集合組織を考慮した弾/結晶粘塑性 有限要素シミュレーション

仲町 英治*

Journal of Japan Institute of Light Metals, Vol. 48, No. 11 (1998), pp. 556-562

Elastic/crystalline viscoplastic finite element simulation by introducing the texture effects

Eiji NAKAMACHI*

Keywords: finite element analysis, crystalline plasticity, texture, X-ray diffraction analysis, optimum material design

1. はじめに

近年、コンピュータの計算処理能力が進歩したために、これまで不可能と考えられていた複雑な材料創製や成形加工過程のコンピュータシミュレーションが手軽に行われるようになってきた。しかも、低価格のワークステーションあるいはパソコンなどを利用してである。これらのコンピュータによる模擬生産は仮想生産 (Virtual Manufacturing) と呼ばれ、材料創製と成形加工の分野で広く利用されるようになってきている¹⁾。近い将来、構造設計のためのシミュレーションと同等あるいはそれ以上の重要度で材料創製と材料加工のシミュレーションが行われるようになるであろう。これまで個別に発展してきた材料設計、加工設計、そして構造設計が統合された設計システムが構築されるであろう。そこで、本解説では、材料の創製と加工という、材料屋と機械屋の持ち分であった2分野をまたがって展開されるであろうコンピュータシミュレーションの世界について述べることにする。

図1には初期にランダムな結晶方位分布をする材料が図中に示す変形を受けた場合の{111}極点図の変化について、一様ひずみ仮定の下で解析的に求めた結果を示す。各変形様式に応じて、優先方位が異なり、その優先方位への偏りを持った固有の結晶方位分布、つまり集合組織を持つようになることがわかる。この集合組織は材料の異方特性と関連しており、成形能向上のために積極的にこの集合組織を利用することを目指した結晶制御材料創製技術が展開中である。本解説では、アルミニウム合金板材の成形能向上を目的とした結晶集合組織設計のための有限要素シミュレーション手法について述べることにする^{2)~11)}。

2. 結晶塑性理論モデル

最近、有限要素を結晶と直接対応させるマイクロ材料モデルを用いた大規模有限要素解析がいくつか試みられている。結

晶塑性理論では、結晶固有のすべり系において、それ自身および他のすべり系との相互作用によって生じる硬化・軟化発展を定式化し、最終的に弾結晶塑性構成式を導出することになる。1938年のTaylorに始まる結晶塑性の理論的・実験的研究、1979年のAsaroに始まる大ひずみ塑性変形および成形過程の結晶塑性有限要素解析に関する研究に関する文献を章末に示す^{12)~33)}。塑性理論の歴史的発展の解説は高橋^{20), 21)}、有限要素解析については富田²⁴⁾の教科書にそれぞれ譲り、本解説では、板材の成形能評価が可能な結晶塑性有限要素法に利用される結晶塑性構成式について解説する。特に、結晶方位分布、つまり集合組織の有限要素モデル化を取り上げる。現在までに提案されている結晶塑性材料モデルで留意すべき点は、それらは個々の結晶の特性をモデル化しているのではなく、実験計測に基づいて結晶集合体としてのモデルの特性をパラメータ同定している、つまり、実験による材料特性値の決定には統計的平均化処理が入っている。この意味で結晶という実体に基づいてはいるが、得られる構成式は“メゾ”現象論モデルの概念の下で展開された数理モデルと理解できる。構成式のパラメータ同定において、この結晶という単位をうまく組込んだモデル化が必要となるのである。

近年、結晶構造実験計測技術の進歩によって、これらメゾスケールの計測精度は著しく向上している。X線回折解析による結晶方位分布自動計測あるいは結晶粒単位の残留応力計測、画像処理による結晶粒形状計測などが可能となっている。以下では、結晶集合体モデルの特性パラメータを、結晶形態因子 (結晶方位、結晶粒形状) および結晶物理因子 (硬化発展) に限定して構成式を導く過程を示す。

3. 結晶形態および応力-ひずみ関係の実験計測結果

アルミニウムを対象とすることから結晶格子構造を面心立方格子に限定すると、結晶形態因子は結晶方位と結晶粒形状

* 大阪工業大学工学部機械工学科 (〒535-8585 大阪市旭区大宮 5-16-1)。Faculty of Engineering, Osaka Institute of Technology (5-16-1. Omiya, Asahi-ku, Osaka-shi, Osaka 535-8585).

