境界積分の変形公式と 面積分法を結ぶ媒介式

終身会員 神 阪 祥*

Intermediate equation between modified integration method and surface-integration method

Sho Kamisaka (Life member)

ABSTRACT

Although the surface-integration method is fundamental way to calculate the illuminance by a flat surface source, its application to a complex source has been considered to be difficult.

It, however, turned out that this problem can be solved by the perspective figure of the flat surface source on a horizontal picture plane in the height of v from illuminated plane is obtained by the via-perspective method.

Then, the illuminance obtained from elementary area $t \cdot dt d\theta$ of the perspective figure in polar-system is calculated by the surface-integration method, as shown in the following equations.

$$E = L \iint_S \frac{tv^2}{(t^2 + v^2)^2} dt d\theta = \frac{L}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{p^2}{p^2 + v^2} d\theta = \frac{L}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{n}{l^2} dx$$

Where E = the illuminance at calculating point, L = the luminance of the source, t = the radius vector to the elementary area, p = the radius vector to the contour, θ = the radius vector angle from the y axis, n = the intercept on the y axis, l = the distance between the elementary area and the calculating point.

The above second intermediate equation obtained from the double-definite-integration when solved for t is transformable to the modified-contour-integration formula, as shown in the third equation.

Since this modified-contour-integration formula is applicable to all forms of the flat surface source, the application range of surface-integration method can extend even to all types of complex flat surface source.

1. ま え が き

完全拡散平面光源による直接照度の計算方法としては、数十年前に開拓された面積分法（直接積分法）、照明ベクトル法、境界積分法（錐面積分法）、単位球法（立体角投射法）等が公知である。

その中で単位球法のように立体角投射図形の面積を測る方法は別として、数式で計算する三方法は、何れも各々の解析手法の相違によって適用範囲に得失があるため、特定の条件以外の場合には適用することが出来なかった。

そこで任意光源に例外無く適用し得る方法として、光源の境界線の方程式をそのまま代入する境界積分の変形公式¹⁾が数年前に考案されたが、その後これを発展させた媒介透視図法²⁾という新しい照度計算法が考案されて、円環光源³⁾のような複雑な形状の立体光源の場合でも、その透視図形を平面光源に見立てることによって、簡単に照度計算することが出来るようになった。

この境界積分の変形公式は、境界線の立体模型を作って解析し

ている過程で偶然発見されたものであるから、照度計算の基本になる逆二乗法則に繋がる説明を欠いていたが、後述するように被照面に平行する媒介透視図法の画面上に平面光源を置いて解析すると、逆二乗法則に基づく「面積分法」と「境界積分の変形公式」が、「媒介式」を介して結ばれていることが判った。

よって今までは照度計算の原則の説明には役立つが、簡単な形の光源以外には役立たないとして疎まれていた面積分法が、境界積分の変形公式に依存することによって、あらゆる条件の平面光源に適用することが出来る実用度の高い照度計算方法として、見直されるようになった。

そこで本論に入る前に、未だ照明関係の参考書やハンドブック等に収録されていない「境界積分の変形公式」と「媒介透視図法」について簡単に説明する。

2. 媒介透視図法による照度計算

公知の単位球法は、図 1 に示すように計算点 P を頂点にして光源 S を包絡する錐面を単位球 US で切って、球面上の断面図形 S' から求めた立体角投射図形 S'' の面積に光源の輝度 L を掛けて照度を求めたが、媒介透視図法では前記の錐面を被照面に平行す

図1 媒介透視図法で用いる画面

る画面PPで切って、その断面図形 S_p を平面光源に見立てて境界積分の変形公式を用いて照度を計算する。

媒介透視図法で扱う図形 S_p は、計算Pから光源Sを視た場合の透視図であるが、照度計算は専ら座標値によって行うから、用いる図形はメモ程度の略図があれば十分で、電算機で計算する場合は作図を省略しても差し支えない。

3. 境界積分の変形公式

境界積分の変形公式は、平面光源の境界線の小区間が分担する照度成分 E' を求めるために考案されたもので、実用上の便宜を計って図2に示すように三種類に分かれるが、冒頭の式(1)が媒介透視図法で用いる基本式である。

