50

影の中の照度計算の一方法
(正方形光源と遮光球による場合)

大 谷 義 彦 (日本大学生産工学部)

1. はじめに

影の生じている被照点から光源を眺めたとき、遮光物体によって光源の一部あるいは全部が隠されて見えない状態となっているはずである。例えば、正方形光源と遮光球による場合では、見掛けの光源の形が直線と楕円の組み合わせとなる。従って、このような光源を変形多角形光源と見立てて境界積分の法則を適用すれば、影の中の照度を算出できる。しかしながら、この計算は大変複雑であり、大形計算機に頼らざるを得なくなる。そこで、手許のパソコンによっても簡単に計算できるよう、正方形光源を複数の平紐状光源に分割して考える方法を試みた。計算結果と実験結果との比較により、計算方法の確かなことが認められたので報告する。

2. 光源の設定

図1のXYZ直角座標系において、 (x_g, y_g, z_g) に中心をもつ一辺の長さが ℓ である均等拡散性の正方形光源Sを各辺の方向がXまたはY軸と一致するように水平に設置する。XY面軸を含む面を被照面とし、面内の被照点Pの座標を $(x_p, y_p, 0)$ とする。影をつくる物体として半径 r_g の球Gを光源と被照面間の任意な位置に設置し、その中心座標を (x_g, y_g, z_g) とする。そして、ここでは正方形光源を幅が十分狭く、大ききの等しい平紐状光源の集まりとして取り扱う。

3. 平紐状光源による影の中の照度計算

図2のように、長さ ℓ の均等拡散性の平紐状光源をX軸と平行に設置し、その中央の座標を (x_a, y_a, z_a) とする。遮光球ならば被照面の設定は前述と同じとする。そして、被照点Pから光源を眺めたとき、遮光球Gによって隠される部分の境界のX座標を x_u, x_v とすると、これらは幾何学的に次のように求められる。²⁾

$$x_u, x_v = \frac{R(X^2 + Z\sqrt{Y^2 + z_a^2}) \pm X(Z - \sqrt{Y^2 + z_a^2})\sqrt{(Z^2 + X^2) - R^2}}{RX \pm Z\sqrt{(Z^2 + X^2) - R^2}} + x_g \quad \dots \dots (1)$$

ただし、 $X = x_p - x_g$, $Y = y_a - y_p$, $Z = \{(y_g - y_p)Y + z_g z_a\} / \sqrt{z_a^2 + Y^2}$

$$R = \sqrt{\frac{(r_g^2 - z_g^2)Y^2 + 2(y_g - y_p)z_g z_a Y - \{(y_g - y_p)^2 - r_g^2\}z_a^2}{z_a^2 + Y^2}}$$

根号の中は正の場合だけとし、また $(x_a + \frac{\ell}{2}) \geq x_u \geq x_v \geq (x_a - \frac{\ell}{2})$ とする。

高さ h にある平紐状光源において、その一端直下から光源の正射影に垂直に d だけ隔³⁾たった点における水平面照度 E は、光源の長さ A の関数として、次のように与えられる。

$$E = f(A) = \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}} \cdot \frac{I \cdot h}{2(h^2 + d^2)} \left(\frac{A \sqrt{h^2 + d^2}}{h^2 + d^2 + A^2} + \tan^{-1} \frac{A}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) \quad \dots \dots (2)$$

但し、 I は単位長さ当たりの最大光度。輝度を L 、幅を w とすれば $I = L \cdot w$

よって、影の中の照度 E_s は、被照点の座標 x_p 、光源の両端のX座標 $(x_a - \frac{\ell}{2})$ 、 $(x_a + \frac{\ell}{2})$ 、遮光球によって隠される境界のX座標 x_u, x_v により次のように求められる。

$$E_s = f(x_a + \frac{\ell}{2} - x_p) + f(x_p - x_a + \frac{\ell}{2}) - f(x_p - x_v) - f(x_u - x_p) \quad \dots \dots (3)$$

但し、 $h = z_s$ 、 $d = y_p - y_s$ とする。

4. 正方形光源による影の中の照度計算

正方形光源と遮光球による影の中の照度は、分割した平紐状光源に対してそれぞれ計算を行ない、加え合わせれば求めることができる。一例として、20分割とした一辺の長さ1.0mの正方形光源を原点上高さ1.5mに、半径 $r_g = 0.094$ mの遮光球を $(x_g, y_g, z_g) = (0.5, 0, 0.3)$ 、 $(0.5, 0, 0.5)$ 、 $(0.5, 0, 1.0)$ に設置したときのX軸上における照度曲線を図3に示す。・印は計算時と同一の条件にて行なった実験値である。計算値の実験値に対する誤差率は最大4.4%であり、良く一致しているといえる。

5. あとがき

今後は、この方法により正方形光源と遮光球による影の特性を求めていくつもりである。おわりに、終始ご指導ご鞭撻を賜りました藤原義輝教授に厚く御礼申し上げます。

【参考文献】1) 例えば、照明学会編：照明ハンドブック、オーム社(昭53)291

2) 大谷・藤原：照学誌70-6(昭和61)250~255

3) 例えば、前出1)287~288

A method for calculation of the illuminance within the shadow (in the case of a sphere as a shadow caster under a square light source), Yoshihiko Ohtani

図 1

図 2

図 3