受理日: 平成10年6月1日

図1 各変形条件下での結晶方位分布 ($\{111\}$ 極点図) 形成に関する解析結果
(一様変形仮定, 初期ランダム方位分布仮定)

に限定される。材料は製造過程に依存してその結晶方位が優先方位に偏って分布する。つまり集合組織が形成される。この集合組織は変形, 再結晶, 変態に誘起され, 材料の弾・塑性異方性, 塑性硬化発展に関係している。本解説では, まず圧延加工によって得られた板材の初期集合組織, および引張変形 (JIS 5号試験片の圧延方向単軸引張試験) による結晶方位分布の変化に関する実験計測結果を示し, 結晶形態因子についての情報を提供することにする。材料としては面心立方結晶である純アルミニウム (A1050-O), および2.5%Mg添加のアルミニウム合金 (A5052-O) を用いた。X線回折実験計測には, 剛性ゴニオメータと極点試料台を用いた自動計測装置 (反射法と透過法の併用) を用いた。図2(a)には純アルミニウム板を引張った場合の $\{111\}$ 極点図の変化を示す。純アルミニウム板材の場合, 初期では圧延加工に誘起された優先方位を持つCopper型集合組織が見られるが, 引張りを受けることによって結晶方位分布が変化していることがわかる。図2(b)にはMg添加のアルミニウム合金 (A5052-O) の $\{111\}$ 極点図の実験結果を示す。圧延加工されたアルミニウム合金板材の場合, Brass型の集合組織形成が顕著であり, 引張変形に伴い, Brass型および $[010]$ 方向への分布の偏りが顕著になることがわかる。同一のアルミニウム合金 A5052-O をさらに圧延加工して0.1mmの板厚にした上で焼なまし処理をして粒平均寸法を100ミクロンとした場合の初期および引張りひずみ0.08の場合の $\{111\}$ 極点図を図2(c)に示す。初期には, 焼なましによってランダムな結晶方位分布が見られるが, 引張変形によってこのランダムな分布がCube型および $[010]$ 方位に偏った方位分布となることがわかる。以上は, 面心立方結晶であるアルミニウムに関する実験計測結果であるが, 長嶋らの著書「集合組織」には他の金属結晶材料の集合組織形成に関する実験計測結果が示されている^{34), 35)}。

つぎに, 図3(a)には平均結晶粒径の相違によるアルミニウム合金 (A5052-O 材) の応力-ひずみ関係を実験によって求めた結果を示す。図3(b)より初期降伏応力がHall-Petchの式, つまり, 平均結晶粒径の2乗根に比例することがわか

(a) $\{111\}$ 極点図
純アルミニウム板材1050-O(板厚0.30mm 平均結晶粒径 $40\mu\text{m}$)

(b) $\{111\}$ 極点図
アルミニウム合金板材5052-O(板厚0.25mm 平均結晶粒径 $9.6\mu\text{m}$)

(c) $\{111\}$ 極点図
アルミニウム合金板材5052-O(板厚0.10mm 平均結晶粒径 $100\mu\text{m}$)

図2 アルミニウム材料の単軸引張変形に伴う $\{111\}$ 極点図の変化

る。表1には材料特性値を示す。結晶のすべり系で定義される初期臨界分解せん断応力, さらに変形誘起の硬化を記述す

(a) 結晶粒径の相違による応力-ひずみ関係への影響

(b) 結晶粒径と初期降伏応力関係 (Hall-Petch関係式)

図3 平均結晶粒径の相違が材料特性に与える影響に関する実験計測結果

る硬化発展式に基づいて構成式は定式化される。多結晶の場合は、結晶形態因子（結晶方位・結晶格子構造と結晶粒形状・粒界）が硬化発展に影響するために、構成式を表すパラメータの数を絞込む必要が生じる。硬化・軟化に最も影響のある因子を抽出することが要求される。

