周回積分法による直射照度の算出

専門会員 肥後尚志* 正会員 篠田之孝*

Illuminance Calculations by Contour Integration Method

Takashi Higo (Fellow member), Yukitaka Shinoda (member)

(Department of Electrical Engineering,

College of Science and Technology, Nihon University.)

ABSTRACT

In this paper the methods of illuminance calculation are discussed by means of Stokes' theorem.

The authors present the general expressions of illuminance calculation by the use of an integral of the inverse of the square of the distance around the contour of a surface source.

A new vector function $\mathbf{T}$ is introduced in order to obtain these expressions. The function is defined by $\mathbf{T} = \{-\mathbf{r} \mathbf{r}\} (\hat{\mathbf{n}}_p \cdot \hat{\mathbf{r}}) / r^3$.

Variable r is the distance between irradiated surface and contour of the surface source.

Variable $\hat{\mathbf{r}}$ is the unit vector of $\mathbf{r}$, while $\hat{\mathbf{n}}_p$ is the unit normal vector of the irradiated surface.

It is shown that Kamisaka's expressions are directly proved by the use of Stokes' theorem and the vector function $\mathbf{T}$.

1. はじめに

平面光源による被照面の直射照度の計算は照度計算法の基本の一つとなっており、立体角投射の方法、錐面積分の方法（境界積分の方法とも呼ばれている）、錐面積分の方法を変形した媒介透視図法などが報告されている^{1)~3)}。

平面光源による直射照度 E は、光源面 S のベクトル関数 $\mathbf{T}$ の面積分 $E = \int_S (\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds$ ($\hat{\mathbf{n}} ds$ 光源の微小面ベクトル) と光源面の輝度 L の積すなわち $E = L \int_S (\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds$ で定式化される。

この積分に Stokes の定理を適用して照度 E を求める方法については、Fock, Gershun, Gurevitch, Moon, 山内, 尾本等により早くから報告されている^{4)~6)}。

Stokes の定理を用いた照度計算法は(1)光源の外周 C の微小部分と被照面との狭角を光源の外周全体にわたって積分する方法(2)光源の外周と被照面との距離の逆二乗を光源の外周に沿って積分する方法（以下、錐面積分（境界積分）の方法と区別するために周回積分法と記す）に大別される⁷⁾⁸⁾。

(1)の方法はこれまで錐面積分の方法としてよく知られており、多角形光源による照度計算への応用が数多く報告されている。

(2)の方法によるものに媒介透視図法があるが、Stokes の定理との関係が明確でなく、またこの方法について充分検討されているとは言い難い。

そこで本文では、(2)の方法による照度計算の一般式の導出につ

いて述べるとともに、錐面積分の方法ならびに媒介透視図法との関係について検討する。

2. 周回積分法による照度計算

輝度 L の平面光源の微小部分 ds による点 $P(x, y, z)$ の照度 E は点 P にもうけた被照面が十分小さい場合 (2. 1) 式で表される。(Fig. 1)

$$E = L \int_S \cos \theta_p \cos \theta ds / r^2 = L \int_S (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_p) (-\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds / r^2 \quad (2. 1)$$

$$\cos \theta_p = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_p) \quad (2. 2)$$

$$\cos \theta = (-\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \quad (2. 3)$$

r は被照度 P と光源上にとった点 $I(x, y, z)$ の微小面 ds との距離で、 $\hat{\mathbf{r}}$ は r の単位ベクトルで P から I へ向かうものとする。

角度 θ_p は被照面 P の法線のベクトル $\hat{\mathbf{n}}_p$ と距離ベクトル $\hat{\mathbf{r}}$ との狭角、角度 θ は光源の微小面 ds の法線のベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ と距離ベクトル $\hat{\mathbf{r}}$ との狭角である。

$$\hat{\mathbf{n}}_p = \hat{x} \cos \alpha_p + \hat{y} \cos \gamma_p + \hat{z} \cos \zeta_p \quad (2. 4)$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{x} \cos \alpha + \hat{y} \cos \gamma + \hat{z} \cos \zeta \quad (2. 5)$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \{(x - x_p) \hat{x} + (y - y_p) \hat{y} + (z - z_p) \hat{z}\} / r \quad (2. 6)$$

$$r^2 = (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2 \quad (2. 7)$$

ここで、式 (2. 1) の分子、分母を r 倍し、 $\hat{\mathbf{n}} ds$ を除いた部分をベクトル関数 $\mathbf{T}$ で表すと照度 E は (2. 8) 式となる。

$$E = L \int_S (\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds \quad (2. 8)$$

$$\mathbf{T} = \{-\hat{\mathbf{r}} \mathbf{r}\} (\hat{\mathbf{n}}_p \cdot \hat{\mathbf{r}} / r^3) \quad (2. 9)$$

