PEEC法による電源供給系のモデル化手法

谷 貞宏*

Modeling of Power Supply Planes Based on PEEC Method

Sadahiro TANI*

* シャープ株式会社モバイル液晶第1事業本部 (〒632-8567 奈良県天理市樺本町2613-1)

* Mobile Liquid Crystal Display Group I, SHARP Corporation(2613-1 Ichinomoto, Tenri-shi, Nara 632-8567)

1. はじめに

機器の高速化、高機能化に伴い、設計の初期段階からSI(signal integrity)/PI(power integrity)/EMI(electromagnetic interference)などの問題に対処することが急務となっている。そのためには、電磁界の振る舞いと回路動作とを考慮したシミュレーションの実現が重要となると考えられる¹⁾。

プリント回路板などで用いられているプレーン形状の電源供給系において、より正確なシミュレーションを行うためには、電源/GND層での穴、分断の影響や、電源/GND層につながるデバイスの動作などを考慮することが必要となり、FDTD法(Finite Difference Time Domain)を用いた電磁界解析とSPICE(simulation program with integrated circuit emphasis)系の回路解析との連携をとった解析システムが開発されている²⁾。

一方、設計の初期段階において、電源供給系の導体構造、バイパス・キャパシタ位置などの概略設計を行う場合には、試行錯誤が必要となるため、高速で動作するシミュレーションの実現が重要となる。そこで、PEEC法(Partial Element Equivalent Circuits)を用いた等価回路の回路解析により、ある程度シミュレーション精度を犠牲にすることによって高速性を実現した解析システムが開発されている³⁾。

そこで、本稿では、PEEC法の定式化により同手法の適用手順を明らかにするとともに、電源供給系への適用について説明する。

2. 定式化

PEEC法では、Maxwell方程式の準静的解および電界積分方程式(EFIE: Electric Field Integral Equation)を用い、抵抗R、部分インダクタンス(partial inductance)、容量C(あるいはポテンシャル係数P)からなる回路要素で誘電体を含む3次元導体構造をモデル化する⁴⁾。作成モデルにSPICE系の回路解析を適用することによって、システム全体の解析が可能となる。さらに、PEEC法の拡張として、電磁波

の伝播遅延(retardation)を考慮したrPEEC法(retarded PEEC)が提案されている⁵⁾。

本章では、PEEC法の適用手順を明らかにするために、まず、同手法の定式化を行う^{5)~7)}。なお、本稿では真空中の誘電率 ϵ_0 、透磁率 μ_0 、および物質の比誘電率 ϵ_r 、比透磁率 μ_r を用い、式(1)で表される誘電率 ϵ を用いる。また、以下では $\mu_r=1$ とする。

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (1)$$

2.1 積分方程式の導出

プリント回路板などの電源供給系では、基本的に導体を介して電源が供給される。そこで、定式化にあたり、解析領域内に導体が存在し、その伝導電流に対して変位電流が無視できる場合を取り扱う。Maxwellの方程式の一部である式(2)より、ベクトル・ポテンシャル $A(\mathbf{x}, t)$ が式(3)で定義される。

$$\nabla \cdot \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2)$$

$$\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \equiv \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

さらに、式(3)をMaxwellの方程式の別の式に代入し整理することにより、式(4)が得られる。同式より、スカラー・ポテンシャル $\Phi(\mathbf{x}, t)$ が式(5)で定義される。

$$\nabla \times \left(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \equiv -\nabla \Phi(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

ここでローレンツ条件(Lorentz condition)[†]を適用するならば、Maxwellの方程式の解として式(6)、(7)が得られる⁸⁾。

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (6)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (7)$$

ここで $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ は各々、観測点座標(ポテンシャルを計算する座標)、波源座標(電荷あるいは電流が存在する座標)