4. 結晶塑性構成式^{1)~6),24)~33)}

ここでは、結晶すべり系で定義された硬化・軟化発展方程式に基づいて結晶塑性構成式を導出する。すべり系(a)において、結晶で定義されるすべり面に対する単位法線ベクトルを $\mathbf{m}^a$ 、すべり方向の単位ベクトルを $\mathbf{s}^a$ とする。これらのベクトルは変形に伴い回転する。そこで、変形後のベクトルを $\mathbf{m}^{*a}$, $\mathbf{s}^{*a}$ とすると、変形速度勾配テンソル $\mathbf{L}$ 、変形速度（ひずみ速度）テンソル $\mathbf{d}$ および連続体スピントテンソル $\mathbf{w}$ は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{d} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}^* + \mathbf{d}^p, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}^* + \mathbf{w}^p, \\ \mathbf{L}^p &= \mathbf{d}^p + \mathbf{w}^p = \sum_a \dot{\gamma}^a \mathbf{s}^{*a} \mathbf{m}^{*a} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、添字“*”は格子の伸びと回転の成分、添字“p”はすべりの成分、 $\dot{\gamma}^a$ はすべり系(a)のせん断ひずみ速度をそれぞれ表す。変形速度テンソルの塑性部分 $\mathbf{d}^p$ およびスピントテンソルの塑性部分 $\mathbf{w}^p$ は $\mathbf{m}^a$, $\mathbf{s}^a$ およびせん断ひずみ速度によって求めることができる。結晶のすべり変形によって弾性構成関係式は影響を受けないとして速度形の構成式を求めるとつぎのようになる。応力速度としては Kirchhoff 応力 Jaumann 速度 $\hat{\mathbf{S}}$ を採用した。

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}^* - \sum_{a=1}^N \beta^a \dot{\gamma}^a = \mathbf{D}^e : \mathbf{d} - \sum_{a=1}^N \mathbf{R}^a \dot{\gamma}^a \quad (2)$$

表1 平均結晶粒径と材料特性値

アルミニウム合金	Mg添加量(%)	結晶粒径(μm)	降伏応力(MPa)	引張強さ(MPa)	伸び(%)	n 値
5052-O	2.5	10	113.4	249.9	19.8	0.305
		12	121.5	259.7	20.3	0.306
		42	87.7	238.8	18.5	0.307
		300	74.1	186.4	15.5	0.357
		3000	72.2	161.1	14.9	0.369

(a) 影響距離 r

(b) 結晶で定義されたすべり系間の角度

図4 硬化・軟化発展方程式における係数の説明

結晶のすべり系(a)におけるせん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}^a$ を求めるためにつぎに示す粘塑性構成式を採用する。

せん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}^{(a)}$ とせん断応力との関係は指数則に従うものと仮定する。

$$\dot{\gamma}^{(a)} = \dot{\gamma}^{(a)} \left[\frac{\tau^{(a)}}{g^{(a)}} \right] \left[\left| \frac{\tau^{(a)}}{g^{(a)}} \right| \right]^{\frac{1}{m}-1} \quad (3)$$

関数 $g^{(a)}$ はすべり系(a)の基準せん断応力, $\tau^{(a)}$ はすべり系(a)の分解せん断応力, $\dot{\gamma}^{(a)}$ はすべり系(a)の基準せん断ひずみ速度, m はひずみ速度感度指数を示す。

ここで、新たに $g^{(a)}$ の硬化・軟化発展方程式を提案する。

$$\dot{g}^{(a)} = \sum_{b=1}^N (h_{ab} - s_{ab}) |\dot{\gamma}^{(b)}| \quad (4)$$

ここで h_{ab} は硬化発展に関する項, s_{ab} は軟化発展に関する項とした。

(a) 硬化発展係数

h_{ab} は、粒径 d 、せん断ひずみ γ の関数とし次式のように定義した。

$$h_{ab} = \left\{ h_1 - h_2 \tanh \left(\frac{d}{h_3} \right) \right\} n C \{ C(\gamma_0 + \gamma) \}^{n-1} q_{ab} \quad (5)$$

h_1, h_2, h_3 は粒径に依存する定数, n, C, γ_0 は転移密度による

図5 ポロノイ多角形近似多結晶モデルを用いた単軸引張変形解析結果 (18, 25, 32, 55ミクロンの平均粒径を持つ結晶, 各公称ひずみにおける板厚ひずみ分布)

図8 典型的な優先方位を持つ単結晶円板の円筒絞り成形における変形と板厚ひずみ分布 (Cube型, Brass型およびCopper型集合組織の優先方位を持つ単結晶板材モデル)