(a)平面光源が被照面に平行の場合は：

$$E' = \frac{L}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{n}{x^2 + y^2 + h^2} dx \quad (1)$$

(b)平面光源が被照面に $\angle \beta$ 傾斜する場合は：

$$(E') = \frac{L}{2} \cos \beta \int_{x_1}^{x_2} \frac{n}{x^2 + y^2 + 2yh \sin \beta + h^2} dx \quad (2)$$

(c)平面光源が被照面に垂直の場合は：

$$((E')) = -\frac{L}{2} g \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x^2 + y^2 + g^2} dx \quad (3)$$

L は平面光源を等輝度完全拡散面とした場合の光源輝度である。各式中の y には光源の境界線を x の関数で表した方程式をそのまま代入する。

n は境界線の微小区間の接線が y 軸を切る切片の長さで、上記の方程式から求める。

原点Oの位置は図(a)と図(b)の(1)の場合は、計算点Pの直上にある、 h は原点Oと計算点P間の距離である。

図2 境界積分の変形公式を適用する平面光源の傾斜状態の種類

図(b)の(2)のように平面光源の傾斜角 β が大きい場合は、原点Oは計算点Pの直下に位置するから、この場合の h は負である。

(c)の場合の原点Oの位置は、計算点Pから光源面に降ろした垂線の足にあって、 g は原点Oと計算点P間の距離である。

E' に付けた(), (())は、平面光源の傾斜状態を区別する便宜の為に付けた記号である。

小区間の積分方向は、第一象限内において x の小さい方から大きい方に向かうという約束に従うから、境界線に沿って時計回りである。

境界線に沿って小区間毎に時計回り方向に積分して、各小区間が分担する照度成分 E' を代数和すると、平面光源全域から得られる照度 E が求められる。

境界線の小区間の接線が原点Oを通る場合の照度成分は、式(1)及び式(2)では $n = 0$ であるから零であるが、式(3)の場合は小区間の勾配を a にした場合の方程式 $y = ax$ を代入して求める。

境界線の小区間が y 軸に平行する場合は $n = \infty$ に成って上記の各式は計算不能であるから、 x 軸上の切片を m にした場合に得られる $dx = -(m/n) dy$ によって、式(1)~(3)を y に関する定積分に置換し、積分方向を逆にして負号を除いた下記の特別式を用いる。但し式中の l は微小区間と原点O間の距離である。

(a')平面光源が被照面に平行の場合は：

$$E' = \text{式(1)} = \frac{L}{2} \int_{-l}^l \frac{n}{l^2} \cdot \frac{-m}{n} dy = \frac{L}{2} \int_{-l}^l \frac{m}{m^2 + y^2 + h^2} dy \quad (4)$$

(b')平面光源が被照面に $\angle \beta$ 傾斜する場合は、上記と同様の手順によって n が m に入れ替わる。

$$(E') = \text{式(2)} = \frac{L}{2} \cos \beta \int_{-l}^l \frac{m}{m^2 + y^2 + 2yh \sin \beta + h^2} dy \quad (5)$$

(c')平面光源が被照面に垂直の場合は下記のように照度成分は零である。

$$((E')) = \text{式(3)} = -\frac{L}{2} g \int_{-l}^l \frac{1}{l^2} \cdot \frac{-m}{\infty} dy = 0 \quad (6)$$

しかしながら平面光源が被照面に平行の場合は、「被照面に平行する媒介透視図法の画面上では、平面光源の位置を原点Oを中心にして回転移動しても照度値は変わらない」という性質を利用して、 y 軸に平行する小区間の位置を 90° 回転移動すると、特別式(4)を用いなくても基本式(1)によって照度成分を求めることができる。

境界線に囲まれた範囲内の平面光源による照度 E は、境界線に沿って時計方向回りに求めた小区間の照度成分 E' の代数和によって求める。

境界積分の変形公式を用いる照度計算方法は、本誌の研究資料³⁾に詳記されている各種の計算例のように極めて簡単である。

なお境界積分の変形公式の初論文¹⁾では、原点Oと計算点P間の距離を一律に $|z|$ で示したが、本文では正及び負の h と g に区別することに改め、照度成分を求める手順を整理した。

