補強リブを有するアルミニウム角管の動的軸圧縮特性

横谷 圭亮¹・宮崎 忠^{2*}・東條 湧介³・山下 実⁴

Journal of The Japan Institute of Light Metals, Vol. 69, No. 8 (2019), 379–386

© 2019 The Japan Institute of Light Metals

Deformation in axial compression of aluminum tubular structures with ribs

Keisuke YOKOYA¹, Makoto MIYAZAKI^{2*}, Yusuke TOJO³ and Minoru YAMASHITA⁴

Dynamic compression behavior of various kinds of polygonal tubular structures with ribs are investigated. Square hollow structures and that with rib reinforcement of aluminum extrusions are in dynamic axial compression, using a drop hammer. Numerical simulation was also conducted for the wider variety of cross-sectional shapes and reinforcements. The effect of the axial length, cross-sectional shape and reinforcing rib arrangement on the deformation behavior were investigated. Comparable compressive force was obtained when the cross-sectional area of the structure is similar, even if the number of edges in cross-section increases from four (square) to eight. Rib reinforcement is very effective for the improvement of the crush or energy absorbing performance. Deformation behavior was successfully predicted by the numerical simulation. Numerical simulation of the compression of the various polygonal tubular structures with radial ribs was also carried out. The number of radial ribs in cross-section of the polygonal hollow structure has a positive relationship to the deformation constraint at corners and the torsional rigidity, consequently, the crush resistance increased.

(Received December 22, 2018 Accepted May 30, 2019)

Keywords: tubular structure; dynamic buckling; torsional rigidity

1. 緒 言

金属管はフレームや構造物へ広く使用されている部材であり、古くから変形挙動に関する研究が行われている。円管については鋼管に関する報告が多く、静的、準静的、動的圧縮試験によって、変形挙動が検討されている^{1)~3)}。角管についても鋼管の報告が多く、円管と同じように実験的検討や理論的検討が行われ、動的座屈現象の解明が進められている^{4)~8)}。

アルミニウム合金は、比重が鉄鋼の1/3であるが、その反面縦弾性係数も同様である。そのため、単に材料を鉄鋼から置き換えただけでは、製品の剛性は確保できない。さらに、剛性の向上のために肉厚を厚くすると、角管全体が大きく座屈する軸圧縮変形となり、衝突時のエネルギーを有効に吸収できないという問題が報告されている。しかし、アルミニウム合金は押出成形性に優れており、断面設計の自由度が大きい利点が存在する⁹⁾。このため、断面形状を工夫することで、肉厚を厚くすることなく部材の剛性を確保できる。また、押出成形による製造コストの削減も期待できる。このように、アルミニウム合金は軽量化と高強度を両立できる素材

であり、自動車などの構造強度部材としての用途が注目されている^{10), 11)}。これまで、エネルギー吸収性能の大きさを示す平均荷重に注目した報告があり、角管⁹⁾や、セル状の断面を持つ筒状体¹²⁾について検討されている。また、テーパ形状を有する角管についても検討されている¹³⁾。平均荷重はエネルギー吸収性能との関係が指摘されており、筒状体の最終的な変位量との積によって吸収エネルギーを算出できる¹²⁾。そのため、平均荷重は単位変位量あたりのエネルギー吸収量を示しており、筒状体のエネルギー吸収性能の評価に有効である。しかし、剛性や変形荷重の向上に有効とされる補強リブを内部に設けた筒状体に関しては、その設計指針となる変形特性などのデータが不足している現状がある。これまでに、著者らの一部は、角管の軸圧縮変形挙動に関して実験と有限要素法による数値計算を行い、角部のねじり剛性が変形形状の決定と圧縮荷重に寄与することを示した¹⁴⁾。正多角形断面の筒状体についても、軸圧縮時のエネルギー吸収能に及ぼす影響を検討した¹⁵⁾。その結果、平行な対面を有しない奇数角については、座屈しわの周期性が崩れるため、塑性変形によるエネルギー吸収部材として適さないことを示した。また、実際に筒状体が圧縮変形するとき、軸長が短く