図11 Copper型方位, Cube型方位およびBrass型方位の組合せによる結晶方位分布 (集合組織) 設計 (最良解と最悪解における結晶方位分布, および20 mmパンチ張出しにおける板厚ひずみ分布の比較)

図10 Copper型方位およびCube型方位の組合せによる結晶方位分布 (集合組織) 設計 (最良解と最悪解における結晶方位分布, および20 mmパンチ張出しにおける板厚ひずみ分布の比較)

図6 ポロノイ多角形近似多結晶モデルの単軸引張変形に伴う結晶方位分布の変化 (各モデルの{111} pole figure)

硬化発展を表す係数, d は平均粒径, q_{ab} は潜在硬化パラメータである。

(b) 軟化発展係数

s_{ab} は, 粒径 d , せん断ひずみ γ の関数とし次式のように定義した。

$$s_{ab} = \left\{ s_1 + s_2 \tanh \left(\frac{d}{s_3} \right) \right\} \left(\frac{1}{1 + r/r_0} \right) s_0 g^{(a)} \tau^{(b)} p_{ab} \quad (6)$$

ここで s_1, s_2, s_3 は粒径の影響を示す係数, r は隣接するすべり系間の影響距離 (図4(a)), s_0 は応力 (転位密度) の減少やすべり仕事軟化 (転位密度) の影響を示す係数である。 p_{ab} は交差すべりに起因する動的回復効果を表すマトリックスであり, 次式のように定義した。

$$p_{ab} = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\beta_{ab}) \quad (7)$$

ここで β_{ab} は図4(b)に示すようにすべり方向同士がなす角度とした。

5. 弾/結晶粘塑性有限要素解析

以上に示した弾/結晶粘塑性構成式を組込んだ有限要素法を用いて単純な変形解析を行った例を示す。まず, ひずみの局所化に対する結晶粒径の影響を検討するために, 結晶粒径が異なる4つの多結晶モデルを用いて単軸引張りの弾/結晶粘塑性有限要素解析を行った。解析に用いる材料は5052アル

図7 ポロノイ多角形近似多結晶モデルの単軸引張変形における応力-ひずみ関係

ミニウム合金とし, 図5に示すように, 長方形板 $0.1 \text{ mm} \times 0.3 \text{ mm}$, 板厚 0.05 mm を平均結晶粒径 $55, 32, 25$ および 18 μm となるようにポロノイ多角形分割を行った。各結晶粒に対して, 図6に示すように Copper 型, Brass 型, Cube 型および R 型の方位 (3つのオイラー角によって方向を定義) から結晶粒の数が増えるほど分散の度合を大きくした方位を設定したモデルを作成した。結晶方位は有限要素の積分点にランダムに割当てた。図7に各モデルの応力-ひずみ線図を, 図5に各公称ひずみにおける板厚ひずみ分布を, 図6には結晶方位分布 ({111} 極点図) の変化をそれぞれ示す。結晶粒径が大きいほど特定の結晶粒にひずみが集中することがわかる。さらに, 同一の結晶粒内でも境界の影響を受けひずみが様々となることが示された。結晶粒径が小さくなり, 十分な数の結晶が存在するようになると, すべり系同士の变形拘束が強くなり, 特定の結晶粒へのひずみ集中が緩和され, 全体的に見るとより一様なひずみ分布を示すことがわかる。最終的には, ある方向を持った局所くびれ帯が生じることがわかる。この計算では軟化発展方程式の影響距離 r を0としているが, 影響距離 r の影響も検討し, この影響距離 r がひずみの局所化に影響することも確認した。

長嶋らのアルミニウム板材の集合組織の観察結果を参考にして Copper 型, Brass 型および Cube 型の優先方位を持つ3種類の単結晶板の絞り成形特性を検討することにした。各優先方位に対応するアルミニウム板材の{111}極点図および単結晶円板の円筒絞り成形における変形状および板厚ひずみ分布を図8に示す。圧延方向を y 軸方向とし, $1/4$ 対称を仮定した計算を行った。これらの結果から, Cube 型単結晶板は圧延方向に対して 45° 方向の強度が大きく, 材料の流入量が多いのに対して, Copper 型および Brass 型優先方位を持つ単結晶板は圧延方向に対して 0° および 90° 方向の強度が大きく, それらの方向への流入が顕著であることがわかる。以上の結果から, 特定の方向の流入量を増加させたい絞り成形に対して, 優先方位の持つ成形特性をうまく利用した成形手法の開発が可能となるものと考えられる。