4. 面積分法と境界積分の変形公式を結ぶ媒介式

面積分法では一般に平面光源の微小面積を $dx dy$ で表すが、本文では図3に示すように被照面に平行で、計算点Pから v の高さにある媒介透視図法の画面PP上に光源Sの透視図形 S_p を求めて、極座標系方式によって図形 S_p の微小面Aと原点Oを結ぶ

図3 媒介透視図法の画面上における平面光源の微小面積

動径を t 、動径 OA と y 軸の夾角を θ 、微小面 A の面積を $t \cdot dt d\theta$ で表す。

微小面 A と計算点 P 間の距離を $l = \sqrt{t^2 + v^2}$ 、微小面 A から計算点 P に向かう光束の射出角を r 、計算点 P における入射角 ϵ にすると、その余弦は $\cos r = \cos \epsilon = v/l$ であるから、面積分法による照度計算式は、逆二乗法則と出入射角の余弦によって下記の式である。

$$E = L \iint_S \frac{t \cos r \cos \epsilon}{l^2} dt d\theta = L \iint_S \frac{tv^2}{(t^2 + v^2)^2} dt d\theta \quad (7)$$

動径 t を境界線にまで延ばした場合の長さを p にすると、 t の積分区間は $[0, p]$ になるから、まず上記の式(7)を t に関して解くと式(8)が得られる。

$$\begin{aligned} &= L \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^p \frac{tv^2}{(t^2 + v^2)^2} dt = \frac{L}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\frac{-v^2}{t^2 + v^2} \right]_0^p d\theta \\ &= \frac{L}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{p^2}{p^2 + v^2} d\theta \quad (8) \end{aligned}$$

式(8)を説明の便宜上「媒介式」と名付けるが、この媒介式(8)を次章で記述するように x に関する定積分に置換すると、既発表の境界積分の変形公式(1)~(3)に導くことが出来る。

よって媒介式(8)以降の手順を境界積分の変形公式に依託すると、あらゆる条件の平面光源に適用し得る「面積分法→媒介式→境界積分の変形公式」という、新しい照度計算法が成立する。

5. x に関する定積分に置換する場合

媒介式(8)は被照面に平行する媒介透視図法の画面 PP 上に於て成立するから、平面光源が被照面に対して平行の場合はその儘でよいが、傾斜あるいは垂直の場合は、画面 PP 上に光源の透視図を求めて、その図形を平面光源に見立てる。

5.1 平面光源が被照面に平行の場合

図4に示すように平面光源が計算点 P からの高さ h の位置にある場合は、同高 v の位置に設けた媒介透視図法の画面 PP 上で解析する。

平面光源の境界線上にある微小面 A の座標を (x, y) にして、その接線の勾配を a 、 y 軸上の切片を n にすると、境界線の方程式は $y = n + ax$ である。

原点 O と微小面 A を結ぶ動径は $p = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (n + ax)^2}$ である。

動径 OA と y 軸との夾角を θ にして、下記のように x で微分する。

$$\theta = \tan^{-1} \frac{x}{y} = \tan^{-1} \frac{x}{n + ax}$$

図4 被照面に平行する平面光源の座標系変換

$$\frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \frac{x}{n + ax} \right) = \frac{n}{(n + ax)^2 + x^2} = \frac{n}{p^2}$$

これを媒介式(8)に代入して x に関する定積分に置換すると、 $v = h$ であるから境界積分の変形公式(1)に導くことが出来る。

$$\begin{aligned} &= \frac{L}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{p^2}{p^2 + v^2} d\theta \\ &= \frac{L}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{p^2}{p^2 + v^2} \cdot \frac{n}{p^2} dx = \frac{L}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{n}{x^2 + y^2 + h^2} dx \quad (9) \end{aligned}$$

5.2 平面光源が被照面に傾斜する場合

図5に示すように被照面に β 傾く傾斜面 SP 上に平面光源がある場合は、平面光源の境界線上にある微小面 A の座標を (x, y) にして、接線の勾配を a 、 y 軸上の切片を n 、接線の方程式を $y = n + ax$ にする。

