初等塑性力学 (その 2)

Elementary theory of plasticity —Part II—

桑原 利彦*

Toshihiko KUWABARA*

本稿では、前稿²⁷⁾に引き続き、塑性変形する等方性材料において、応力増分とひずみ増分の間に成り立つ関係式（構成式）および加工硬化の定式の手法について解説する。さらにそれら理論（材料モデル）の妥当性を示す実験結果を紹介する。

本稿における式、図および参考文献の番号は前稿²⁷⁾からの連番としてつけられている。

4. 塑性変形における応力とひずみの関係式

4.1 ひずみ増分の定義

xy 平面上の微小線素 PX , PY を考える（図 20）。 PX を x 軸に、 PY を y 軸に平行にとり、 $PX=\Delta x$, $PY=\Delta y$ とする。時刻 t における点 P の x 方向および y 方向の速度成分を各々、 $\dot{u}=\dot{u}(x,y,z,t)$, $\dot{v}=\dot{v}(x,y,z,t)$ とすると（ここで $\square\equiv(\partial\square/\partial t)$ ），点 X の x 方向および y 方向の速度成分は各々、 $\dot{u}+(\partial\dot{u}/\partial x)\Delta x$, $\dot{v}+(\partial\dot{v}/\partial x)\Delta x$ で、点 Y の x 方向および y 方向の速度成分は各々 $\dot{u}+(\partial\dot{u}/\partial y)\Delta y$, $\dot{v}+(\partial\dot{v}/\partial y)\Delta y$ で与えられる。さらに微小時間 Δt 後には、各線素は $P'X'$, $P'Y'$ に移動する。このとき、点 P における、 xy 平面内のひずみ増分の各成分は次式で定義される。

図 20 微小時間 Δt 後の、微小線素 PX , PY の変形

$$\begin{aligned}
 d\epsilon_{xx} &\equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P'X' - PX}{PX} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{\Delta x + (\partial\dot{u}/\partial x)\Delta x\Delta t\} - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial\dot{u}}{\partial x} \Delta t \\
 d\epsilon_{yy} &\equiv \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P'Y' - PY}{PY} \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\{\Delta y + (\partial\dot{v}/\partial y)\Delta y\Delta t\} - \Delta y}{\Delta y} = \frac{\partial\dot{v}}{\partial y} \Delta t \quad (44) \\
 d\epsilon_{xy} &\equiv \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{1}{2} (\angle X'P'X'' + \angle Y'P'Y'') \\
 &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{1}{2} \left(\frac{(\partial\dot{v}/\partial x)\Delta x\Delta t}{\Delta x} + \frac{(\partial\dot{u}/\partial y)\Delta y\Delta t}{\Delta y} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\dot{v}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{u}}{\partial y} \right) \Delta t
 \end{aligned}$$

ここで $d\epsilon_{xy}$ はせん断ひずみ増分のテンソル成分である。材料力学で使う工学せん断ひずみ増分を $d\gamma_{xy}$ とすれば $d\epsilon_{xy}=d\gamma_{xy}/2$ である。せん断ひずみ増分として $d\epsilon_{xy}$ を新たに導入する理由は、後出の式 (51) に見られるように、ひずみ増分と応力の関係式をすべての成分について同じ式形式で統一的に表現するための数学上の配慮である。

点 P の z 軸方向の速度を $w=w(x,y,z,t)$ とすれば、他のひずみ増分の成分は次式より計算される。

$$\begin{aligned}
 d\epsilon_{zz} &= \frac{\partial\dot{w}}{\partial z} \Delta t \\
 d\epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial\dot{w}}{\partial y} \right) \Delta t \\
 d\epsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{u}}{\partial z} \right) \Delta t \quad (45)
 \end{aligned}$$

4.2 ひずみ増分理論

金属に単軸引張変形を加えるとき、全ひずみ ϵ は弾性ひずみ ϵ^e と塑性ひずみ ϵ^p の和になることはすでに述べた（式 (9)）。応力がさらに $d\sigma$ だけ増えるとひずみ増分 $d\epsilon$ が発生し、 $d\epsilon$ は弾性ひずみ増分 $d\epsilon^e$ と塑性ひずみ増分の $d\epsilon^p$ 和として表せる（図 21）。すなわち、

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad (46)$$

$d\epsilon$ を特に全ひずみ増分とよぶ。単軸応力状態において材料が

* 東京農工大学共生科学技術研究院（〒184-8588 東京都小金井市中町 2-24-16）。Tokyo University of Agriculture and Technology (2-24-16 Nakamachi, Koganei-shi, Tokyo 184-8588).