¹ 長野工業高等専門学校専攻科 生産環境システム専攻 (〒381-8550 長野県長野市大字徳間716) [現在: 東京工業大学 工学院 機械系機械コース 修士課程2年 (〒152-8550 東京都目黒区大岡山2-12-1)] Advanced Course of Production and Environment System, National Institute of Technology, Nagano College (716 Tokuma, Nagano-shi, Nagano 381-8550) [2nd Year Master's Student, Mechanical Engineering Course, Department of Mechanical Engineering, School of Engineering, Tokyo Institute of Technology (2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552)]

² 長野工業高等専門学校 機械工学科 (長野市) Department of Mechanical Engineering, National Institute of Technology, Nagano College (Nagano-shi, Nagano)

³ 株式会社デンソーエアクール (安曇野市) DENSO Aircool Corporation (Azumino-shi, Nagano)

⁴ 岐阜大学工学部機械工学科 (岐阜市) Department of Mechanical Engineering, Gifu university (Gifu-shi, Gifu)

* 責任著者 E-mail: miyazaki@nagano-nct.ac.jp

なるにつれ、端面間距離の影響が変形挙動に現れる場合がある。これは、塑性変形に先立って生じる弾性変形によるものと言える。弾性変形は筒状体全体に生じ、その形状は周期的かつ波状という特徴を有する¹⁶⁾。このため、軸長に応じて弾性変形の形状は変化し、続く塑性変形の形状にも影響を及ぼす。その後、ひずみが集中する箇所より塑性変形を生じ、最終的に筒状体は周期的な蛇腹状の座屈変形を示す。このように、実用的な設計データとしては、筒状体の長さの影響も検討すべき事項である。

これまでに、筆者らの一部は、既報において、四角形筒状体を対象に、初期不整が変形形状に及ぼす影響を検討した¹⁷⁾。また、リブを有さない多角形筒状体のひずみ分布を検討し、軸長が長くなるとひずみが小さくなり、発生位置が移動することを確認した^{18), 19)}。また、補強リブを有する筒状体において、どの軸長でも局所的な変形形状が得られることを確認し、衝撃吸収部材への可能性を確認した^{20), 21)}。

しかし、広範囲の軸長に関する報告は少なく、特に座屈の発生箇所など変形過程に及ぼす影響については、ほとんど検討されていない。

本研究では、軽量高強度な筒状体断面の設計指針の基礎データを得るため、動的軸圧縮変形を受ける多角形筒状体について検討することとした。まず、変形シミュレーションの信頼性を確認するため、角管の動的軸圧縮試験を行い、結果を比較した。その後、多角管の角数と内部に設ける補強リブが変形挙動に及ぼす影響について、変形シミュレーションを用いて検討した。

2. 実験

2.1 実験方法

本実験で用いた落すい式衝撃試験機を Fig. 1 に示す。おもりの衝突速度は落下する高さにより評価でき、最大 10 m/s まで変化させることができる。本実験における落すいの質量は 15 kg であり、衝突速度は最大の 10 m/s とした。供試材の両端は Fig. 2 に示すような鋼製の幅 2 mm、深さ 5 mm の溝付きプレートにて変位を拘束した。溝付きプレートの下に、鋼製土台を介して設置した自作のロードセルにて衝撃荷重を測定した。過去に著者らの一部は鋼製ハット型強度部材の衝撃試験を行い、衝撃荷重について検討した^{22)~24)}。本研究では同じ衝撃試験装置を用いて実験を行った。前回と同様にロードセルは衝撃に強い SNCM447 鋼製ブロックに半導体ひずみゲージ（共和電業(株), KSN-2-120-E4-11）を貼付したものをを用いた。ロードセルの固有振動数は、サンプリング周波数と比較し、十分に大きいことから、測定にあたってフィルタ処理は行わなかった²⁴⁾。高速度カメラを用いて、供試材の変形過程についても記録した。撮影方向は Fig. 1 中に矢印に示す通りである。撮影した動画は 640×512 pixel、フレームレートは 1000 fps である。供試材は A6063-T5 アルミニウム合金製四角管（板幅 $w=40$ mm、軸長 $l=100\sim300$ mm）である。Table 1 に供試材の化学成分を示す。ここでは、断面にリブを持たない角管を Type A と呼び、リブを有するものを Type B と呼ぶこととする。肉厚 d は Type A が 1.1 mm、Type B が 1.5 mm である。供試材の例を Fig. 2 に示す。上側が本実験で用いた供試材であり、下側が鋼製プレートである。

Fig. 1 General view of dynamic compression test using drop-hammer.