図1. 平板導体の容量セル（実線）および誘導セル（破線）

であり、光速を c とすると、波源から電磁波が放出された時刻 t' と観測点に到達する時刻 t との関係は式(8)で与えられる。

$$t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \quad (8)$$

また $\rho(\mathbf{x}', t')$, $\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')$ は各々波源の電荷密度、電流密度を表し、式(6), (7)の積分は波源を含む領域での体積分を表す。以下では、準静的の近似を行い、遅延を無視する。すなわち $t' = t$ として説明を進める。

ところで、変位電流が無視できる場合、導電率を σ とするとオームの法則（式(9)）が成立する。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)}{\sigma} \quad (9)$$

式(5), (9)より次式を得る。

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)}{\sigma} + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \Phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (10)$$

式(10)は電界に関し、導体上の任意の点で成り立つ式である。

次に、式(10)を差分化することにより、PEEC法で生成する等価回路の抵抗成分、インダクタンス成分、容量成分を表す式を導出する。導出手順を明確にするため、図1に示すような、厚さが無視できる導体を考える。この導体は回路節点を両端にもつ誘導セル（破線）、および回路節点を中心にもつ容量セル（実線）より構成され、図のような座標軸を設定するとき、電流は x 軸の方向にのみ流れ、電流分布は y 軸方向に一様であるものとする。

次に、式(10)を誘導セル a_i の表面 S_i で面積分する。ここで、図1の構造では、電流は x 方向のみに流れると設定しているため、式(10)の x 成分についてのみ積分する。

$$\int_{S_i} \frac{J_x(\mathbf{x}_i, t)}{\sigma_s} dS_i + \int_{S_i} \frac{\partial A_x(\mathbf{x}_i, t)}{\partial t} dS_i + \int_{S_i} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_i, t)}{\partial x} dS_i = 0 \quad (11)$$

なお、式(11)において、 σ_s はシート導電率を、 $\mathbf{x}_i$ は誘導セル a_i 内の座標を、面積分は a_i 内の xy 平面での積分を表している。また、同式の第1項、第2項、第3項は各々、PEEC法で生成する等価回路の抵抗成分、インダクタンス成分、容量成分に対応しており、次節で各成分式の導出について詳説する。

2.2 各成分式の導出

式(11)の第1項は、以下の様に計算される。まず、電流分布は y 軸方向に一様であるため、誘導セル a_i に流れる電流は $i_i(t) = w J_x(\mathbf{x}_i, t)$ となり、式(11)の第1項は式(12), (13)で表される。

$$\int_{S_i} \frac{J_x(\mathbf{x}_i, t)}{\sigma_s} dS_i = i_i(t) \frac{d}{\sigma_s} = i_i(t) R_i w \quad (12)$$

$$R_i = \frac{d}{\sigma_s w} \quad (13)$$

ここで、 R_i は誘導セル a_i の両端の回路節点間の抵抗素子であることがわかる。

次に、式(11)の第2項は本稿末の補足説明の式(a-2), (a-3)に示すように式(14), (15)で表現される。

$$\int_{S_i} \frac{\partial A_x(\mathbf{x}_i, t)}{\partial t} dS_i = w \sum_{j=1}^n L_{pij} \frac{\partial i_j(t)}{\partial t} \quad (14)$$

$$L_{pij} = \frac{\mu_0}{4\pi w^2} \int_{S_i} \int_{S_j'} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j'|} dS_i dS_j' \quad (15)$$

ここで、式(15)の L_{pij} は誘導セル a_i と誘導セル a_j' との間の部分自己相互インダクタンス^{9),10)}を、 n は誘導セルの個数を表している。したがって、式(14)は誘導セル a_i の両端の回路節点間の自己インダクタンス素子、および a_i と誘導結合のある他のインダクタンス素子に対応していることがわかる。