受付日：平成 18 年 11 月 29 日 受理日：平成 19 年 1 月 29 日

図 21 単軸応力状態における弾性ひずみ増分 $d\epsilon^e$ と塑性ひずみ増分 $d\epsilon^p$

塑性変形を継続するとき、応力増分とひずみ増分の間には次式が成り立つ。

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p = \frac{d\sigma}{E} + \frac{d\sigma}{H'} \quad (47)$$

ここで、 $H' = d\sigma/d\epsilon^p$ であり、現応力状態における真応力-対数塑性ひずみ曲線の瞬間勾配を表す。

それでは、6つの応力成分が同時に作用するときに、それに伴って発生する6つのひずみ増分の成分はどのように計算されるであろうか。本節では、応力増分とひずみ増分の間に成り立つ関係式（構成式）を導く。

(a) 弾性体の応力-ひずみ関係式

材料が弾性状態にあるときは、応力増分と弾性ひずみ増分の関係は、一般化されたフックの法則より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} d\epsilon_{xx}^e &= \frac{1}{E} \{d\sigma_{xx} - \nu(d\sigma_{yy} + d\sigma_{zz})\} \\ d\epsilon_{yy}^e &= \frac{1}{E} \{d\sigma_{yy} - \nu(d\sigma_{zz} + d\sigma_{xx})\} \\ d\epsilon_{zz}^e &= \frac{1}{E} \{d\sigma_{zz} - \nu(d\sigma_{xx} + d\sigma_{yy})\} \\ d\epsilon_{xy}^e &= \frac{d\sigma_{xy}}{2G} \\ d\epsilon_{yz}^e &= \frac{d\sigma_{yz}}{2G} \\ d\epsilon_{zx}^e &= \frac{d\sigma_{zx}}{2G} \end{aligned} \quad (48)$$

ここで G はせん断弾性係数である。偏差応力成分（式 (43)）および静水応力成分（式 (42)）を用いることにより、式 (48) は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} d\epsilon_{xx}^e &= \frac{d\sigma'_{xx}}{2G} + \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_m \\ d\epsilon_{yy}^e &= \frac{d\sigma'_{yy}}{2G} + \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_m \\ d\epsilon_{zz}^e &= \frac{d\sigma'_{zz}}{2G} + \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_m \end{aligned} \quad (49)$$

ここで、式 (49) の両辺の和をとると次式を得る。

$$d\epsilon_m^e = \frac{3(1-2\nu)}{E} d\sigma_m \quad (50)$$

式 (50) は、体積ひずみ増分 $d\epsilon_m^e = d\epsilon_x^e + d\epsilon_y^e + d\epsilon_z^e$ は静水応力増分 $d\sigma_m = (d\sigma_1 + d\sigma_2 + d\sigma_3)/3$ に比例することを示している。これより、式 (49) の第2項は、物体要素の体積変化（等方的な膨張もしくは収縮）に関与するひずみ成分であることがわかる。これに対し、式 (49) の第1項は、物体要素の形状変化に関与するひずみ成分である。

(b) 剛塑性体の応力-ひずみ関係式（レヴィー-ミーゼスの式）

Saint-Venant は、「ひずみ増分の主軸が応力の主軸と一致する」との説を最初に提唱した²⁷⁾。さらに、「塑性ひずみ増分は偏差応力およびせん断応力に比例する」との説が、レヴィー²⁹⁾ およびミーゼス¹⁷⁾ によって独立に提案された。すなわち、

$$\frac{d\epsilon_{xx}^p}{\sigma'_{xx}} = \frac{d\epsilon_{yy}^p}{\sigma'_{yy}} = \frac{d\epsilon_{zz}^p}{\sigma'_{zz}} = \frac{d\epsilon_{xy}^p}{\sigma_{xy}} = \frac{d\epsilon_{yz}^p}{\sigma_{yz}} = \frac{d\epsilon_{zx}^p}{\sigma_{zx}} = d\lambda \quad (51)$$

式 (51) は塑性論の基礎式として広く用いられており、レヴィー-ミーゼスの式とよばれている。 $d\lambda$ は、材料の加工硬化特性から定まる正の比例係数であり、一般にその値は塑性変形の進行とともに変化する。 $d\lambda$ の計算法は4.4節で述べる。

式 (51) の比例係数 $d\lambda$ を $1/(2G)$ とおきかえると、体積変化しない弾性体 ($\nu=0.5$) を仮定した場合の応力-ひずみ関係式と一致することに注意されたい（式 (48) の第3~5式および式 (49) の第1項）。すなわちレヴィー-ミーゼスの式は、体積変化しない弾性体に対する一般化されたフックの法則と式の形が同じである。唯一異なる点は、後者では比例係数がつねに $1/(2G)$ 一定であるのに対し、前者ではその値が塑性変形の進行とともに変化する点である。これは、塑性域の応力ひずみ曲線が一般には直線とはならないことに起因する。

【例題】 単軸引張変形において、レヴィー-ミーゼスの式が成り立つことを確認せよ。

【解答】 引張軸方向の垂直応力を σ_1 、最大主ひずみ増分を $d\epsilon_1^p$ とする。単軸引張変形であるから $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 。また体積一定条件より $d\epsilon_2^p = d\epsilon_3^p = -d\epsilon_1^p/2$ 。よって、

$$\frac{d\epsilon_1^p}{\sigma_1'} = \frac{d\epsilon_2^p}{\sigma_2'} = \frac{d\epsilon_3^p}{\sigma_3'} = \frac{3}{2} \frac{d\epsilon_1^p}{\sigma_1}$$

となり、式 (51) が成り立つことがわかる。

【例題】 等方性の金属板があり、板面と平行に xy 座標面を、板厚方向に z 軸をとる。この板材に二軸応力 (σ_x, σ_y) が作用し、平面応力状態下 ($\sigma_z=0$) で塑性変形状態にある。応力比が σ_y/σ_x であるとき、塑性ひずみ増分比 $\rho = d\epsilon_y^p/d\epsilon_x^p$ を求めよ。