ベクトル関数 $\mathbf{T}$ が (2. 10) 式を満たす場合、Stokes の定理に

*日本大学理工学部

Fig. 1 光源と被照面の位置

より照度Eは(2.12)式となり、光源の外周Cに沿った周回積分($\oint_C$ を $\oint$ と以下略記する)で求められる。(付録1)

$$\mathbf{T} = \nabla \times \mathbf{H} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{x}}P + \hat{\mathbf{y}}G + \hat{\mathbf{z}}R \quad (2.11)$$

$$E = L \oint_S [\nabla \times \mathbf{H}] \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = L \oint (Pdx + Gdy + Rdz) \quad (2.12)$$

次にP, R, Gを求めるために、 $(\hat{\mathbf{n}}_p \cdot \hat{\mathbf{r}})/r^3$ をFとおくと、Tは(2.14)式となる。

$$F = (\hat{\mathbf{n}}_p \cdot \hat{\mathbf{r}})/r^3 = \{(x - x_p) \cos \alpha_p + (y - y_p) \cos \gamma_p + (z - z_p) \cos \xi_p\} / r^4 \quad (2.13)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{F} \times \{-\hat{\mathbf{r}}\} = \mathbf{F} \times \{x_p - x\} \hat{\mathbf{x}} + \{y_p - y\} \hat{\mathbf{y}} + \{z_p - z\} \hat{\mathbf{z}} \quad (2.14)$$

式(2.10)よりベクトル関数Hの各成分P, G, Rは式(2.15)~(2.17)となる。

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} = F \times (x_p - x) \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = F \times (y_p - y) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = F \times (z_p - z) \quad (2.17)$$

この連立微分方程式を満たすP, R, GをSparrowの用いた方法で求めると⁹⁾、P, G, Rは以下の様になる。(付録2)

$$P = \{- (z - z_p) \cos \gamma_p + (y - y_p) \cos \xi_p\} / 2 r^2 \quad (2.18)$$

$$G = \{- (z - z_p) \cos \alpha_p + (x - x_p) \cos \xi_p\} / 2 r^2 \quad (2.19)$$

$$R = \{- (y - y_p) \cos \alpha_p + (x - x_p) \cos \gamma_p\} / 2 r^2 \quad (2.20)$$

これにより被照面Pの法線方向の照度Eは(2.21)式となる。

$$E = (L/2) \cos \alpha_p \oint \{(z - z_p) dy - (y - y_p) dz / r^2\}$$

$$+ (L/2) \cos \gamma_p \oint \{(x - x_p) dz - (z - z_p) dx / r^2\} + (L/2) \cos \xi_p \oint \{(y - y_p) dx - (x - x_p) dy / r^2\} \quad (2.21)$$

式(2.21)は(2.22)式に示されるように、被照面の単位ベクトル $\hat{\mathbf{n}}_p$ と各軸方向の照度 E_x, E_y, E_z を成分とするベクトル $\mathbf{E}_v$ との内積であり、周回積分法による照度計算の一般式となっている。(付録3)

また被照面のx, y, z方向の照度 E_x, E_y, E_z は式(2.23)~(2.25)となり光源の外周Cをx, y, z軸に沿って積分する事により求められる。

$$E = (\hat{\mathbf{n}}_p \cdot \mathbf{E}_v) = (\hat{\mathbf{n}}_p \cdot \hat{\mathbf{x}}) E_x + (\hat{\mathbf{n}}_p \cdot \hat{\mathbf{y}}) E_y + (\hat{\mathbf{n}}_p \cdot \hat{\mathbf{z}}) E_z = \cos \alpha_p E_x + \cos \gamma_p E_y + \cos \xi_p E_z \quad (2.22)$$

$$E_x = (L/2) \oint \{(z - z_p) dy - (y - y_p) dz / r^2\} \quad (2.23)$$

$$E_y = (L/2) \oint \{(x - x_p) dz - (z - z_p) dx / r^2\} \quad (2.24)$$

$$E_z = (L/2) \oint \{(y - y_p) dx - (x - x_p) dy / r^2\} \quad (2.25)$$

3. 傾いた面光源による照度の算出式

3.1 平面光源が被照面に平行の場合

光源の輝度をLとする。光源の面がz軸上の $z = h$ に直交するxy平面にあって光源の外周上の点Q(x, y, z)のyの値が $y = f(x)$ で与えられているものとする。ただしf(x)は滑らかな関数とする。(Fig. 2)

