モンテカルロ法による照度計算の改良

専門会員 祝 郁 夫 (有限会社照明光学研究所)

Improvement of Illuminance Calculation by MonteCarlo Method

Fellow Member Ikuo Iwai (Illuminating Optics Lab. Inc.,)

KEYWORDS : illuminance calculation, ray tracing, MonteCarlo method, solid angle

1. まえがき

モンテカルロ法による照度計算の改良を試みた。

モンテカルロ法は、光源の周りにランダムに発生させた多数の光線を追跡して照射面上の到達点を調べ、照射面に設けた一定小区画に到達した光線数をカウントして照度分布を算出する計算方法である。モンテカルロ法はこのような統計的手法であるため、計算結果は近似値であり、発生光線数の多いほど真値に近い照度分布が得られるという性質を持っている。然るに従来、発生光線数と計算精度の関係は必ずしも明らかになっていない。

本報では、モンテカルロ法において光線発射方法を変更すれば、計算精度の予測が容易となることを示す。即ち、実際光源を従来のように輝度の固角特性を持つ小さな面光源の群で代替するのではなく、固有光度分布を持つ点光源群で代替する、そして光線発射の平均角度間隔を従来の等平面角間隔に代えて等立体角間隔とするという二点の変更によって、追跡光線本数と照度分布計算精度との関係が明確となる。

2. 光ビーム追跡法

改良されたモンテカルロ法の基礎を成すものが、ここで言う光ビーム追跡法による照度計算である。

光ビーム追跡法では、実際光源を固有光度分布を持つ点光源群に置き換えた上で、各点光源の全周を一定の微小立体角 $\Delta\Omega$ で区切って得られる、図1の模式図で示すような有限径光ビームを全周に隙間なく放射させる。この光ビームは、光学系を通過するとき光学系のパワー（屈折力）によってその径を変動させるけれども、経路に沿っての光度 I_n は一定であり、光ビームは一定の光束 $\Delta F_n = I_n \Delta\Omega$ .....(1) を保持すると考えることができる。照射面到達時の光ビーム径が照射面に設定された小区画（ターゲットセル）に比べて十分に小さければ、光ビームの保持光束 ΔF_n をもって、光ビームの中心軸を成す光線の到達したターゲットセルの受光光束とすることができる。そして面積 A のセルに入射した全ての光ビームの ΔF_n を加算して、次式によってセル平均照度 E を計算できる。

$$E = \frac{\sum \Delta F_n}{A} = \frac{\Delta\Omega}{A} \sum I_n \dots\dots\dots(2)$$

光源の全周を $N \times N$ の等立体角に区切るには、光源を中心とする半径 $R=1$ の単位球について、光軸（ Z 軸）方向に直径 $2R$ を N 分割、光軸周りに角度 2π を N 分割すればよい。即ち、図2を参照して、前者の分割値 $\Delta h (=2R/N)$ を高さとする円環の表面積 $2\pi R \Delta h$ を周方向に N 分割すると立体角 $\Delta\Omega$ が算出され、下式のように $4\pi/N^2$ 一定となる。

$$\Delta\Omega = 2\pi R \Delta h / N = 2\pi R \left(\frac{2R}{N} \right) / N = 4\pi R^2 / N^2 = 4\pi / N^2 \dots\dots\dots(3)$$

各立体角の中心軸を成す光線の発射方位の方向余弦 (k, l, m) は、径方向 i 番目の光ビームの中心高を h 、周方向 j 番目の光ビームの中心角度を ϕ として、次式により定まる。

図1 光ビームの模式図

Fig.1 Light beam in the optical system.

図2 等立体角分割法

Fig.2 Method of dividing into equivalent solid angle.

$$k=\sqrt{1-h^2}\cos\phi \quad l=\sqrt{1-h^2}\sin\phi \quad m=h \quad \cdots\cdots(4)$$

ここで

$$h=\frac{2}{N}(i-0.5)-1 \quad (i=1, 2\cdots N)$$

$$\phi=\frac{2\pi}{N}(j-0.5) \quad (j=1, 2\cdots N)$$

或いは、 (r, θ, ϕ) の極座標系で表現して

$$\theta=\cos^{-1}h=\cos^{-1}\left(\frac{2}{N}(i-0.5)-1\right) \quad \phi=\frac{2\pi}{N}(j-0.5) \quad \cdots\cdots(5)$$