【解答】 $\sigma_z=0$ なる平面応力状態においては、

$$\sigma_x' = \frac{2\sigma_x - \sigma_y}{3}, \quad \sigma_y' = \frac{2\sigma_y - \sigma_x}{3}$$

2

これらを式 (51) に代入すると、

$$\rho = \frac{d\epsilon_y^p}{d\epsilon_x^p} = \frac{2\sigma_y - \sigma_x}{2\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\alpha - 1}{2 - \alpha}$$

(c) 弾塑性体の応力-ひずみ関係式 (プラントル-ロイスの式)

プラントルは、平面ひずみ問題に対して、レヴィー-ミーゼスの式が弾性ひずみ成分を含むように拡張した³⁰⁾。さらにロイスが式 (52) の形式に一般化した³¹⁾。すなわち、全ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}$ は弾性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^e$ と塑性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^p$ との和であるとして、式 (49) と式 (51) とより、次式が提唱された³²⁾。

$$\begin{aligned} d\epsilon_{xx} &= \sigma'_{xx} d\lambda + \frac{d\sigma'_{xx}}{2G} + \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_m \\ d\epsilon_{yy} &= \sigma'_{yy} d\lambda + \frac{d\sigma'_{yy}}{2G} + \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_m \\ d\epsilon_{zz} &= \sigma'_{zz} d\lambda + \frac{d\sigma'_{zz}}{2G} + \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_m \\ d\epsilon_{xy} &= \sigma_{xy} d\lambda + \frac{d\sigma_{xy}}{2G} \\ d\epsilon_{yz} &= \sigma_{yz} d\lambda + \frac{d\sigma_{yz}}{2G} \\ d\epsilon_{zx} &= \sigma_{zx} d\lambda + \frac{d\sigma_{zx}}{2G} \end{aligned} \quad (52)$$

式 (52) はプラントル-ロイスの式とよばれ、等方性の弾塑性材料の応力-ひずみ関係式として、広く用いられている。

式 (51) および (52) は、ひずみ増分と応力増分との関係を示す式であり、ひずみ増分理論とよばれる。

4.3 相当応力と相当塑性ひずみ

材料の加工硬化特性を定量的に評価する場合は、単軸引張試験、単軸圧縮試験、純粋せん断試験、液圧バルジ試験など、応力とひずみを直接測定できる材料試験法を用いる。一方、実際の塑性加工では、材料は多軸応力状態で複雑な変形履歴を受ける場合が多い。しかもほとんどの場合、ひずみや応力が一様ではなく製品の部位によって異なる。したがって、加工硬化量 (降伏応力の増大) も製品の部位によって異なり、それらを直接測定することは一般に困難である。

材料が複雑な変形履歴を受けた場合でも、その材料の加工硬化量を定量的に計算する方法はないものだろうか。実は、本節で導入する「相当応力」および「相当塑性ひずみ」なる概念を用いれば、多軸応力下で塑性変形する金属材料の加工硬化量を、上述のような単純な材料試験から測定される真応力-対数塑性ひずみ曲線に基づいて計算することができるのである。本節では、その方法をわかりやすく説明する。

次の仮定をおく。

1. 材料は、いかなる負荷履歴を経た後も等方性を保ち、かつミーゼスの降伏条件式に従う。
2. 材料の初期降伏応力を Y とする。
3. 単軸引張試験から測定された真応力-対数塑性ひずみ曲線は $\sigma_1 = H(\epsilon_1^p)$ で表せる。

材料を塑性変形させていくと、塑性変形量の増加に伴い材料は加工硬化する。2.1 節でも述べたように、材料が「加工

図 22 金属材料の単軸引張試験から得られる、(a) 真応力-対数ひずみ曲線と (b) 真応力-対数塑性ひずみ曲線。材料に塑性変形を加えて、一度除荷し、再負荷すると、降伏応力は大きくなる。

硬化する」というのは、塑性変形に伴って材料の「降伏応力が大きくなる」ということである (図 22)。

そこで次のような思考実験をしてみよう。任意の負荷履歴を受けて塑性変形を継続している材料の、ある瞬間の降伏応力を定量的に評価するために、その材料から微小試験片を切り出して単軸引張 (もしくは圧縮) 試験を行い、降伏応力 $\bar{Y}$ を測定したとする (材料は加工硬化しているので $\bar{Y} > Y$ のはずである)。仮定 1 より、任意の塑性変形後も材料はミーゼスの降伏条件式に従うので、加工硬化後のこの材料の降伏条件式は、式 (37) の Y を $\bar{Y}$ に置き換えることにより次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)} \end{aligned} \quad (53)$$

ここで、右辺に示される応力の計算式を特に $\bar{\sigma}$ と表記し、相当応力と呼ぶ。すなわち、

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)} \end{aligned} \quad (54)$$

図 23 等方硬化モデル

以上より、加工硬化する材料の降伏条件式は次のように書ける。

$\bar{\sigma} - \bar{Y} = 0$: 降伏状態 (材料は塑性変形を継続)

$\bar{\sigma} - \bar{Y} < 0$: 弾性状態 (55)

つまり、相当応力とは、材料が加工硬化した度合いを単軸引張（もしくは圧縮）における降伏応力に換算して評価するための指標である。式 (55) から明かなように、材料が塑性変形を継続しているときは、相当応力の値はその瞬間における材料の降伏応力の値につねに等しくなる。