被照面Pを原点N(0, 0, 0)にとり、面Pがz軸方向を向い

Fig. 2 光源の面が被照面に平行の場合

ているとすると、 $dy = f'(x) dx$, $\alpha_p = \gamma_p = \pi/2$, $\xi_p = 0$ より被照面Pの照度 E_z は(3.1)式となる。

$$E_z = (L/2) \oint \{y dx - x f' dx\} / r^2 \quad (3.1)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + h^2$$

$$f' = \frac{df(x)}{dx}$$

3.2 平面光源が被照面に垂直の場合

光源の面がY軸上の $y = h$ に直交するxz平面上あり、光源の外周C上の点Qのzの値が $z = f(x)$ で与えられているものとする。被照面Pは原点Nにあってz軸方向を向いている場合、すなわち被照面Pが光源の面に対して垂直の場合の照度を求める。(Fig. 3)

Fig. 3 光源の面が被照面に垂直の場合

$y = h$ より $dy = 0$. 被照面Pの照度 E_z は (3. 2) 式となる。

$$E_z = (L/2) \oint \{ h dx / r^2 \} \quad (3. 2)$$

$$r^2 = x^2 + h^2 + z^2$$

3.3 平面光源が被照面に対して傾いている場合

光源の面が $z = h$ で x 軸に対して反時計方向に ξ だけ傾斜した xy 平面 (XY 平面) 上にあって、被照面Pが原点Nにあり z 軸方向を向いている場合の照度 E_z を求めると、式 (2. 25) より (3.

Fig. 4 光源の面が被照面に傾いている場合

3) 式となる。(Fig. 4)

$$E_z = (L/2) \oint \{ Y dx - X dy \} / r^2 \quad (3. 3)$$

$$r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

光源の境界C上の点Q (X, Y, Z) を $z = 0$ の xy 平面上に投影した点 $Q_0 (x, y, 0)$ の y の値が $y = f(x)$ で表されたとする。点Qは点 $Q_0 (x, y, 0)$ を x 軸に ξ だけ回転し z 軸に $z = h$ だけ平行移動した点である。ここで線形変換を用いると点Q (X, Y, Z) と点 $Q_0 (x, y, 0)$ の関係は (3. 4) 式で示される。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi & -\sin \xi \\ 0 & \sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \quad (3. 4)$$

式 (3. 4) より点Qと点 Q_0 との関係は (3. 5) 式となる。

$$\begin{aligned} X &= x \\ Y &= y \cos \xi \\ Z &= y \sin \xi + h \end{aligned} \quad (3. 5)$$

式 (3. 5) を (3. 3) 式に代入すると $dX = dx$,

$dY = dy \cos \xi$ より点Pの照度 E_z は (3. 6) 式となる。

$$E_z = (L/2) \cos \xi \oint \{ (y dx - x dy) / r^2 \} \quad (3. 6)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + 2 h y \sin \xi + h^2$$

つぎに、光源が $z = h$ にあって y 軸に対して ξ だけ回転した平面にある場合について延べる。

この場合、xy 平面上の点 $Q_0 (x, y, 0)$ と点Q (X, Y, Z) との関係は (3. 7) 式となる。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \xi & 0 & -\sin \xi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \xi & 0 & \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \quad (3. 7)$$

これより X, Y, Z は (3. 8) 式となる。

$$\begin{aligned} X &= x \cos \xi \\ Y &= y \\ Z &= x \sin \xi + h \end{aligned} \quad (3. 8)$$

これを (3. 3) 式に代入すると $dX = dx \cos \xi$, $dY = dy$ より点Pの照度 E_z は (3. 9) 式となる。

$$E_z = (L/2) \cos \xi \oint \{ (y dx - x dy) / r^2 \} \quad (3. 9)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + 2 h x \sin \xi + h^2$$

4. 多角形光源による直射照度

被照面Pが原点Nにあって z 軸に垂直とする。光源の形状は n 角形で z 軸の $z = h$ で z 軸に直角な xy 平面上にあるとする。(Fig. 5)