6. 離散最適化・有限要素法による結晶集合組織設計の試み

有限要素法によって成形過程のシミュレーションが可能となり, 材料の成形特性の評価が可能となることを示したが,

図9 板材の張出成形能評価のためのLDH試験装置、板形状および優先方位（集合組織）

つぎには、成形特性が良好な結晶方位の分布を探索することを検討する。つまり、良好な成形能を有する板材の結晶方位分布設計である。この材料設計のためには、最適化のための数値手法を展開する必要がある。また、この種の最適化に用いられる評価関数（目的関数）は設計変数によって陽な形で表されることが不可能な場合がほとんどである。そのために、目的関数の設計変数による微分、つまり、勾配を求めることが不可能でありニュートン法などは利用できない。このような非線形最適化問題に対する最適化手法としては一般に離散最適化法が用いられる。離散最適化法には、格子探索法、シンプレックス法、Simulated Annealing法、遺伝アルゴリズム（GA）、ニューラルネットワークなどがあるが、本解説では、格子探索法とシンプレックス法を併用することで結晶方位分布の最適設計を試みた結果を示す^{36),37)}。

図9(a), (b)に示す張出成形能試験であるLDH試験および板形状を採用し、有限要素解析により最小板厚ひずみを求め、その値を成形能を表す評価基準値とした。つまり、最小板厚ひずみの絶対値が小さいほど成形性が高いと考え、この目的関数値の最小値探索をシンプレックス法で行うのである。ここでは、長嶋らのアルミニウム板材料の集合組織（結晶方位分布）に関する研究成果および著者らによる実験計測結果を参考にして、3つの主要な優先方位を選択した。つまり、図9(c)に示す板材圧延集合組織であるBrass型（B方位）およびCopper型（C方位）、さらに再結晶集合組織であるCube型（W方位）である。設計変数として、これらの優先方位（オイラー角によって定義）からの分散角度を採用した。設計変数である分散角度は、B, CおよびW方位に対して各々 α , β および γ で表し、その範囲は $0^\circ \sim 10^\circ$ とした。有限要素としては、8節点アイソパラメトリック・選択低減積分要素を採用し、各積分点に設定した分散角度の範囲内で一様に分布するように結晶方位を割り当てた。図9(b)に示すように長方形板の1/4領域を1125有限要素に分割した。ここでは、球頭パンチを20 mm進行させたときの板厚減少率を評価指数（目的関数）とする。最適化では、2設計変数 β , γ 、および3設計変数 α , β , γ のそれぞれの組合せを採用した。有限要素解析によって得られた最小板厚ひずみが最小になる、つまり成形能が最良である結晶方位分布の組合せ（ β , γ ）および（ α , β , γ ）を、離散最適化手法によって求めた結果を図10および図11に示す。図10および図11には比較のために、探索領域（設計変数空間内）における最悪条件も比較のために示した。最良解（大域的極小解、最小解、最適解）の探索では、いくつかの局所的極小解が存在することが確認され、離散最適化のみが探索手法として有効であることが確認され

た。図からもわかるように、最良解の条件の方が滑らかなひずみ分布を示し、結晶方位の回転も少ないことがわかった。最悪解では中央部へのひずみ集中が著しく、結晶方位の回転も顕著であることがわかった。このことから、優先方位を基に展開された集合組織設計によって成形能の向上が期待できることが確認できた。

7. おわりに

結晶塑性理論を基にした有限要素シミュレーションを用いることで、結晶形態因子（ここでは結晶方位と平均結晶粒径）が変形特性、成形能に与える影響について検討することが可能であることを示した。つぎに、離散最適化手法を導入することで材料設計が可能となることを示した。つまり、3つの代表的な集合組織を規定する優先方位の組合せによって結晶方位分布モデルの構築を試みた。そこでは、各優先方位からの分散角度を設計変数とすることで最良な成形能を有する結晶方位分布が決定できることを示した。アルミニウム合金板材に適用し、本最適材料設計手法が板材の集合組織設計のための有効な手法となることを示した。