被照面に平行で、計算点 P から v の高さに設けた媒介透視図法の画面 PP 上に微小面 A の透視図形 A_p を求めると、その座標 (x_p, y_p) は下記である。

$$x_p = \frac{vx}{h + y \sin \beta}, \quad y_p = \frac{vy \cos \beta}{h + y \sin \beta} = \frac{v(n + ax) \cos \beta}{h + y \sin \beta}$$

原点 O_p と微小面 A_p (x_p, y_p) の間を動径 p_p で結ぶ。

$$p_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = \frac{v \sqrt{x^2 + y^2 \cos^2 \beta}}{h + y \sin \beta}$$

動径と y 軸の夾角 θ をにして、 θ を x で微分する。

$$\theta = \tan^{-1} \frac{x_p}{y_p} = \tan^{-1} \frac{x}{(n + ax) \cos \beta}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \frac{x}{(n + ax) \cos \beta} \right) = \frac{n \cos \beta}{x^2 + (n + ax)^2 \cos^2 \beta} = \frac{n \cos \beta}{x^2 + y^2 \cos^2 \beta}$$

図5 被照面に傾斜する平面光源の座標系変換

微分した結果を媒介式(8)に入れて x に関する定積分に置換すると、下記するように境界積分の変形公式(2)に導くことが出来る。

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{p_v^2}{p_v^2 + v^2} d\theta &= \frac{L}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{p_v^2}{p_v^2 + v^2} \cdot \frac{n \cos \beta}{x^2 + y^2 \cos^2 \beta} dx \\ &= \frac{L}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x^2 + y^2 \cos^2 \beta) v^2 / (h + y \sin \beta)^2}{(x^2 + y^2 \cos^2 \beta) v^2 / (h + y \sin \beta)^2 + v^2} \cdot \frac{n \cos \beta}{x^2 + y^2 \cos^2 \beta} dx \\ &= \frac{L}{2} \cos \beta \int_{x_1}^{x_2} \frac{n}{x^2 + y^2 + 2yh \sin \beta + h^2} dx \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

なお図2の(b)(2)のように、平面光源の傾斜角 β が大きくて h の値が負になる場合でも、上記の関係は成立する。

5.3 平面光源が被照面に垂直の場合

図6に示すように直交する平面 VP 上に平面光源の微小面 A (x, y) がある場合は、計算点 P から降ろした垂線の足に原点 O を置いて、原点 O と計算点 P 間の距離を g にする。

被照面に平行で、計算点 P から v の高さに設けた媒介透視図法の画面 PP 上に微小面 A の透視図形 A_p を求めると、その座標 (x_p, y_p) は下記である。

$$x_p = \frac{xv}{y}, \quad y_p = \frac{gv}{y}$$

原点 O と微小面 A_p (x_p, y_p) の間を動径 p_p で結ぶ。

$$p_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = \frac{v}{y} \sqrt{x^2 + g^2}$$

動径 OA と y 軸の夾角を θ にして、 θ を x で微分する。

$$\theta = \tan^{-1} \frac{x_p}{y_p} = \tan^{-1} \frac{x}{g}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \frac{x}{g} \right) = \frac{1/g}{1 + x^2/g^2} = \frac{g}{x^2 + g^2}$$

微分した結果を媒介式(8)に入れて x に関する定積分に置換すると、下記のように境界積分の変形公式(3)に導くことが出来る。

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{p_v^2}{p_v^2 + v^2} d\theta &= \frac{L}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x^2 + g^2) v^2 / y^2}{(x^2 + g^2) v^2 / y^2 + v^2} \cdot \frac{g}{x^2 + g^2} \cdot (-1) dx \\ &= -\frac{L}{2} g \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x^2 + y^2 + g^2} dx \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

式中の (-1) は、図6で示すように光源 S の境界線を積分する方向と、透視図形 S_p の境界線を積分する方向が逆行するため挿入した補償項である。

6. φ に関する定積分に置換する場合

円板光源が被照面に平行の場合を例にとって説明する。

図6 被照面に垂直の平面光源の座標系変換

図7に示すように円中心 Q の座標を $(0, q)$ 、微小面 A までの動径 QA を r 、動径と y 軸の夾角を φ にすると、 $x = r \sin \varphi$ 、 $y = q + r \cos \varphi$ である。