光源の各辺を区間 k ($k \geq 3$) とする。各区間の直線を (4. 1) 式で表す。

$$y = a_k x + n_k \quad (4. 1)$$

区間 k における照度 E_z は (3. 1) 式により (4. 2) 式のよ

$$E_z = (L/2) \int_k n_k dx / r^2 \quad (4. 2)$$

$$r_k^2 = (1 + a_k^2) x^2 + 2 a_k n_k x + n_k^2 + h^2$$

したがって、全区間における照度 E_z は (4. 3) 式となる。

$$E_z = \sum_k^n (L/2) \int_k n_k dx / r^2 \quad (4. 3)$$

多角形光源が被照面に対して傾いている場合、3 節の結果を用いると以下の様になる。

(1) 光源が被照面に垂直な場合

$$E_z = \sum_k^n (L/2) \int_k h dx / r^2 \quad (4. 4)$$

$$r_k^2 = x^2 + h^2 + z^2$$

Fig. 5 多角形光源の場合

$$z = a_k x + n_k$$

- (2) 光源が被照面に対して x 軸を中心に ξ だけ傾いている場合

$$E_z = \sum_k^n (L/2) \cos \xi \int_k n_k dx / r^2 \quad (4.5)$$

$$r_q^2 = x^2 + y^2 + 2hy \sin \xi + h^2$$

$$y = a_k x + n_k$$

- (3) 光源が被照面に対して y 軸を中心に ξ だけ傾いている場合

$$E_z = \sum_k^n (L/2) \cos \xi \int_k n_k dk / r^2 \quad (4.6)$$

$$r_q^2 = x^2 + y^2 + 2hx \sin \xi + h^2$$

$$y = a_k x + n_k$$

以上、光源の形状が n 角形の場合は式 (4.3) ~ (4.6) より

り照度が求められる。

5. 簡単な形状の平面光源による直射照度の計算

5.1 矩形光源による直射照度

光源と被照面との位置関係を Fig. 6 に示す。原点 N の被照面 P の z 軸方向の照度 E_z を求める。

照度 E_z は式 (2.23) より (5.1) 式で表される。

$$E_z = (L/2) \oint \{ (ydx - xdy) / r^2 \} \quad (5.1)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + h^2$$

ここで、積分領域を (1) ~ (4) に分割し、時計方向に積分すると各積分は以下の様になる。

領域 HC では $x = 0$ より

$$E_z = (L/2) \int_0^b \{ (ydx - xdy) / r^2 \} = 0$$

領域 CB では $y = b$, $dy = 0$ より

$$E_z = (L/2) \int_0^a b dx / r_b^2$$

$$r_b^2 = x^2 + b^2 + h^2$$

領域 BA では $x = a$, $dx = 0$ より

$$E_z = (L/2) \int_b^0 -a dy / r_a^2$$

$$r_a^2 = a^2 + y^2 + h^2$$

領域 AH では $x = 0$ より

$$E_z = (L/2) \int_a^0 \{ (ydx - xdy) / r^2 \} = 0$$

したがって、全領域における照度 E_z は (5.2) 式となる。

$$E_z = (L/2) \int_0^a b dx / r_b^2 + (L/2) \int_b^0 -a dy / r_a^2 \quad (5.2)$$

この積分は (5.3) 式となる。(付録4)

$$E_z = L/2 \left[(b / \sqrt{b^2 + h^2}) \tan^{-1} (a / \sqrt{b^2 + h^2}) + (a / \sqrt{a^2 + h^2}) \tan^{-1} (b / \sqrt{a^2 + h^2}) \right] \quad (5.3)$$

この結果はこれまでによく知られたものであるが⁽¹⁰⁾、錐面積分の方法に比して照度計算が簡単に行える事がわかる。

5.2 円盤光源による直射照度

Fig. 6 矩形光源の場合

Fig. 7 円盤光源の場合

半径 g の円盤光源による直射照度を計算する。Fig. 7 は光源と被照面の位置関係を示したものである。

被照面 P を原点 N に置く。点 P の照度 E_z は (5. 4) 式となる。

$$E_z = (L/2) \oint \{ (ydx - xdy) / r^2 \} \quad (5. 4)$$

ここで xy 座標を極座標に変換すると、 $x = g \sin \varphi$, $y = g \cos \varphi$, $z = h$ となる。

$dx = g \cos \varphi d\varphi$, $dy = -g \sin \varphi d\varphi$, より照度 E_z は (5. 5) 式となる。

$$E_z = (L/2) \int_0^{2\pi} g^2 d\varphi / (g^2 + h^2) \\ = \pi L g^2 / (g^2 + h^2) \quad (5. 5)$$

この結果もまたこれまでによく知られたものであるが、光源の形状が円のような滑らかな曲線の場合でも照度計算が簡単に行える事がわかる。

5.3 円盤光源の中心が点 (x_p, y_p, h) にあって、光源の面が x 軸に対して ξ だけ傾いている場合の直射照度

原点 N の照度 E_z を式 (3. 5) ~ (3. 6) を適用して求める。

Fig. 8 傾いた円盤形光源の場合

光源の外周 C 上の点 $Q (X, Y, Z)$ を $z = 0$ の xy 平面に投影した点 $Q_0 (x, y, 0)$ を極座標表示する。円盤光源の半径を g とする。(Fig. 8)