である。

光ビーム追跡法は光ビーム径がターゲットセルを越えないことを前提としている。ターゲット上の光ビーム半径 r は、光軸に対して対象な通常の光学系の場合、光軸方向で最大となつて、次式で表すことができる。(図3参照)

$$r=(|H'+s'|-T)\tan u'=(|H'+s'|-T)\tan(u/m) \quad \cdots\cdots(6)$$

u, u' : 入射光線, 屈折光線が光軸と成す角

T : ターゲット位置 m : 横倍率 s : 像点距離

H' : 像側主点位置

光ビーム追跡法では、光源の全周に隙間なく光ビームを放射させるので、当然にセル境界を跨る光ビームが存在する訳で、その分照度分布計算結果に多少の誤差を生ずる。精度向上のためには、光ビーム外径 d をターゲットセル幅の1/100程度とする必要がある。しかしこのような ΔQ では、特に設定点光源数の多い場合、追跡すべき光線数が膨大となる。そこで追跡光線数を縮減できる、次項のモンテカルロ法を合わせ適用することとなる。

3. 改良されたモンテカルロ法

前項光ビーム追跡法において、光ビームをランダムに発生させ、これを追跡して照度分布を計算する方法が改良されたモンテカルロ法である。

光ビーム追跡法を基礎とするモンテカルロ法においては、光ビームの発射に際し、点光源位置と光ビーム発射方位に関して一様の確率分布とするならば、各光ビームは相対的に等価な ΔQ を持つこととなる。そうしておいて、光源の固有光度分布より定まる光度を持たせた光ビームを多数ランダムに発射して追跡し、光線入射の各ターゲットセルにおいて各光ビームの光度を加算すれば、この加算値は真のセル平均照度の近似値を与える。各光ビームに等価な ΔQ を持たせたので、光ビーム光度の値を光ビーム光束に比例する値とみなせるということである。そして各セルの面積は等しいので、この値は更にセル照度に比例する値とみなすことができる。

図3 非球面集光系
Fig.3 Configuration of aspheric condenser.

光ビーム発射方位に関して一様の確率分布を確保する必要がある。このためには前項の等立体角区分法の式(4)において、 $N(i)$ 及び $N(j)$ にそれぞれ区間 $[0, 1]$ の乱数 R_h および R_ϕ をあてはめればよい。そうすると発射ビームの方位は次式となる。

$$k=\sqrt{1-(2R_h-1)^2}\cos(2\pi R_\phi) \quad l=\sqrt{1-(2R_h-1)^2}\sin(2\pi R_\phi) \\ m=2R_h-1 \quad \theta=\cos^{-1}(2R_h-1) \quad \phi=2\pi R_\phi \quad \cdots\cdots(7)$$

そして、点光源位置に関して点光源数に乱数を一つあてはめればよいので、結局必要な乱数は3個である。

モンテカルロ法において算出照度分布は光ビーム発生数を増やすほど真の値に近づく。図4に、光源のみの光学系の追跡例を示す。ここで光源は、 $1\phi \times 21$ の円筒上に並べられた480個のランバーチアン配光点光源から成る擬似フィラメント光源である。

一定の精度要求に対して必要な追跡本数を知ることは重要である。いま平均1本の光線のターゲット各セルへの到達を期待できる光線発射本数を B_n とし、式(6)において u を発射光線の平均角度間隔の半分、 r をターゲット入射光線の平均間隔の半分と解釈して、それぞれ $\sqrt{4\pi/B_n}$ およびターゲットセル幅 w に置き換えるならば、次式が成立する。

$$B_n=\frac{4\pi}{u^2}=\frac{4\pi}{(mu')^2}=\frac{4\pi}{(m\tan^{-1}(w/(|H'+s'|-T)))^2} \quad \cdots\cdots(8)$$

図4 点光源のみの系の、モンテカルロ法による照度分布と追跡本数との関係。
Fig.4 Change of illuminance distribution by the number of tracing rays using MonteCarlo method in one point-source only system.