最後に、式(11)の第3項は、本稿末の補足説明の式(a-7), (a-8), (a-9), (a-10)に示すように式(16), (17), (18), (19)で表現される。

$$\int_{S_i} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_i, t)}{\partial x} dS_i = w [\Phi_{l(i)}(t) - \Phi_{k(i)}(t)] \quad (16)$$

$$\Phi_i(t) = \sum_{j=1}^m p_{ij} q_j(t) \quad (17)$$

$$p_{ij} = \frac{1}{4\pi \epsilon S_i S_j'} \int_{S_i} \int_{S_j'} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j'|} dS_i dS_j' \quad (18)$$

$$S_i = S_j' = dw \quad (19)$$

ここで、 $k(i)$, $l(i)$ は誘導セル a_i につながる容量セルの番号、 P_{ij} は容量セル a_i と容量セル a_j' との間のポテンシャル係数¹¹⁾、 $q_j(t)$ は容量セル a_j' での電荷、 m は容量セルの個数を表している。したがって、式(16)は誘導セル a_i の両端の回路節点につながるすべての容量素子に対応していることがわかる。なお、等価キャパシタンス行列 $\mathbf{C}$ を用い、ポテンシャル係数行列 $\mathbf{P}$ は $\mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1}$ で表すこともできる¹¹⁾。

式(12), (14), (16)を式(11)に代入し、両辺をセル幅 w で割算することにより、式(20)が得られる。

$$i_i(t) R_i + \sum_{j=1}^n L_{pij} \frac{\partial i_j(t)}{\partial t} + \Phi_{l(i)}(t) - \Phi_{k(i)}(t) = 0 \quad (20)$$

式(20)は誘導セル a_i の両端の回路節点にかかわるキルヒホッフ

図2. 簡単な PEEC モデルの例

(a) 容量セル(実線)およびX方向誘導セル(破線)

(b) PEECモデル

図3. 平行平板の PEEC モデルの例

フの電圧法則(KVL: Kirchhoff's voltage law)^{(8),(11)}を表しており R_i, L_{pij}, p_{ij} が誘導セル a_i の両端の回路節点につながるか、あるいは a_i と誘導結合のある回路素子値に対応している。すなわち、各誘導セルの式(20)に現れる素子を接続することによって、元の導体構造全体に対応する等価回路が構成できることがわかる。図1の構造について、誘導セル2個、容量セル3個からなる場合の平板導体の等価回路を図2に示す。

ところで、式(20)は厚みのない導体構造から導出したものであるが、断面での電流分布が一樣である厚みのある導体に対しても、一般性を失わず適用することができる。

3. 電源供給系への適用

本章では、式(20)を電源供給系の導体構造に適用し、等価回路を構成する方法について説明する。

3.1 平行平板構造への適用

まず、プリント回路板などの電源供給系で用いられている平行平板の導体に対して、解析に必要な最大周波数の波長の1/10以下の幅になるよう、誘導セル、容量セルを生成する。誘導セルについては、平板上の電流方向をx方向、y方向に分け、別々に生成する。ここで、セル幅をx方向、y方向とも w とする。図3(a)に適用例を示す。

次に、各セルにおける抵抗、インダクタンス、容量成分を表す式を導出する。抵抗成分は、 $R=R_{dc}+R_{ac}$ で与えられる。 R_{dc} は、グラウンド層でのリターン電流径路の抵抗値もあわせると、誘導セルにおける抵抗値の2倍となるため、導体厚 t を用いて式(21)で表すことができる。

$$R_{dc} = \frac{2}{\sigma t} \quad (21)$$

R_{ac} については、解析に必要な最大周波数を f とすると、式(22)で与えられる表皮効果厚 δ を式(21)の t に代入することにより、式(23)で表される。

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_0 \sigma}} \quad (22)$$

$$R_{ac} = 2 \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\sigma}} \quad (23)$$