$$x = x_p + g \sin \varphi,$$

$$y = y_p + g \cos \varphi,$$

$$z = h$$

照度 E_z は式 (3. 9) より (5. 6) 式となる。

$$E_z = (L/2) \cos \xi \oint \{ (ydx - xdy) / r^2 \} \quad (5. 6)$$

$$ydx - xdy = g (x_p \sin \varphi + y_p \cos \varphi + g) d\varphi$$

$$r^2 = (x_p + g \sin \varphi)^2 + (y_p + g \cos \varphi)^2$$

$$+ 2 h (y_p + g \cos \varphi) \sin \xi + h^2$$

$$r^2 = W \sin \varphi + V \cos \varphi + U$$

$$W = 2 g x_p$$

$$V = 2 g (y_p + h \sin \xi)$$

$$U = x_p^2 + y_p^2 + g^2 + h^2 + 2 y_p h \sin \xi$$

式 (5. 6) の積分は (5. 7) 式となる。(付録 5)

$$E_z = \pi L g \cos \xi \times \{ (g / \sqrt{U^2 - W^2 - V^2}) \\ + ([x_p W + y_p V] / [W^2 + V^2]) \\ \times [1 - (U / \sqrt{U^2 - W^2 - V^2})] \} \quad (5. 7)$$

この結果は媒介透視図法により求められたものと同じである。傾いた円盤光源のように照度の算出が比較的容易でない場合でもこの方法によれば簡単に照度が求められる事がわかる。

6. 検 討

ここではベクトル関数 T について検討する。

ベクトル関数 T を式 (2. 1) より (6. 1) 式のように書き表す。

$$T = \{ \hat{r} / r^2 \} (-\hat{n}_p \cdot \hat{r}) \quad (6. 1)$$

Gurevich, Gershun が見いだした関係式 (6. 2) を用いるとベクトル関数 T は (6. 3) 式となる。

$$\{ \hat{r} / r \} (-\hat{n}_p \cdot \hat{r}) = (1/2) \nabla \times [\{ \hat{r} / r \} \times \hat{n}_p] \quad (6. 2)$$

$$T = (1/2) \nabla \times [\{ \hat{r} / r \} \times \hat{n}_p] \quad (6. 3)$$

ここで Stokes の定理を適用すると照度 E は (6. 4) 式となる。(付録 6)

$$E = L (1/2) \int_s \nabla \times [\{ \hat{r} / r \} \times \hat{n}_p] \cdot \hat{n} ds \\ = L (1/2) \oint [\{ \hat{r} / r \} \times \hat{n}_p] \cdot d\mathbf{l} \\ = L (1/2) \oint \hat{n}_p \cdot [d\mathbf{l} \times \{ \hat{r} / r \}] \quad (6. 4)$$

ベクトル $[d\mathbf{l} \times \{ \hat{r} / r \}]$ は大きさが被照面 P と光源の外周 $d\mathbf{l}$ とでつくる錐面の狭角 $d\beta$ であり、方向は錐面に垂直な内向きのベクトルである。($d\mathbf{l}$ を時計方向にとっているため錐面の方向は内側を向く。) そこで錐面に垂直な内向きのベクトルを $\hat{m}$ とすると、式 (6. 4) は (6. 6) 式と書ける。(付録 7)

$$\hat{m} d\beta = [d\mathbf{l} \times \{ \hat{r} / r \}] \quad (6. 5)$$

$$E = L (1/2) \oint (\hat{n}_p \cdot \hat{m} d\beta) \quad (6. 6)$$

$\hat{m}$ と $\hat{n}$ の狭角を δ とすると照度 E は (6. 7) 式となる。

$$E = L (1/2) \oint d\beta \cos \delta \quad (6. 7)$$

$$\cos \delta = (\hat{n}_p \cdot \hat{m}) \quad (6. 8)$$

式 (6. 7) ~ (6. 8) は錐面積分の公式である。

次に式 (6. 4) に式 (6. 9) を代入すると照度 E は (6. 10) のようになる。(付録 8)

$$\hat{r} / r = \nabla \ln r \quad (6. 9)$$

$$E = L (1/2) \oint \hat{n}_p \cdot [d\mathbf{l} \times \{ \nabla \ln r \}] \\ = \hat{n}_p \cdot [-\nabla \times L (1/2) \oint \{ \ln r d\mathbf{l} \}] \\ = \hat{n}_p \cdot (-D) \quad (6. 10)$$