Fig. 2 Grooved plates and square tubular structures. (a) Type A and (b) Type B (with internal rib).

2.2 実験結果と検討

高速度カメラで撮影された角管の変形過程を Fig. 3 に示す。ここでは、落すいが衝突端部に接触してから時間 t における変形過程を示している。なお、Fig. 3(b) 中に示す点線は Type B の補強リブの位置を示している。Fig. 4 に供試材の変形の模式図を示す。Fig. 3(a) より、Type A は衝突後 $t=1$ ms において、Fig. 4(a) に示すような、壁面が完全に折りたたまれていない波状の「うねり」変形が生じた。うねりは座屈が進行するごとに増加していき、それらが圧縮され密になり、そのまま壁面が折りたたまれる蛇腹状の変形へと推移する。ここでも、衝突端部側ではそのまま座屈が折り重なるようにして逐次座屈が起こり、最終的に蛇腹状の変形形状となった。また、Fig. 4(b) に示すように、隣接する面にて凹凸状に座屈した。リブを持たない四角管の場合では、直辺

部から座屈が始まり、続いて角部が座屈することが知られている²⁵⁾。本研究においても、Fig. 3(a)に示すように、Type Aの各面は直辺部から角部の順で変形が進行したものと考えられる。Type Bについては、下端部から座屈が生じた。軸長150mmを下回る場合では、衝突端部から座屈することが多いものの、このオーダーの衝撃速度では必ずしも衝突端部にて座屈を生じるわけではないことが知られている²⁶⁾。Type Bのリブを有する面では、リブの座屈形状の影響を受けて変形が進行している。また、衝突後 $t=1\text{ms}$ の変形形状を見ると、リブと隣接している手前側の面では、座屈変形におけるうねりは内向きに生じている。これは、Type Aに対してType Bの肉厚が厚いため、角部のねじり剛性が増加したためと考えられる¹⁴⁾。最終的に、リブに隣接している壁面は、リブの座屈形状に沿うように変形しており、Type Aの変形形状と比較して、Fig. 4(c)に示すようなリブを境にずれるような局部座屈を生じた。

各軸長における変形形状をFig. 5に示す。今回検討した範囲では、すべて衝突端部または下端部より、局部的な座屈が生じた。

3. 変形解析

3.1 解析方法

解析には汎用非線形構造解析プログラムMarc2016を使用した。解析モデルの例をFig. 6に示す。検討した各種断面形状をFig. 7に示す。断面形状は、筒状体の外周の長さをほぼ一定にするため、半径 $r=20\sqrt{2}\text{mm}$ の円を描き、それに内接する正多角形断面である。角管は4節点4辺形厚肉シェル要素で構成した。また、補強リブはType Bを除いて対角線上に設けた。Type Bについては、ある一面から対面に向けてリブを設けた。肉厚はすべて $d=1.1\text{mm}$ とし、軸長は $l=100\sim 500\text{mm}$ について検討した。各種断面形状における要素数をTable 2に示す。要素サイズは $2.0\times 2.0\text{mm}$ である。静的引張試験より求めた材料特性値をTable 3に示す。エネルギー吸収性の比較のため、Type Aの材料特性値についてもTable 3に示すType B～Iの値を用いた。角管端部の節点については衝撃端の軸方向の並進運動を除き拘束した。落すいは8接点3次元ソリッド要素で構成した。角管と落すいとの間に摩擦はないと仮定した。アルミニウム合金は鉄鋼と比べ、ひずみ速度依存性が小さいとされている²⁷⁾。本研究におけるひずみ速度は最大で $240/\text{s}$ であり、変形への影響はそれほど大きくないと考えた。そのため、材料構成方程式にはひずみ速度依存性のない式(1)を採用した。

$$\sigma = Fe^n \quad (1)$$

動解析の時間積分法としては、陰解法のシングルステップフーボルト法を用いた²⁸⁾。ステップ幅としての時間増分は

Fig. 3 Dynamic deformation behavior of aluminum tubes with 150 mm length. (a) Type A and (b) Type B.