計算点 P から円板光源までの高さを h にすると、微小面 A と計算点 P 間の距離は $l = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2} = \sqrt{r^2 + q^2 + 2qr \cos \varphi + h^2}$ で、微小面 A から計算点 P に向かう光束の方向の出入射角の余弦は $\cos r = \cos \epsilon = h/l$ である。

半径 c の円板光源による照度の計算式は、 r の積分区間を $[0, c]$ にした下式である。

$$L \iint_S \frac{r \cos r \cos \epsilon}{l^2} dr d\varphi = L \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^c \frac{h^2 r}{(r^2 + q^2 + 2qr \cos \varphi + h^2)^2} dr \dots\dots\dots (12)$$

この定積分を解くことは、文末の付記で説明するように極めて面倒であるから、 $v = h$ の位置に媒介透視図法の画面 PP を設け、その画面上に円板光源を置いて、原点 O と微小面 A を結ぶ動径を $p = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2 + q^2 + 2qr \cos \varphi}$ 、動径と y 軸の夾角を θ にして、微小面積を $p \cdot dp d\theta$ で表して、 θ を φ で微分する。

$$\theta = \tan^{-1} \frac{x}{y} = \tan^{-1} \frac{r \sin \varphi}{q + r \cos \varphi}$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\tan^{-1} \frac{r \sin \varphi}{q + r \cos \varphi} \right) = \frac{r(r + q \cos \varphi)}{r^2 + q^2 + 2qr \cos \varphi}$$

上記を媒介式(8)に入れて φ に関する定積分に置換すると、下記のように被照面に平行する円板光源の照度計算式(13)が簡単に求められるから、他の方法のような三次元の角度を解析する場合のような煩雑な労を省くことが出来る。

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{p^2}{p^2 + v^2} d\theta &= \frac{L}{2} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 + q^2 + 2qr \cos \varphi}{r^2 + q^2 + 2qr \cos \varphi + h^2} \cdot \frac{r(r + q \cos \varphi)}{r^2 + q^2 + 2qr \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{L}{2} \int_0^{2\pi} \frac{r(r + q \cos \varphi)}{r^2 + q^2 + 2qr \cos \varphi + h^2} d\varphi \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

円板光源の半径が c の場合は、上記の r に c を代入した下記の式(14)である。

$$E = \frac{L}{2} \int_0^{2\pi} \frac{c(c + q \cos \varphi)}{c^2 + q^2 + 2cq \cos \varphi + h^2} d\varphi \dots\dots\dots (14)$$

この式(14)には原始関数が存在するから、下記する公知の照度計算式(15)に導くことが出来る。

$$= \frac{L\pi}{2} \left(1 - \frac{q^2 + h^2 - c^2}{\sqrt{(c^2 + q^2 + h^2)^2 - 4c^2 q^2}} \right) \dots\dots\dots (15)$$

なお式(13)は、円板光源が被照面に平行の場合の境界積分の変形

図7 円板光源の座標系変換と扇形光源の照度計算

公式(1)に $x=r \sin \varphi$, $y=q+r \cos \varphi$ を入れ, $dx=r \cos \varphi \cdot d\varphi$ によって φ に関する定積分に置換する手順で得られるから, 円板光源が被照面に傾斜及び垂直の場合の照度計算式も, 境界積分の変形公式(2)及び式(3)から同じ手順で求めることが出来る。

7. お わ り に

実際に平面光源による照度を計算する作業は, 境界積分の変形公式をそのまま運用するのであるから, 本文の記述は既発表の論文の追証に過ぎないかもしれないが, 境界積分の変形公式と逆二乗法則に基づく面積分法が媒介式によって整然と数学的に結ばれていることを証明することは, 境界積分の変形公式に対する信頼感を高める為に役立つものと考えている。

平面光源の照度計算式の研究発表で賑わった数十年前の頃では, 境界積分の変形公式のような定積分を計算することは極めて面倒であるとして敬遠されていたから, 原始関数特有の煩雑な形の式であっても, 積分を含まない照度計算式が好まれた。

しかるに電算機の発達によって定積分の計算が簡単になった今日では, 式(1)を解くプログラムを用意して置くと, 境界線の方程式のサブルーチンを組み合わせることによって即座に高精度の照度値を得ることが出来る。