$$D = [\nabla \times L (1/2) \oint \{ \ln r d\mathbf{l} \}] \quad (6. 11)$$

D は Moon の Pharosage vector である。

$D = \nabla \times A$ とすると A は (6. 12) 式となる。

$$A = L (1/2) \oint \{ \ln r d\mathbf{l} \} \quad (6. 12)$$

A は Fock, Gurevitch の導いた vector potential である。照度 E は $\hat{n}_p$ と $-D$ との内積、すなわち $[-\nabla \times A]$ と $\hat{n}_p$ との内積になる。ベクトル関数 T についてまとめると以下の二通りに書ける。

$$(1) T = \{ \hat{r} / r^2 \} (-\hat{n}_p \cdot \hat{r}) \quad (6. 13)$$

$$(2) T = \{ -\hat{r} \} (\hat{n}_p \cdot \hat{r}) / r^3 \quad (6. 14)$$

(1) の場合は錐面積分の公式、Fock, Gurevitch の vector potential が導き出される。(2) の場合は今回導いた距離の逆二乗を光源の外周に沿って積分する周回積分法による照度計算式が導き出さ

れる。

ところで、錐面積分の方法は平面光源の形状を単位球面上に投影しこの形状を xy 平面に投影してその面積を求める事と等価である。式(6. 7)は距離 r を含まないが $d\beta$ と $\cos\delta$ の二つの量を個々に求め、さらにその積の積分を求めると言う手間が必要である。このため、光源の形状が簡単な多角形の場合には有効だが、形状が滑らかな曲線の場合、光源面や被照面を回転させて、そのときの照度を計算する場合、空間内の任意の被照面で照度が最大となる面の向きを求める等の場合、計算量がかさむといった問題がある。Fock, Gurevitch の vector potential は Moon も指摘している様にほとんど実用に供し得ない。

媒介透視図法は錐面積分の方法から出発して代数幾何学的手法を用いて見いだされたもので、平面光源の外周に沿う積分を x 軸に沿う積分だけで照度を算出する方法である。その計算式は次式で与えられている。

平面光源が被照面に平行の場合

$$E = L/2 \int (ndx/r^2) \quad (6. 15)$$

平面光源が被照面に $L\theta$ 傾斜する場合

$$E = (L/2) \cos\theta \int (ndx/r^2) \quad (6. 16)$$

平面光源が被照面に垂直の場合 ($y = h$)

$$E = (L/2) \int (hdx/r^2) \quad (6. 17)$$

$n = (y - y'x)$ は光源の外周が $y = f(x)$ で与えられた場合、外周にとった接線の y 軸上の切辺の長さである。 ndx は、

$y' = (dy/dx)$ より (6. 18) となる。

$$ndx = ydx - xdy \quad (6. 18)$$

式(6. 18)を(6. 15)～(6. 17)式に代入すると各式は被照面が z 軸に垂直の場合の照度計算式(2. 25)となり、媒介透視図法による照度計算式は周回積分法による照度計算式にはかならない事がわかる。

7. おわりに

本文は、周回積分法による平面光源の直射照度の計算式について検討したものである。

これまでの結果をまとめると以下の様になる。

- (1) 被照面から平面光源の外周までの距離の逆二乗を座標軸に沿って積分する、周回積分法による照度計算の一般式を示した。
- (2) 周回積分法による照度計算式は、錐面積分の方法、Fock, Gurevitch の vector potential の算出に用いたベクトル関数 $\mathbf{T}$ の表現式の違いにより得られることを示した。
- (3) 媒介透視図法による照度計算式は錐面積分の法則より出発して代数幾何学的手法により見いだされたものであるが、この照度計算式は周回積分法に導入したベクトル関数 $\mathbf{T}$ と Stokes の定理により直接導かれる事を示した。

光源の外周に沿って積分する周回積分法は錐面積分の方法と異なり、錐面の傾斜角と開き角を求める必要がなく、被照面の方向を自由に選択できること、積分が座標軸に沿って行われたため光源面の回転や、移動に対して座標変換を用いればよく計算が単純化できる等の利点がある。

従って、周回積分法による照度計算式は空間における光の流れを知る照度ベクトルあるいは空間照度を求める場合に有用な計算方法になると考えている。

本文が照度計算の一助となれば幸いである。

おわりに、本学、佐々木嘉雄専任講師より貴重なご意見を賜った。ここにあらためて謝意を表するものである。

なお本研究は日本大学理工学部学術助成金の交付を受けた。記して関係各位に謝意を表する次第である。

参考文献

- (1) 山内：照明学会誌、8—4、P293(1924)
- (2) 尾本：照明学会誌、8—4、P295(1924)
- (3) 神坂：照明学会誌、66—4、P107(1982)
- (4) V. Fock : z. Physik, 27, P102 (1924)
- (5) A. Gershun, Gurevich : J. Russian. Phys. Chem. Soc 60 P355 (1928)
- (6) P. Moon, D.E. Spencer : The Photic Field P123 (The MIT Press 1981)
- (7) 肥後：照明学会全国大会講演論文集67 (1991)
- (8) 肥後、篠田、佐々木：照明学会全国大会講演論文集46(1992)
- (9) E.M. Sparrow : J. Heat. Transfer. 85—2 P81 (1963)
- (10) 例えば 尾本：照明計算
- (11) 例えば 数学公式1 (岩波) 172
- (12) 例えば S.Lang : A First Course in Calculus (Springer Verlag 1927)

付録1.

