験に用いた磁気漏れ変圧器の鉄心は打ち抜きのため、磁気特性が悪くなったためと考えられるが、これについてはさらに検討する予定である。

4. む す び

本論文では、ポアソンの方程式と一次および二次回路の電圧に関する方程式を連立させ、一次端子電圧が与えられ、かつ二次負荷抵抗を考慮した磁束分布などを求める新しい有限要素法による解析の詳細を示した。本手法を用いれば磁気漏れ変圧器のミクロな磁束分布の空間的、かつ時間的な変化が正確に得られるばかりでなく、二次側電圧-電流特性なども容易に求められる。また鉄損や騒音を減少させる鉄心形状の設計が可能である⁶⁾。

本手法は、磁気漏れ変圧器だけでなく変圧器の負荷時の解析にも適用でき、今後ますます応用範囲が広がるであろう。本解析法をさらに発展させ、負荷抵抗の非線形性⁷⁾も考慮できるようにすれば、蛍光灯用安定器の特性解析が可能になる。これについては改めて報告したいと考えている。

最後に、本研究について種々のご助言をいただいた松下電工㈱の各務氏に深謝いたします。

参 考 文 献

- (1) 中田、河瀬、船越：第 6 回日本応用磁気学会学術講演概要集 15aC-3 (昭57)
- (2) 中田、高橋：電気工学の有限要素法 (昭57) 森北出版
- (3) Nakata, T. and Takahashi, N.: IEEE Trans. on Magnetics MAG-18, 2 (1982) 325
- (4) 中田、河瀬、松原、伊藤：電気学会回転機・静止器合同研究会資料 RM-82-37, SA-82-1 (昭58)
- (5) 中田、河瀬：電気学会静止器・回転機合同研究会資料 RM-83-9, SA-83-9 (昭58)
- (6) 中田、河瀬、藤原：電気学会静止器研究会 SA-82-41 (昭57)
- (7) 梶見、坊：照学誌, 57-6 (昭48) 341

(受付1983年11月28日)