しかしながら本誌の研究資料⁽⁴⁾の記述のように, 平面光源の境界線が y 軸に平行する状態に近い場合を単精度で計算すると, 約 1.9 倍に達する誤算値が得られるという計算例もあるから, 倍精度で計算するか, または原点を中心にして 90° の座標回転を行う誤算防止用のプログラムを組み合わせておく必要がある。

かく筆にあたり先輩諸賢の貴重な研究の成果を学ばして頂いたことに, 厚く敬意を表して感謝の言葉を述べさせて頂く。

付 記

6 章において式(12)を解くことは極めて面倒であると記したことに付て補足する。

平面光源による照度の計算式を解析する方法を大別すると, 円板光源の中心 Q を解析の基準点にする照明ベクトル法と, 原点 O を基準点にする境界積分法系の方法に分けられる。

図 7 の左図に示すように照明ベクトル法は, 円柱座標系を用いて円板光源の中心 Q を解析の基準点にするから, 底辺が $r \cdot d\varphi$ で頂角が $d\varphi$ の微細扇形を集めて円形内だけを積分するが, 境界積分の変形公式では計算点 P の直上に位置する直交座標系の原点 O を基準点にして, 底辺が $p \cdot d\theta$ で頂角が $d\theta$ の微細扇形を集めて, 円形外の部分を含めて積分する。

平面光源による照度を求める過程を三段階に分類して考察すると, 逆二乗法則に基づいた二重定積分が第一段階で, 媒介式(8)のように一方の定積分を解いた一重の定積分が第二段階, それを解いた積分を含まない計算式が第三段階である。

境界積分系の解析で得た式(13)は第二段階に位置するから, この定積分を r で微分すると下記のように第一段階に位置する式(16)が得られる。

$$\begin{aligned} \text{式(13)} &= \frac{L}{2} \iint_S \frac{\{2h^2r\} + \{(r^2+q^2+h^2)q \cos \varphi + 2q^2r\}}{(r^2+q^2+2qr \cos \varphi + h^2)^2} dr d\varphi \cdots (16) \\ &= \text{式(12)} + \frac{L}{2} \iint_{S_1} \frac{(r^2+q^2+h^2)q \cos \varphi + 2q^2r}{(r^2+q^2+2qr \cos \varphi + h^2)^2} df d\varphi \cdots (17) \end{aligned}$$

式(16)の分子を $\{ \}$ で示すように二分すると, 式(17)に示すように式(12)に一致する前半部と, 式(18)に示す後半部の二重定積分に分けられるから, 境界積分法系の解析で得た式(13)は, 円板光源の中

心 Q を解析の基準点にした式(12)と異質であることが判る。

この後半部の式(18)の積分区間を $[0, \varphi]$ にして φ に関して解くと式(19)が得られる。

$$\begin{aligned} &\frac{L}{2} \int_{r_1}^{r_2} dr \int_0^\varphi \frac{(r^2+q^2+h^2)q \cos \varphi + 2q^2r}{(r^2+q^2+2qr \cos \varphi + h^2)^2} d\varphi \cdots (18) \\ &= \frac{L}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{q \sin \varphi}{r^2+q^2+2qr \cos \varphi + h^2} dr \cdots (19) \end{aligned}$$

$r=x \operatorname{cosec} \varphi$ であるから, $dr/dx=1/\sin \varphi$ によって式(19)を x に関する定積分に置換すると式(20)が得られる。

$$= \frac{L}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{q}{x^2+y^2+h^2} dx \cdots (20)$$

式(20)は境界積分の変形公式(1)の分子の n を q に替えたものであるから, 動径 QA 上にある微小区間の照度成分を求める式であることが判る。

この動径 QA 上の微小区間を底辺にして, 原点 O を頂点にする頂角 $d\theta$ の微細三角形光源に着目すると, 原点 O を通る二辺の照度成分は零であるから, 底辺の照度成分の値は三辺に囲まれた範囲から得られる照度に等しくなる。

よって境界積分法の式(13)の内容は, 原点 O 及び円中心 Q を頂点にする二つの微細扇(三角)形光源から得られる照度の和であるから, 式(12)で求めようとする頂角 $d\varphi$ の微細扇形光源による照度は, 式(13)から式(20)を減算して求めることが出来る。