簡単のために平面応力状態 ($\sigma_3 = 0$) を仮定して、式 (53) を図で表現すると図 23 のようになる。ここで材料の初期降伏応力を Y とする。例えば、この材料に二軸引張変形を加え、応力点がちょうど初期降伏曲面上の点 B (σ_1^B, σ_2^B) に到達したとする。そしてさらに負荷を加えたところ、材料が加工硬化して、応力が降伏曲面の外側の点 D ($\sigma_1^B + \Delta\sigma_1, \sigma_2^B + \Delta\sigma_2$) まで増加したとする。このとき材料の降伏曲面は、点 D を通るミーゼスの降伏曲面まで膨張する。これは次のことを意味する。応力点が D に到達した後に、材料をいったん除荷して応力点を原点に戻し、次に単軸引張変形を加えたならば、この材料は応力の値が点 C に達したときに降伏する（ここで点 C は、点 D を通るミーゼスの降伏曲面と σ_1 軸との交点である）。すなわち、 $B \rightarrow D$ なる塑性変形によって、材料の降伏応力は点 A から点 C まで、すなわち Y から $\bar{Y}$ まで増加するのである。ちなみに、図 23 において、 $\bar{Y}$ は次式から計算される値と一致する。

$$\bar{Y} = \sqrt{(\sigma_1^B + \Delta\sigma_1)^2 + (\sigma_2^B + \Delta\sigma_2)^2} - (\sigma_1^B + \Delta\sigma_1)(\sigma_2^B + \Delta\sigma_2)$$

このように、材料に塑性変形を加えたとき、降伏曲面が相似形状を保ちつつ原点を中心にして等方的に膨張すると仮定する加工硬化モデルのことを等方硬化モデルと呼ぶ。

等方硬化モデルは加工硬化の理論構築を簡単化するための大胆な仮定であって、実際の金属では、降伏曲面の形状は一般に塑性変形に伴って変化することが知られている^{33)~35)}。また、等方硬化モデルではバウシング効果は表現できない。バウシング効果を表現するためには降伏曲面の移動と変形を考慮できる硬化モデルを用いる必要がある³⁶⁾。

次に、塑性変形量の増加に伴う降伏応力の増加の度合いを定式化するために、**相当塑性ひずみ**なる概念を導入する。相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^p$ は次式で定義される。

$$\bar{\epsilon}^p = \int \bar{d\epsilon}^p \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \bar{d\epsilon}^p &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(d\epsilon_x^p)^2 + (d\epsilon_y^p)^2 + (d\epsilon_z^p)^2 + 2\{(d\epsilon_{xy}^p)^2 + (d\epsilon_{yz}^p)^2 + (d\epsilon_{zx}^p)^2\}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(d\epsilon_{xx}^p - d\epsilon_{yy}^p)^2 + (d\epsilon_{yy}^p - d\epsilon_{zz}^p)^2 + (d\epsilon_{zz}^p - d\epsilon_{xx}^p)^2 \right. \\ &\quad \left. + 6\{(d\epsilon_{xy}^p)^2 + (d\epsilon_{yz}^p)^2 + (d\epsilon_{zx}^p)^2\} \right]^{1/2} \\ &\quad \left(\because \begin{aligned} 0 &= (d\epsilon_{xx}^p + d\epsilon_{yy}^p + d\epsilon_{zz}^p)^2 \\ &= (d\epsilon_{xx}^p)^2 + (d\epsilon_{yy}^p)^2 + (d\epsilon_{zz}^p)^2 \\ &\quad + 2(d\epsilon_{xx}^p d\epsilon_{yy}^p + d\epsilon_{yy}^p d\epsilon_{zz}^p + d\epsilon_{zz}^p d\epsilon_{xx}^p) \end{aligned} \right) \quad (57) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\epsilon_1^p - d\epsilon_2^p)^2 + (d\epsilon_2^p - d\epsilon_3^p)^2 + (d\epsilon_3^p - d\epsilon_1^p)^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(d\epsilon_1^p)^2 + (d\epsilon_2^p)^2 + (d\epsilon_3^p)^2} \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{d\epsilon}^p$ は**相当塑性ひずみ増分**とよばれる。 $\int \bar{d\epsilon}^p$ は、微小変形増分ごとに $\bar{d\epsilon}^p$ を計算し、材料が受けたすべての変形履歴に対してその総和を取ることを意味する。

【例題】 単軸引張変形における引張塑性ひずみを ϵ_1^p とすると、 $\bar{\epsilon}^p = \epsilon_1^p$ となることを示せ。

【解答】 例えば図 1 に示す単軸引張試験において、主ひずみ増分は、 $d\epsilon_1^p = dl/l$, $d\epsilon_2^p = dw/w$, $d\epsilon_3^p = dt/t$ として測定される。等方性材料の単軸引張変形においては、体積一定条件より $d\epsilon_2^p = d\epsilon_3^p = -d\epsilon_1^p/2$ となるので、式 (57) より、

$$\bar{d\epsilon}^p = d\epsilon_1^p, \quad \therefore \bar{\epsilon}^p = \epsilon_1^p \quad (58)$$