この B_n は必要追跡本数計算の指標 (Base Number) となるもので、つまり追跡本数の B_n に対する比が大きいほど、セル上到達光線密度が高く、従って照度分布計算精度が高いと予測できる。この比を追跡本数指数 (Ray Tracing Index Number) と呼ぶことにする。

点光源数自体は、セル間の光線密度の相対値を変えないので、直接的には B_n に影響しないと考えられる。しかし、点光源位置の方は、光学系の倍率 m および物点距離 s の変化を通して影響するであろう。そのため各光源位置で B_n を計算して平均すれば、より正確な予測となるが、追跡時間短縮のために長い計算をしても能率的ではなく、実際には光源中心位置の値で代替する。

光源のみの系、楕円ミラーとその焦点上に置かれた光源より成る系、および図3に示すような集光レンズ系の各々に対して、光源を点光源1個および480個の点光源からなる擬似フィラメントとした場合について、本モンテカルロ法を実行し、追跡光線数と計算精度の関係を調べた。但し楕円ミラーにおいては、直射光がターゲットに入射しないような光源配光としている。

図5がその結果で、横軸は追跡本数指数 (追跡本数の B_n に対する比)、縦軸は、ターゲット中心位置照度の、各追跡本数にて追跡を8回繰り返したときの標準偏差の平均値に対する割合である。そして図中の曲線は、正規分布の母集団から N 個をサンプリングしたときの標準偏差の期待値 ($1/\sqrt{N}$ に比例) を図示したものである。

3 光学系が性質を大きく異にし、 B_n の値もかなり違うにも拘わらず、全データがこの曲線に沿ってほぼ並んでいることから、指標 B_n は妥当なものと言することができる。また、点光源数 (1 個および480個) によっては必要追跡本数が変わらないという推論も立証されているといえる。

図5において、横軸2000のとき縦軸0.15である。このことから、追跡本数指数を2000程度とするならば、 3σ で $0.15 \times 3 \approx 5\%$ 程度の計算精度が得られることがわかる。

図5 各系におけるモンテカルロ法の計算精度
P: 点光源1個 F: $1\phi \times 2l$ の円筒上に並べられた480個の点光源
Fig.5 Accuracy of the calculation by MonteCarlo method in the various systems.
P: One point-source. F: 480point-sources on $1\phi \times 2l$ cylinder.

4. 従来のモンテカルロ法

従来のモンテカルロ法では、光源として小さな面光源を設定し、光ビームの保持光束を光度 I_n ではなく、輝度 $L_n = I_n / \Delta A \cdot \cos \theta$ (ΔA : 光源面積) の関数としている。また、光線の平均発射間隔が緯度 θ 、経度 ϕ それぞれの方向で等平面角度間隔となるよう、 θ, ϕ それぞれに一樣確率分布を適用する。そうすると、上記式(7)は、2 個の乱数を R_θ, R_ϕ として、
 $\theta = \sin^{-1} \sqrt{R_\theta} \quad \phi = 2\pi R_\phi \dots \dots \dots (9)$
となる。この方が一般的であるが^{(1)~(5)}、しかしこのように角度 θ に一樣確率分布を適用すると、各光ビームの発射時立体角は等価ではなく (いわゆる球帯係数に比例したものとなり)、上記式(8)の議論は適用できない。

5. まとめ

モンテカルロ法による照度分布算出方法において、光線発射方法を変更するならば、発生光線数と計算精度の関係が明らかとなることを示した。

点光源より一定光度の光ビームを等立体角間隔で放射させれば、追跡本数指数なる量の導入が可能となり、この指数を用いて、必要な計算精度を得るための発生光線数を予測することができる。

最後に、等立体角分割法に関しご教示いただいた東海大学草川徹教授に深い感謝の意を表します。

参 考 文 献

- (1) 谷口博他: パソコン活用のモンテカルロ法による放射伝熱解析, コロナ社, pp.48-50 (1994).
- (2) K. Kinameri, K. Akazawa and M. Awata: The MonteCarlo method in the predetermination of a luminous intensity distribution, J. of Light & Visual Environment, 10, pp.57-66 (1986).
- (3) 長田正義: モンテカルロシミュレーションによる凹閉面室内空間の照度分布計算, 照学誌, 72, pp.596-601 (1988).
- (4) 内田暁, 大谷義彦: タスクアンビエント照明における影の特性についての基礎的検討, 照学誌, 82, pp.580-587 (1998).
- (5) 牛山善太: 照明光学系シミュレーションにおけるモンテカルロ法の応用, 光技術コンタクト, 34, pp.460-467 (1996).

(受付日1999年11月26日/採録日2000年5月11日)

祝 郁夫 (専門会員)
有限会社照明光学研究所

昭和14年生れ, 昭和36年島根大学理学部卒, 現在(有)照明光学研究所代表, 光線追跡ソフトの開発, 光源開発コンサルティングに従事。