次に、インダクタンス成分を表す式を導出する。平行平板では、注目誘導セルでの本電流と直下で対向するグラウ

ンド平板に流れるリターン電流との相互作用によるインダクタンスが支配的となると考えられ、他の誘導セルとの結合は無視可能である。したがって、式(20)での L_{pij} は注目誘導セルのみでのインダクタンスのみを考慮すればよいこととなる。平板間距離を h とするとき、該当インダクタンスは、本稿末の補足説明の式(a-15)より、式(24)で与えられる。

$$L = \mu_0 h \quad (24)$$

最後に容量成分を表す式を示す。平行平板では、平板上の容量セルの直下で対向するグラウンドに対する容量が支配的であり、インダクタンスの場合と同様に、容量セル間の容量は無視することができる。容量セルの対グラウンド容量は、平板間距離 h 、容量セル幅 w とすると、式(25)となる。

$$C = \frac{\epsilon w^2}{h} \quad (25)$$

以上で示したRLCを用いて平行平板全体の等価回路を構成する場合、平行平板全体の辺に位置する誘導セル、容量セルは幅が1/2となるため、該当セルでの各成分は $2R$, $2L$, $C/2$ となる。同様に、平板の四隅に位置する容量セルは面積が1/4となるため、 $C/4$ を用いる。等価回路の例を図3(b)に示す。

3.2 任意の3次元導体構造への適用

一般の導体では、電流方向に垂直な導体の断面では、表皮効果などの電磁効果により、電流が導体内で偏在することとなる。そこで、導体を断面での電流分布が一樣とみなせる導体(フィラメント)に分割する^{(9),(10)}。一方向に電流が流れ、表皮効果により導体表面に電流が偏在する場合の導体分割例を図4に示す。

図4. 一般導体分割例

次に、解析に必要な最大周波数の波長の1/10以下の長さになるよう、フィラメントを電流方向に垂直に分割し、誘導セルとする。同一導体から分割により生成された誘導素子間では、理論的に相互インダクタンス成分が発生することとなる。

最後に、元の導体の表面に位置する誘導セルの回路節点に容量セルを設置する。生成した各々のセルに式(20)を適用することにより、一般の導体に対してPEEC法が適用可能となる。

4. まとめ

PEEC法は3次元の導体構造から等価回路モデルを作成する手法であり、同モデルのSPICE系の回路モデルとの親和性も高く、同モデルの適用により、時間領域、周波数領域での比較的高速なシステム全体の解析が可能となる。複雑な電磁界現象の高精度な解析はFDTD法などのフルウェーブ型電磁界シミュレータによらなければならないが、構造概略を決定する場合など、PEEC法の適用が有効である問題は多いと考えられる。

(2006.5.17-受理)

文 献

- 1) 浅井秀樹：“チップ／パッケージ／ボード統合設計のための電気系シミュレーション技術”，エレクトロニクス実装学会システム実装CAE研究会公開研究会論文集，pp. 9-14, June 2005
- 2) 荒木健次，村山敏夫，鈴木 誠，渡邊貴之，浅井秀樹：“電源雑音をてなずけるツールを開発 プリント配線基板を4時間で解析”，日経エレクトロニクス，No. 892, pp. 117-130, Jan. 2005
- 3) 登坂正喜，平井天道，中尾友幸，佐藤敏郎，折原広幸，藤森省吾，井上淳樹，佐藤富夫，笹川隆平：“3つの事例に学ぶ電源雑音の制し方 LSIと基板を一体的に扱う”，日経エレクトロニクス，No. 904, pp. 115-127, July 2005
- 4) A. E. Ruehli: “Equivalent Circuit Models for Three-Dimensional Multiconductor Systems”, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. **MTT-22**, No. 3, pp. 216-221, Mar. 1974
- 5) H. Heeb and A. E. Ruehli: “Three-Dimensional Interconnect

Analysis Using Partial Element Equivalent Circuits”, IEEE Trans. Circuits and Systems I, Vol. **39**, No. 11, pp. 974-982, Nov. 1992

- 6) 浅井秀樹，渡邊貴之：“電子回路シミュレーション技法”，科学技術出版社，2003
- 7) 藤尾昇平：“PEEC法を用いた時間領域におけるシミュレーション”，月刊EMC，No. 204, pp. 37-47, Apr. 2005
- 8) 熊谷信明：“電磁理論”，コロナ社，1990
- 9) C. Cheng, J. Lillis, S. Lin and N. Chang: “Interconnect Analysis and Synthesis”, Wiley-Interscience, 2000
- 10) C. Cheng, J. Lillis, S. Lin and N. Chang: “LSI配線の解析と合成”，培風館，2003
- 11) 後藤憲一，山崎修一郎：“詳解電磁気学演習”，共立出版，1970