を得る。すなわち、単軸引張（もしくは圧縮）変形においては、相当塑性ひずみは荷重軸方向の塑性ひずみの絶対値に等しくなる。

4.4 塑性仕事等価説と $d\lambda$ の計算

現象論的塑性論では、「材料の加工硬化量（降伏応力 $\bar{Y}$ ）は、材料に加えられた仕事によって一義的に決まる」と理論上仮定する。これは、**塑性仕事等価説**と呼ばれる仮説である。塑性仕事等価説が成り立つ場合、材料に加えられた相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^p$ とそのときの降伏応力 $\bar{Y}$ との関係曲線（加工硬化式）は、その材料を単軸引張（もしくは圧縮）して測定される塑性流動応力 σ_1 と対数塑性ひずみ ϵ_1^p の関係曲線 $\sigma_1 = H(\epsilon_1^p)$ と一致することが証明できる。そこで本節では、塑性仕事の計算方法と塑性仕事等価説に基づく加工硬化則の定式について述べる。

応力の主軸と平行な稜線を持つ微小直方体要素を考える（図 24）。このとき各面に作用する力は $\sigma_1 bc$, $\sigma_2 ca$, $\sigma_3 ab$ である。これらの力によって各面の間隔が da , db , dc だけ変化するとき、材料になされる仕事は次式より計算される。

$$dW = \sigma_1 bc \times da + \sigma_2 ca \times db + \sigma_3 ab \times dc \quad (59)$$

2

図 24 応力の主軸と平行な稜線を有する微小直方体の変形

よって単位体積当たりになされる仕事増分 dw は、

$$\begin{aligned} dw &= \frac{dW}{abc} = \sigma_1 \frac{da}{a} + \sigma_2 \frac{db}{b} + \sigma_3 \frac{dc}{c} \\ &= \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3 \\ &= \sigma_1 d\varepsilon_1^e + \sigma_2 d\varepsilon_2^e + \sigma_3 d\varepsilon_3^e + \sigma_1 d\varepsilon_1^p + \sigma_2 d\varepsilon_2^p + \sigma_3 d\varepsilon_3^p \end{aligned} \quad (60)$$

$\sigma_1 = \sigma'_1 + \sigma_m$, $\sigma_2 = \sigma'_2 + \sigma_m$, $\sigma_3 = \sigma'_3 + \sigma_m$ (式 (43) 参照) を代入すれば、

$$\begin{aligned} dw &= \sigma'_1 d\varepsilon_1^e + \sigma'_2 d\varepsilon_2^e + \sigma'_3 d\varepsilon_3^e + \sigma_m (d\varepsilon_1^e + d\varepsilon_2^e + d\varepsilon_3^e) \\ &\quad + \sigma'_1 d\varepsilon_1^p + \sigma'_2 d\varepsilon_2^p + \sigma'_3 d\varepsilon_3^p + \sigma_m (d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p) \end{aligned} \quad (61)$$

を得る。右辺の 1 行目は弾性変形により蓄えられるエネルギーを、2 行目は塑性変形により消費されるエネルギーを表す。後者は塑性仕事増分とよばれ、以下 dw^p と表す。体積一定条件より $d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = 0$ であるから (式 (12) 参照)、次式を得る。

$$\begin{aligned} dw^p &= \sigma'_1 d\varepsilon_1^p + \sigma'_2 d\varepsilon_2^p + \sigma'_3 d\varepsilon_3^p \\ &= \sigma_1 d\varepsilon_1^p + \sigma_2 d\varepsilon_2^p + \sigma_3 d\varepsilon_3^p \end{aligned} \quad (62)$$

さらに式 (51) を代入すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} dw^p &= \sqrt{\sigma'_1 d\varepsilon_1^p + \sigma'_2 d\varepsilon_2^p + \sigma'_3 d\varepsilon_3^p} \\ &\quad \times \sqrt{\sigma'_1 d\varepsilon_1^p + \sigma'_2 d\varepsilon_2^p + \sigma'_3 d\varepsilon_3^p} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{(\sigma'_1)^2 + (\sigma'_2)^2 + (\sigma'_3)^2} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(d\varepsilon_1^p)^2 + (d\varepsilon_2^p)^2 + (d\varepsilon_3^p)^2} \\ &= \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^p \end{aligned}$$

したがって、塑性仕事増分は次式で与えられる。

$$dw^p = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^p \quad (63)$$

一方、

$$\begin{aligned} dw^p &= \sigma'_1 d\varepsilon_1^p + \sigma'_2 d\varepsilon_2^p + \sigma'_3 d\varepsilon_3^p \\ &= \{(\sigma'_1)^2 + (\sigma'_2)^2 + (\sigma'_3)^2\} d\lambda \\ &= (2/3) \bar{\sigma}^2 d\lambda \end{aligned} \quad (64)$$

図 25 (a) 真応力 - 対数塑性ひずみ曲線 $\sigma_1 = H(\varepsilon_1^p)$ と (b) 相当応力 - 相当塑性ひずみ曲線 $\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon}^p)$ の等価性

であるから、

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} = \frac{3}{2H'} \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \quad (65)$$

ここで $H' = d\sigma_1/d\varepsilon_1^p$ である。次節で述べるように、 $\bar{\sigma}$ と $\bar{\varepsilon}^p$ の関係曲線は、その材料を単軸引張（もしくは圧縮）試験から測定される塑性流動応力 σ_1 と対数塑性ひずみ ε_1^p の関係曲線 $\sigma_1 = H(\varepsilon_1^p)$ と一致する。したがって、 $\sigma_1 = H(\varepsilon_1^p)$ が測定されていれば、 H' は $d\sigma_1/d\varepsilon_1^p$ として計算することができる。