関数 $P(x, y, z)$, $G(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ (以下 P , G , R と記す) を直角座標 x, y, z の軸方向成分とするベクトル関数を $\mathbf{H}(x, y, z)$ (以下 $\mathbf{H}$ と記す) とする。ここで $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ は

付図1 Stokes の定理

軸方向の単位ベクトルである。(付図1)

$$\mathbf{H} = \hat{x}P + \hat{y}G + \hat{z}R \quad (1)$$

ベクトル関数 $\mathbf{H}$ を外周 C に沿って積分する。外周 C で囲まれた領域 S の微小面積を ds とする。面 ds の法線方向 (内向) を表す単位ベクトルを $\hat{n}$ とする。

$$\hat{n} = \hat{x}\cos\alpha + \hat{y}\cos\gamma + \hat{z}\cos\delta$$

時計方向にとった C の接線の微小長さベクトルを $d\mathbf{l}$ とする。

$$d\mathbf{l} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$$

ベクトル関数 $\mathbf{H}$ の外周 C に沿った積分は(2)で表される。

(2)は Stokes の定理である。

$$\oint (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}) = \int_S [\nabla \times \mathbf{H}] \cdot \hat{n} ds \quad (2)$$

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

(2)は(3)で表される。

$$\oint \{Pdx + Gdy + Rdz\}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \cos\gamma$$

$$+\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\} \cos \xi\} ds \quad (3)$$

付録2.

P, G, Rが式(2.18)~(2.20)の解である事を示す。
式(2.15)~(2.17)にP, G, Rを直接代入する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y} = \{ & -r^2 \cos \alpha_P - \{-(y-y_P) \cos \alpha_P \\ & + (x-x_P) \cos \gamma_P\} 2r \frac{\partial r}{\partial y}\} / 2r^4 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial z} = \{ & r^2 \cos \alpha_P - \{(z-z_P) \cos \alpha_P \\ & + (x-x_P) \cos \xi_P\} 2r \frac{\partial r}{\partial z}\} / 2r^4 \end{aligned} \quad (2)$$

$$r^2 = (x-x_P)^2 + (y-y_P)^2 + (z-z_P)^2 \quad (3)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = (y-y_P)/r \quad (4)$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = (z-z_P)/r \quad (5)$$

(1)~(2)に(3)~(5)を代入する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} = (x_P - x) \{ & (x-x_P) \cos \alpha_P \\ & + (y-y_P) \cos \gamma_P \\ & + (z-z_P) \cos \xi_P\} / r^4 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} = (x_P - x) \times F \quad (7)$$

式(2.16)~(2.17)も同様となる。

付録3.

P, G, Rを(1)に代入する。

$$\begin{aligned} E &= L \oint (Pdx + Gdy + Rdz) \\ &= L \oint \{-(z-z_P) \cos \gamma_P \\ &\quad + (y-y_P) \cos \xi_P\} dx / 2r^2 \\ &\quad + L \oint \{(z-z_P) \cos \alpha_P \\ &\quad + (x-x_P) \cos \xi_P\} dy / 2r^2 \\ &\quad + L \oint \{(y-y_P) \cos \alpha_P \\ &\quad + (x-x_P) \cos \gamma_P\} dz / 2r^2 \end{aligned} \quad (2)$$

(2)を各余弦項でくくるとEは(3)となる。

$$\begin{aligned} E &= (L/2) \cos \alpha_P \oint \{(z-z_P) dy \\ &\quad - (y-y_P) dz / r^2\} \\ &\quad + (L/2) \cos \gamma_P \oint \{(x-x_P) dz \\ &\quad - (z-z_P) dx / r^2\} \\ &\quad + (L/2) \cos \xi_P \oint \{(y-y_P) dx \\ &\quad - (x-x_P) dy / r^2\} \end{aligned} \quad (3)$$

付録4.