有限要素シミュレーション手法の精度が向上し、結晶構造特性を反映できる解析が可能となりつつあることから、従来、機械加工屋と材料設計屋が個別に展開してきた材料開発技術が融合され、新たな展開を迎えることが期待できると考えるものである。

参考文献

- 1) 仲町英治編著：ヴァーチャルファクトリー，工業調査会，(1994)。
- 2) 仲町英治：塑性と加工，37 (1996)，477。
- 3) 森本秀夫，仲町英治：平成8年度塑性加工春季講演会論文集，(1996)，36。
- 4) E. Nakamachi and X. Dong: Engineering Computations, 13 (1996), 308.
- 5) E. Nakamachi and X. Dong: J. Appl. Mech., Trans. ASME (E), 64 (1997), 519.
- 6) E. Nakamachi: Theoretical and Applied Mechanics 1996, (Ed. Tatsumi, T.), Elsevier, (1997), 323.
- 7) S. Nemat-Nasser: ibid., 461.
- 8) W. Yang and W. B. Lee: Mesoplasticity and its Applications, Springer-Verlag Berlin, 1993.
- 9) 左海哲夫：第147回塑性加工シンポジウムテキスト，(1997)，33。
- 10) 前田恭志：ibid., 51.
- 11) 仲町英治：ibid., 59.
- 12) G. I. Taylor: J. Inst. Metals, 62 (1938), 307.
- 13) J. F. W. Bishop and R. Hill: Phil. Mag., 42 (1951), 1298.
- 14) B. Budiansky and T. T. Wu: Proc. 4th Congr. Appl. Mech., 2 (1962), 1175.

- 15) J. W. Hutchinson: *J. Mech. Phys. Solids*, **13** (1965), 89.
- 16) R. Hill: *J. Mech. Phys. Solids*, **13** (1965), 89.
- 17) R. Hill: *J. Mech. Phys. Solids*, **14** (1965), 95.
- 18) J. W. Hutchinson: *Proc. Roy. Sci. London, Ser. A*, 319 (1970), 247.
- 19) 神馬 敬, 室田忠雄, 一柳 高: *日本機械学会誌*, **75** (1972), 602.
- 20) 高橋 寛: *日本機械学会論文集 (A 編)*, **39** (1973), 3273.
- 21) 高橋 寛: *日本機械学会論文集 (A 編)*, **42** (1976), 396.
- 22) 後藤 学: *日本機械学会論文集 (A 編)*, **43** (1977), 3723.
- 23) 大橋鉄也: *日本金属学会誌*, **51** (1987), 37.
- 24) 冨田佳宏: *数値弾塑性力学*, (1990), 養賢堂.
- 25) R. J. Asaro: *Acta Metall.*, **27** (1979), 445.
- 26) R. J. Asaro: *Crystal plasticity, J. Appl. Mech.*, **50** (1983), 921.
- 27) D. Peirce, R. J. Asaro and A. Needleman: *Acta metall. mater.*, **31** (1983), 1951.
- 28) D. Peirce, C. F. Shih and A. Needleman: *Computers & Structure*, **18** (1984), 875.
- 29) A. J. Beaudoin, K. K. Mathur, P. R. Dawson and G. C. Johnson: *Int. J. Plasticity*, **9** (1993), 833.
- 30) K. W. Neal: *Int. J. Mech. Sci.*, **35** (1993), 1053.
- 31) A. J. Beaudoin, P. R. Dawson, K. K. Mathur and U. F. Kocks: *Int. J. Plasticity*, **11** (1995), 501.
- 32) S. E. Schoenfeld, S. Ahzi and R. J. Asaro: *J. Mech. Phys. Solids*, **43** (1995), 415.
- 33) V. C. Prantil, P. R. Dawson and Y. B. Chastel: *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, **3** (1995), 215.
- 34) 長嶋晋一: *集合組織*, 丸善, (1984).
- 35) 水嶋輝夫, 犀川 浩, 峯岸知己, 山根壽己, 荒木秀樹: *軽金属*, **42** (1992), 574.
- 36) 仲町英治, 濱田佳紀: *塑性と加工*, **39** (1998), 252.
- 37) 片山傳生, 仲町英治, 中野健史: *日本機械学会論文集 (A 編)*, **61** (1995), 2229.