4.5 加工硬化則

前節で述べた塑性仕事等価説に基づいて、材料の加工硬化則を定式化しよう。相当応力 $\bar{\sigma}$ は、材料要素がそれまでの変形履歴において受けた単位体積当たりの全塑性仕事 w^p のみの関数で定まると仮定したから、

$$\bar{\sigma} = F(w^p), \quad w^p \equiv \int dw^p = \int \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^p \quad (66)$$

と表記できる。 $\int \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^p$ は $\bar{\sigma}$ と $\bar{\varepsilon}^p$ の関係曲線の下部の面積に等しいので、式 (66) は次のようにも書ける。

$$\bar{\sigma} = f\left(\int d\bar{\varepsilon}^p\right) = f(\bar{\varepsilon}^p) \quad (67)$$

これは、「塑性変形（材料の降伏）が継続している応力状態では、相当応力は、相当塑性ひずみの関数として一義的に決まる」ことを意味している。

$\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon}^p)$ はひずみ経路にかかわらず成り立つと仮定したから、単軸引張（もしくは圧縮）試験から $\bar{\sigma}$ と $\bar{\varepsilon}^p$ の関係曲線を決定するのが最も簡便である。式 (54) および (56), (57) より、これら単軸応力試験においては $\bar{\sigma} = |\sigma_1|$, $\bar{\varepsilon}^p = |\varepsilon_1^p|$

であるから、 $\bar{\sigma}=f(\bar{\epsilon}^p)$ は単軸応力試験より得られる真応力 σ_1 と対数塑性ひずみ ϵ_1^p との関係曲線 $\sigma_1=H(\epsilon_1^p)$ に一致する (図 25)。すなわち、塑性仕事等価説が正しければ、多軸応力下で塑性変形する材料の加工硬化特性は、相当応力と相当塑性ひずみの関係に換算することにより、単軸応力試験より得られる真応力-対数塑性ひずみ曲線から予測することが可能である。塑性仕事等価説の妥当性についての実験検証は 4.6 節で述べる。

特別な場合として、ひずみ増分の主軸が物体要素に相対的に回転せず、かつひずみ増分の成分比がつねに一定となる純粋比例負荷を考えよう。このとき、

$$\begin{aligned} d\epsilon_3^p &= \rho d\epsilon_1^p \\ d\epsilon_3^p &= -d\epsilon_1^p - d\epsilon_2^p = -(1+\rho)d\epsilon_1^p \end{aligned} \quad (68)$$

式 (68) を式 (57) に代入して、

$$\begin{aligned} \bar{d\epsilon}^p &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1+\rho+\rho^2} d\epsilon_1^p \\ \therefore \bar{\epsilon}^p &= \int \bar{d\epsilon}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1+\rho+\rho^2} \epsilon_1^p \end{aligned} \quad (69)$$

よって、純粋比例負荷においては加工硬化式は次のように書ける。

$$\bar{\sigma} = H(\bar{\epsilon}^p) = H\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1+\rho+\rho^2} \epsilon_1^p\right) \quad (70)$$

【例題】 板材が等二軸引張変形 ($\sigma_1=\sigma_2, \sigma_3=0$) を受けている。次の問に答えよ。(a) $\bar{\sigma}=\sigma_1=\sigma_2$ および $\bar{\epsilon}^p=-\epsilon_3^p$ を示せ。ここで ϵ_3^p は対数塑性板厚ひずみである。

(b) この板材の単軸引張における加工硬化式が $\sigma_1=500 \times (0.002+\epsilon_1^p)^{0.3}$ (MPa) で与えられるとき、 $\epsilon_1^p=\epsilon_2^p=0.3$ に達したときの相当応力を求めよ。

【解答】 (a) 式 (54) より $\bar{\sigma}=\sigma_1=\sigma_2$ である。また $\rho=1$ を式 (69) に代入すれば、 $\bar{\epsilon}^p=2\epsilon_1^p=-\epsilon_3^p$ を得る。

(b) この板材に加えられた相当塑性ひずみは $\bar{\epsilon}^p=2\epsilon_1^p=0.6$ であるから、

$$\bar{\sigma}=500 \times (0.002+0.6)^{0.3}=429 \text{ (MPa)}$$

図 26 平面ひずみ引張試験片

【例題】 図 26 は平面ひずみ引張試験用の試験片である。この試験片を用いると、板幅方向のひずみを 0 に保ちつつ引張試験を行うことができる。引張方向を 1 軸、板幅方向を 2 軸、板厚方向を 3 軸とすると、相当応力 $\bar{\sigma}$ と相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^p$ を、各々 σ_1 および ϵ_1^p を用いて表しなさい。

【解答】 板幅方向のひずみが 0 であるから $d\epsilon_2^p=0$ 。板厚方向応力が 0 であるから $\sigma_3=0$ 。よって、式 (51) より、 $\sigma_2=(\sigma_1+\sigma_3)/2=\sigma_1/2$ 。また $\epsilon_1^p=-\epsilon_3^p$ (式 (69) において $\rho=0$)。以上を式 (53) および (69) に代入して、

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_1, \quad \bar{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \epsilon_1^p$$