積分表より¹¹⁾

$$\begin{aligned} \int dx / (x^2 + c) &= (1/\sqrt{c}) \tan^{-1} (x/\sqrt{c}) \\ \int_b^a -ady / (y^2 + a^2 + h^2) \\ &= (a/\sqrt{a^2 + h^2}) \tan^{-1} (b/\sqrt{a^2 + h^2}) \\ \int_a^b bdx / (x^2 + b^2 + h^2) \\ &= (b/\sqrt{b^2 + h^2}) \tan^{-1} (a/\sqrt{b^2 + h^2}) \end{aligned}$$

付録5.

$$\begin{aligned} E_z &= (Lg/2) \cos \xi \times \\ &\quad \int_0^{2\pi} (x_P \sin \varphi + y_P \cos \varphi + g) d\varphi / r^2 \\ r^2 &= W \sin \varphi + V \cos \varphi + U \end{aligned} \quad (1)$$

$$W = 2gx_P$$

$$V = 2g(y_P + h \sin \xi)$$

$$U = x_P^2 + y_P^2 + g^2 + h^2 + 2y_P h \sin \xi$$

積分表より

$$\begin{aligned} J_s &= \int \sin \varphi d\varphi / r^2 \\ &= [W \varphi - V \log |r| - WU (I_H)] / [W^2 + V^2] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} J_c &= \int \cos \varphi d\varphi / r^2 \\ &= [V \varphi + W \log |r| - VU (I_H)] / [W^2 + V^2] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (I_H) &= \int (d\varphi / r^2) = (2/\sqrt{U^2 - W^2 - V^2}) \times \\ &\quad \tan^{-1} \{((U-V) \tan(\varphi/2) + W) / \sqrt{[U^2 - W^2 - V^2]}\} \end{aligned} \quad (4)$$

$$[\log |r|]_0^{2\pi} = 0 \quad (5)$$

$$(I_H)_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} (d\varphi / r^2) = \pi / \sqrt{U^2 - W^2 - V^2} \quad (6)$$

(2)~(6)よりEzは(7)となる。

$$\begin{aligned} E_z &= \pi L g \cos \xi \times \{ (g / \sqrt{U^2 - W^2 - V^2}) \\ &\quad + ([x_P W + y_P V] / [W^2 + V^2]) \\ &\quad \times [1 - (U / \sqrt{U^2 - W^2 - V^2})] \} \end{aligned} \quad (7)$$

付録6.

(1)のベクトル演算より(2)となる。

$$[A \times B] \cdot C = B \cdot [C \times A] \quad (1)$$

$$[\{\hat{r}/r\} \times \hat{n}] \cdot d\mathbf{l} = \hat{n} [d\mathbf{l} \times \{\hat{r}/r\}] \quad (2)$$

付録7.

付図2 平面光源と錐面の関係

錐面PQQ'に垂直に内向きの単位ベクトルを $\hat{\mathbf{m}}$ とする。(付図2)

$$d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{r}} \times d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{m}} dl \sin \theta$$

$$dl \sin \theta = r d\beta$$

$$[d\mathbf{l} \times \{\hat{\mathbf{r}}/r\}] = \hat{\mathbf{m}} d\beta$$

付録8.

fをスカラー関数, $\mathbf{M}$ をベクトル関数とする。

$$\{\nabla f\} \times \mathbf{M} = \nabla \times \{f \mathbf{M}\} - f [\nabla \times \mathbf{M}]$$

$f = \ln r$, $\mathbf{M} = d\mathbf{l}$ とすると,

$$\{\nabla \ln r\} \times d\mathbf{l} = [\nabla \times \{\ln r d\mathbf{l}\}]$$

$$- \ln r [\nabla \times d\mathbf{l}]$$

$\nabla \times d\mathbf{l} = 0$ より

$$\{\nabla \ln r\} \times d\mathbf{l} = \nabla \times \{\ln r d\mathbf{l}\}$$

受付日 1993年12月14日／採録日 1994年4月7日)

ひご たかし
肥後 尚志 (専門会員)

昭和14年2月20日生。昭和37年日本大学理工学部電気工学科卒業。昭和48年同大学大学院理工学研究科電気工学専攻博士課程修了。工学博士。同年同大学助手。昭和50年専任講師。助教授を経て平成元年教授。現在に至る。

昭和51年照明学会研究奨励賞受賞。主として光放射、レーザ等の光センシング技術の研究に従事。照明空間における光の流れなど光環境の研究等にも関心を持っている。電気学会、計測自動制御学会、応用物理学会、MF学会、会員。

しの だ ゆきたか
篠田 之孝 (正会員)

昭和38年12月4日生。昭和62年3月日本大学理工学部電気工学科卒業。平成元年3月同大学大学院理工学研究科電気工学専攻修士課程修了。同年4月同大学助手。現在に至る。

主にレーザを用いた測長測距、モノビジョン視覚センサ、位相共役波応用および赤外線的应用計測に関する研究に従事。電気学会、計測自動制御学会等の会員。