補足説明

A1. 誘導セルのインダクタンス成分式の導出

式(11)の第2項に式(7)を代入し，誘導セル a_i と他の誘導セルとの間の部分相互インダクタンス(partial mutual inductance)を表す式を，以下のようにして導出する。

まず，式(7)の積分は，誘導セル a_i と誘導結合のある誘導セル a'_j ごとの積分値の合算となる。さらに， $wJ_x(\mathbf{x}'_j, t) = i_j(t)$ を用いて電流密度を積分記号外に取り出し，積分と合算の順序を交換することにより，式(11)の第2項は式(a-1)で表されることとなる。

$$\begin{aligned} \int_{S_i} \frac{\partial A_x(\mathbf{x}_i, t)}{\partial t} dS_i &= \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'_j} \frac{J_x(\mathbf{x}'_j, t)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_j|} dS'_j \right] dS_i \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\mu_0}{4\pi w} \frac{\partial i_j(t)}{\partial t} \int_{S_i} \int_{S'_j} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_j|} dS_i dS'_j \end{aligned} \quad (a-1)$$

式(a-1)を観察することにより，二重積分が誘導セル a_i と誘導セル a'_j との間の部分相互インダクタンス^{9),10)}に対応していることが判明する。すなわち，第2項は式(a-3)で表される部分相互インダクタンス L_{pij} を用い，式(a-2)で表されることとなる。

$$\int_{S_i} \frac{\partial A_x(\mathbf{x}_i, t)}{\partial t} dS_i = w \sum_{j=1}^n L_{pij} \frac{\partial i_j(t)}{\partial t} \quad (a-2)$$

$$L_{pij} = \frac{\mu_0}{4\pi w^2} \int_{S_i} \int_{S'_j} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_j|} dS_i dS'_j \quad (a-3)$$

ここで， n は誘導セルの個数を表している。

A2. 誘導セルに接続する容量セルの容量成分式の導出

式(11)の第3項に式(6)を代入し， a_i の両端の節点につながる容量セルの容量成分を表す式を，以下のようにして導出する。

まず，誘導セル a_i での電流が x 方向のみに流れることから， a_i でのスカラー・ポテンシャル $\Phi(\mathbf{x}_i, t)$ の勾配(gradient)は， a_i の x 方向両端の節点につながる容量セルのポテンシ

ルの差から生じる勾配にほかならないことがわかる。すなわち、式(11)の第3項は式(a-4)で表される。

$$\int_{S_i} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_i, t)}{\partial x} dS_i = \frac{1}{d} \left[\int_{S_{l(i)}} \Phi(\mathbf{x}_{l(i)}, t) dS_{l(i)} - \int_{S_{k(i)}} \Phi(\mathbf{x}_{k(i)}, t) dS_{k(i)} \right] \quad (\text{a-4})$$

ここで、容量セルは厚みをもたないことから、式(a-4)に代入する式(6)の積分は面積分となる。また、式(6)の積分は、容量セル a_k と容量結合のある容量セル a_r ごとの積分の合算となる。さらに、式(a-4)右辺の各積分項において、 $S_r \rho(\mathbf{x}_r, t) = q_r(t)$ を用いて電荷密度を積分記号外に取り出し、積分と合算の演算順序を交換することにより、式(a-4)右辺の各積分項は式(a-5)で表されることとなる。

$$\begin{aligned} \int_{S_k} \Phi(\mathbf{x}_k, t) dS_k &= \int_{S_k} \left[\sum_{r=1}^m \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S_r'} \frac{\rho(\mathbf{x}_r', t)}{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_r'|} dS_r' \right] dS_k \\ &= \sum_{r=1}^m \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S_k} \int_{S_r'} \frac{\rho(\mathbf{x}_r', t)}{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_r'|} dS_r' dS_k \\ &= \sum_{r=1}^m \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_r(t)}{S_r'} \int_{S_k} \int_{S_r'} \frac{1}{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_r'|} dS_k dS_r' \end{aligned} \quad (\text{a-5})$$