4.6 塑性構成式の実験検証

(a) レヴィー-ミーゼスの式の実験検証

式 (53) より、次式が成り立つ。

$$\frac{2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3}{2\sigma_2-\sigma_3-\sigma_1} = \frac{d\epsilon_1^p}{d\epsilon_2^p}, \quad \frac{2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3}{2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2} = \frac{d\epsilon_1^p}{d\epsilon_3^p} \quad (71)$$

体積一定条件 (式 (12)) を考慮して、式 (71) を変換すると次式を得る。

$$\frac{2\sigma_2-\sigma_3-\sigma_1}{\sigma_1-\sigma_3} = \frac{2d\epsilon_2^p-d\epsilon_3^p-d\epsilon_1^p}{d\epsilon_1^p-d\epsilon_3^p} \quad (72)$$

Lode は、式 (72) の左辺を μ 、右辺を ν とおき、円管に軸力と内圧を作用させる二軸応力試験 ($\sigma_3=0$) を行って、 $\mu=\nu$ が成り立つかどうかを検証した²⁴⁾。結果を図 27 に示す。 $\mu=-1$ は管軸方向の単軸引張、 $\mu=0$ は円周方向ひずみが 0 の平面ひずみ引張、 $\mu=1$ は等二軸引張を示す。実験値は、 μ, ν ともに負の場合は $\mu=\nu$ 直線の上方に ($\mu<\nu<0$)、 μ, ν ともに正の場合は $\mu=\nu$ 直線の下方 ($0<\nu<\mu$) に位置しており、実験値は式 (72) からわずかにずれることを見出した。後に Taylor と Quinney は、円管の引張-ねじり試験においても、同様の傾向を確認している²⁵⁾。

Hosford は、次のような高次の降伏条件式を考案した³⁷⁾。

図 27 レヴィー-ミーゼスの式の検証実験の結果²⁴⁾

2

(a)

(b)

図 28 二軸引張試験より測定された降伏曲面と理論降伏曲面との比較。(a) 6000 系アルミニウム合金板³⁹⁾, (b) 冷延鋼板⁴²⁾。降伏曲面は等塑性仕事面として決定した。すなわち、圧延方向の単軸引張試験を行い、対数塑性ひずみ ε_0^p に達するまでになされた塑性仕事 W を求める。さらに十字形試験片を用いた二軸引張試験により、 W と等量の塑性仕事を与える応力点 (σ_x, σ_y) を求め、主応力空間にプロットして、各 ε_0^p に対する等塑性仕事面とした。

$$|\sigma_{yy} - \sigma_{zz}|^M + |\sigma_{zz} - \sigma_{xx}|^M + |\sigma_{xx} - \sigma_{yy}|^M = 2Y^M \quad (73)$$

FCC 金属に対しては $M=8 \sim 10$ が、BCC 金属に対しては $M=6$ が推奨されている。Hosford³⁷⁾ は、本式を用いれば、図 27 に見られるような μ と ν の非直線的な実験傾向を再現できることを示した。実際、塑性異方性を表現できるように式 (73) を拡張した降伏条件式³⁸⁾

$$r_{90}\sigma_{xx}^M + r_0\sigma_{yy}^M + r_0r_{90}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^M = r_{90}(1+r_0)\sigma_0^M \quad (74)$$

を用いると (r_0 : 圧延方向の r 値, r_{90} : 圧延直角方向の r 値, σ_0 : 圧延方向の引張試験から測定される降伏応力), アルミニウム合金^{4),39)} や冷延鋼板^{40)~42)} の降伏曲面を近似できるこ

(a)

(b)

(c)

図 29 軸力と内圧を受ける円管の 2 軸応力試験において測定された相当応力-相当塑性ひずみ曲線の比較。(a) 試験装置の模式図。材料: (b) 5000 系アルミニウム合金押出円管⁵²⁾, (c) 機械構造用炭素鋼鋼管 STKM11⁵³⁾。ただし、異方性降伏関数として Yld2000-2d⁵⁴⁾ を使用している。

とが確認されている。その一例を図 28 に示す。さらに、式 (74) は、板材料の結晶方位分布関数 (ODF) から計算される降伏曲面ともよい一致を示すことが確認されている^{41),43)}。

このことから、図 27 の結果は、実際の材料の降伏条件式の形状がミーゼスの降伏曲面からわずかにずれていることが原因であると考えられる。

(b) 塑性仕事等価説の実験検証

鋼管の引張－内圧試験^{44),45)} および引張－内圧－ねじり試験⁴⁶⁾、アルミニウム合金管の引張－内圧試験⁴⁷⁾ の研究により、塑性仕事等価説がおおむね成り立つことが確認されている。その他文献 48)～51) も参照されたい。

図 29 は、金属円管に軸力と内圧を負荷し、管軸方向応力 σ_ϕ と円周方向応力 σ_θ の応力比 $\sigma_\phi : \sigma_\theta$ を様々に変えて塑性変形させ、すべての応力比において測定された相当応力と相当塑性ひずみの関係曲線を重ねて描いた結果である^{52),53)}。すべての相当応力－相当塑性ひずみ曲線はほぼ一致しており、塑性仕事等価説の妥当性が確認されている。ただし、これらの材料は異方性を有するため、相当応力と相当塑性ひずみの計算においては、異方性降伏関数の一つである Yld2000-2d⁵⁴⁾ を用いている。