図 7 の右図は半径 c の円板光源を頂角 φ の範囲で切り取った扇形光源 QYC によって上記の手順を説明するもので, 所要の照度 E_{QYC} は, 式(13)の積分区間を $[0, \varphi]$ にして計算した扇形光源 OYC による照度 E_{OYC} から, 式(20)の積分区間を $[0, c \sin \varphi]$ にして計算した三角形光源 OQC による照度 E_{OQC} を減算するという間接的手順によって求める。

扇形光源 QYC による照度を直接に求めることが不可能である理由は, 式(12)を構成する一方の式(13)の積分区間を $[0, \varphi]$ にして求めた第三段階の式(21)と, 他方の式(20)に $y=q+x \cot \varphi$ を入れて積分区間を $[0, c \sin \varphi]$ にして求めた同段階の式(22)を, 式(21)一式(22)のように結合した場合に, 両式を整頓して新しい別式を生み出す為の共通項が存在しないことによって証明することが出来る。

$$\begin{aligned} \text{式(13)} &= \frac{L}{2} \left\{ \frac{\varphi}{2} + \frac{c^2-q^2-h^2}{\sqrt{(c^2+q^2+h^2)^2-4c^2q^2}} \right. \\ &\quad \left. \tan^{-1} \frac{c^2+q^2+h^2-2cq}{\sqrt{(c^2+q^2+h^2)^2-4c^2q^2}} \tan \varphi / 2 \right\} \cdots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{式(20)} &= \frac{L}{2} \left[\frac{q \sin \varphi}{\sqrt{q^2 \sin^2 \varphi + h^2}} \tan^{-1} \frac{x+q \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \varphi \sqrt{q^2 \sin^2 \varphi + h^2}} \right]_0^{c \sin \varphi} \\ &= \frac{Lq \sin \varphi}{2\sqrt{q^2 \sin^2 \varphi + h^2}} \tan^{-1} \frac{c\sqrt{q^2 \sin^2 \varphi + h^2}}{q^2 + h^2 + cq \cos \varphi} \cdots (22) \end{aligned}$$

換言すると式(12)=式(13)-式(20)=式(21)-式(22)の関係において, もしも式(21)と式(22)間の整頓によって別式が得られるならば, 式(13)から式(20)を減算するという手順を辿る以外に脇道があることになるが, そのような可能性は皆無であるから, 式(13)から式(20)を減算する方法が唯一の手順であることが判る。

φ の積分区間が $[0, 2\pi]$ の円板光源の場合は, 下記のように式(18)は零になって, 式(20)による三角形部分は相殺される。

$$\text{式(18)} = \frac{L}{2} \int_{r_1}^{r_2} dr \left[\frac{q \sin \varphi}{r^2+q^2+2qr \cos \varphi + h^2} \right]_0^{2\pi} = 0 \cdots (23)$$

よって φ の積分区間が $[0, 2\pi]$ である場合に限り, 照明ベクトル法による二重定積分式(12)で求めようとする照度値に, 境界積

分系の解析で得た公知の式(19)を当てても差し支えない。

原点Oが円形境界線内にある場合は、式(20)による三角形部分は円形境界線内に発生するが、上記に等しい関係が成立する。

積分学に基づく計算法では、扇形光源QYCによる照度 E_{QYC} は式(12)によって境界線内だけを求めることが出来ないが、電算機を用いる場合は半径 c と中心角 ϕ を適宜数で細分して、細分面積毎に照度を求めて合算するという手段によって、式(20)による三角形部分の介在を避けて所要の照度値を求めることが出来る。

しかしながらこのような方法は、細分方法や計算精度などに問題が残るであろう。

参 考 文 献

(1)神阪 祥：任意の形状をもつ平面光源による照度の計算（境

界積分法の発展的変形），照学誌 66（昭 57）107

(2)神阪 祥：透視図法による照度計算および円環光源に対する応用，照学誌 70（昭 61）249

(3)神阪 祥：任意の形状をもつ平面光源による照度の計算（続報），照学誌 67（昭 58）133

(4)神阪 祥：傾斜天窓の立体角投射率計算法と媒介透視図法の電算化，照学誌 73（平 1）325

（受付 1989 年 10 月 5 日）