式(a-5)を観察することにより、二重積分が容量セル a_k と容量セルと a_r の間のポテンシャル係数に対応していることが判明する。すなわち、式(a-4)右辺の各積分項は式(a-7)で表されるポテンシャル係数 p_{kr} を用い、式(a-6)で表されることとなる。

$$\int_{S_k} \Phi(\mathbf{x}_k, t) dS_k = S_k \sum_{r=1}^m p_{kr} q_r(t) \quad (\text{a-6})$$

$$p_{kr} = \frac{1}{4\pi\epsilon S_k S_r'} \int_{S_k} \int_{S_r'} \frac{1}{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_r'|} dS_k dS_r' \quad (\text{a-7})$$

$$S_k = S_r' = dw \quad (\text{a-8})$$

式(a-6)を式(a-4)に代入することにより、式(11)の第3項は、ポテンシャル係数 p_{kr} 式(a-7)および式(a-8)を用いて、式(a-9)、(a-10)で表されることがわかる。

$$\int_{S_i} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_i, t)}{\partial x} dS_i = w [\Phi_{l(i)}(t) - \Phi_{k(i)}(t)] \quad (\text{a-9})$$

$$\Phi_i(t) = \sum_{j=1}^m p_{ij} q_j(t) \quad (\text{a-10})$$

ただし、 $k(i)$ 、 $l(i)$ は誘導セル i につながる容量セルの番号を、 m は容量セルの個数を表す。

A3. 平行平板のインダクタンス成分式の導出

図5に示すように、平板間距離 h 、注目平板部分の幅 w 、平板長 d 、平板間の磁束密度 B 、磁束 ϕ 、電流 I 、単位幅あたりの電流密度 J とすると、 J 、 B 、 ϕ は下式で与えられる。

$$J = \frac{I}{w} \quad (\text{a-11})$$

図5. 平行平板のインダクタンス

$$B = \mu_0 J \quad (\text{a-12})$$

$$\phi = dhB \quad (\text{a-13})$$

以上から、平行平板におけるインダクタンス値 L は下式で与えられる。

$$L = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 dh}{w} \quad (\text{a-14})$$

平行平板の誘導セルにおけるインダクタンス値 L は $d=w$ として下式で与えられる。

$$L = \mu_0 h \quad (\text{a-15})$$

+用語解説

ローレンツ条件(Lorentz condition)：ヘルムホルツの定理⁸⁾

で示されるように、ベクトルは一般的にその回転(rotation)と発散(divergence)の両方を指定しなければ一意に定まらず、任意性が残る。本稿でのベクトル・ポテンシャルに関して、式(3)でその回転は指定されるが、その発散をどのように定めるかは任意であって、回転とは独立に指定することができる。そこで、真空中の誘電率 ϵ_0 、透磁率 μ_0 、および物質の比誘電率 ϵ_r 、比透磁率 μ_r 、スカラー・ポテンシャル Φ 、ベクトル・ポテンシャル A とすると、Maxwellの方程式が互いに数学的に同形で、 Φ および A のみに関する方程式で表されるよう、ベクトル・ポテンシャル A の発散を式(a-16)で指定する^{8),11)}。

$$\nabla \cdot A = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{a-16})$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} \quad (\text{a-17})$$

式(a-16)をローレンツ条件と呼ぶ。実際、同式を適用することによって、Maxwellの方程式は式(a-18)、(a-19)で表される。

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (\text{a-18})$$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 \mu_r J \quad (\text{a-19})$$

ただし、 ρ 、 J は各々波源の電荷密度、電流密度を表す。式(a-16)、(a-18)、(a-19)より導出される解が式(6)、(7)となる。