塑性異方性を考慮できる降伏関数については、文献 55) において詳しく解説されている。

塑性理論はとかく難解になりがちであるが、実際の現象の理解と予測に役立たなければ価値はない。その意味で精確な実験により塑性変形挙動を丁寧に観測し、理論をつねに検証しながら研究の歩みをすすめる作業が塑性学の発展には必要不可欠である。実際、塑性力学の進歩とともに、多くの優れた実験研究が行われてきた。実験塑性学の歴史については、文献 26), 33)～35), 56)～58) を参照されたい。

5. おわりに

2 回の連載講座によって、塑性力学の基礎について解説した。金属の塑性変形挙動は複雑である。本稿で取り上げた初等的な道具立てのみで、塑性加工の諸問題がすべて解決されるわけではない。しかしながら、塑性力学は、塑性という複雑な現象を体系的に整理・定式化し、加工の現場で起こる様々な現象の理解と予測に貢献するという命題のもとに、多くの研究者が積み上げてきた壮麗な学問大系である。まさに人類の知的遺産であるといっても過言ではない。コンピュータ解析全盛の現代にあってもなおその価値をいささかも失うものではない。本稿を通じて、塑性力学の魅力を読者の方々とすこしでも分かち合うことができたならば、筆者の望外の喜びである。

執筆には細心の注意をはらったつもりであるが、筆者の不勉強に基づく誤り、記述漏れ、重要文献の見落としなどがあることを恐れる。読者諸賢のご意見ご批判を頂ければ幸いである。

参 考 文 献

- 27) 桑原利彦：軽金属, **57** (2007).
- 28) B. de Saint-Venant: Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **70** (1870), 473; Journ. de math. pures et appl., **16** (1871), 308; Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **74** (1872), 1009 and 1083.
- 29) M. Lévy: Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **70** (1870), 1323; Journ. de math. pures et appl., **16** (1871), 369.
- 30) L. Prandtl: Proc. 1st Int. Cong. Appl. Mech., Delft, (1924), 43.
- 31) A. Reuss: Z. angew. Math. Mechanik, **10** (1930), 266–274.
- 32) R. Hill: The mathematical theory of plasticity, Oxford Univ. Press, (1950), 38.
- 33) 池上皓三：材料, **24** (1975), 491–504; **24** (1975), 709–719.
- 34) S. S. Hecker: Experimental studies of yield phenomena in biaxially loaded metals. In: J. A. Stricklin, K. H. Sackalski (Eds.), Constitutive Equations in Viscoplasticity: Computational and Engineering Aspects, (1976), ASME, New York, 1–33.
- 35) A. Phillips: Int. J. Plasticity, **2** (1986), 315–328.
- 36) A. S. Khan and S. Huang: Continuum Theory of Plasticity, Wiley, (1995), 181.
- 37) W. F. Hosford: J. Appl. Mech, Trans. ASME, **39** (1972), 607–609.
- 38) R. W. Logan and W. F. Hosford: Int. J. Mech. Sci., **22** (1980), 419–430.
- 39) 桑原利彦, 栗田圭一：軽金属, **50** (2000), 2–6.
- 40) 桑原利彦, 池田 聡：塑性と加工, **40** (1999), 145–149.
- 41) T. Kuwabara, A. Van Bael and E. Iizuka: Acta Mater., **50/14** (2002), 3717–3729.
- 42) 池田 聡, 桑原利彦：鉄と鋼, **90** (2004), 1016–1022.
- 43) T. Kuwabara and A. Van Bael: Proc. 4th Int. Conf. and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes, Besançon, (1999), 85–90.
- 44) H. E. Davis: Trans. ASME, J. Appl. Mech., **12** (1945), A-13–25.
- 45) H. E. Davis and E. R. Parker: Trans. ASME, J. Appl. Mech., **15** (1948), 201–215.
- 46) H. E. Davis: Trans. ASME, J. Appl. Mech., **22** (1955), 411–415.
- 47) W. R. Osgood: Trans. ASME, J. Appl. Mech., **14** (1947), A-147–153.
- 48) A. Nadai: Theory of Flow and Fracture of Solids, Vol. I, MacGraw-Hill, New York, (1950), 252.
- 49) 北川 浩：塑性力学の基礎, (1979), 74.
- 50) W. Johnson and P. B. Mellor: Engineerig Plasticity, Ellis Horwood, Chichester, (1983), 100.
- 51) 吉田総仁：弾塑性力学の基礎, 共立出版, (1997), 156.
- 52) T. Kuwabara, K. Yoshida, K. Narihara and S. Takahashi: Int. J. Plasticity, **21** (2005), 101–117.
- 53) 吉田健吾, 桑原利彦：鉄と鋼, **92** (2006), 36–45.
- 54) F. Barlat, J. C. Brem, J. W. Yoon, K. Chung, R. E. Dick, D. J. Lege, F. Pourboghra, S. H. Choi and E. Chu: Int. J. Plasticity, **19** (2003), 1297–1319.
- 55) 日本塑性加工学会編：静的陽解法 FEM, コロナ社, (2004), 172.
- 56) M. J. Jr., Michno and W. N. Findley: Int. J. Non-Linear Mech., **11** (1976), 59–82.
- 57) J. F. Bell: The Experimental Foundations of Solid Mechanics, Mechanics of Solids, Vol. I, Springer, Berlin, (1984).
- 58) T. Kuwabara: Int. J. Plasticity, **23** (2007), 385–419.