Fig. 4 Deformation shape of specimen wall. (a) wave-like and bellows-like manner of buckling wall, (b) concave-convex deformation model by torsion of adjacent walls, (c) deviation of the face contacting rib.

Table 1 Chemical composition of A6063-T5 aluminum tubes specimen (%).

Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Cr	Zn	Ti	Al
0.20–0.6	–0.35	–0.10	–0.10	0.45–0.9	–0.10	–0.10	–0.10	Bal.

Fig. 5 Dynamically compressed tubular structures with various axial lengths. (a) Type A and (b) Type B (l : initial tubular length).

Fig. 6 An example of numerical model (Type-A, $l=100\text{mm}$).

$0.5 \sim 1.5 \mu\text{s}$ である。

3.2 適切な初期不整の導入と実験結果との比較

実験との比較を目的に、衝撃試験と同様の形状を持つ角管について解析を行った。肉厚はType Aで1.1 mm, Type Bでは1.5 mmである。ここでは実験と同様の座屈形状を得るため、Type Aでは各面, Type Bでは補強リブの初期座屈箇所についてFig. 8に示すような初期不整を導入した。初期不整の大きさ d_i は、最大荷重に影響しない0.1 mm以下とした¹⁷⁾。Type Aでは衝突端部からの距離 l_i で生じた初期座屈箇所において、周方向の凹凸状の変形の形状に合わせて導入した。また、Type Bでは衝突端部からの距離 l_{i1}, l_{i2} に、リブの長手方向のうねり変形の形状に合わせて導入した。軸長ごとの初期不整の導入箇所と大きさをTable 4に示す。変形形状をFig. 9, 変形過程における荷重履歴の例をFig. 10に示す。これらより、どの場合においても、変形形状はシミュレーションと実験にておおむね一致していた。また、荷重履歴についても、どの軸長においても実験とシミュレーション結果が一致していた。また、筒状体の軸圧縮解析では、内部の空気によるエアーアクションの影響が生じる場合がある。内部の空気が漏れないと仮定し、軸長が半分になった場合、その効果は0.2 MPa程度であり、荷重に与える影響は約0.3 kN程度である。よって、本研究ではその影響は大きくないと思われる。以上より、本シミュレーションは実験をよく再現できていると考えられる。

Fig. 7 Variations in cross-sectional shapes.

Table 2 Number of elements in various cross-sectional shapes.

Cross-sectional shape	Number of elements
Type A	4000–20000
Type B	5000–20000
Type C	6800–34000
Type D	4200–20748
Type E	4488–22352
Type F	8232–41496
Type G	10000–50000

Table 3 Material properties of A6063-T5 aluminum tubes.

Cross-sectional shape	Young's modulus, E/GPa	Poisson's ratio, ν	Density, $P/\text{kg m}^{-3}$	Work-hardening modulus, F/MPa	Work-hardening exponent, n
Type-A	69	0.33	2.7×10^3	350	0.160
Type-B-I				268	0.065

3.3 解析結果と検討

先に示す Fig. 7 の断面形状にて解析を行い、荷重履歴について検討した。平均荷重にて衝撃吸収部材としてのエネルギー吸収性を評価でき、最大荷重の大きさにて衝突時の乗員への衝撃の大きさを評価できる。また、繰返し座屈に伴い、周期的な応力変動が起こることが知られている^{24), 26)}。変形

シミュレーションによって得られた最終変形形状を Fig. 11, 荷重履歴を Fig. 12 に示す。

Type A の変形形状より、軸長が短くなるほど、うねり変形が進行する傾向が確認され、Fig. 12(a) に示す荷重の変動周期に差を生じている。しかし、平均的な荷重はほとんど同じで、エネルギー吸収性能に対して影響は小であることがわか

Fig. 8 The initial geometrical imperfection introduced at the portion of initial buckling. (a) Type A and (b) Type B.

Table 4 Introduced portions and sizes of geometrical initial imperfection.

Tubular length, l /mm		100	150	200	300	400	500
Type A	Position of initial imperfection from impact edge, l_i /mm	—	22	24	26	24	22
	Size of initial imperfection, d_i /mm	—	0.1	0.05	0.1	0.05	0.1
Type B	Position of initial imperfection from impact edge, l_{i1}, l_{i2} /mm	2.4, 3.8	3.2, 4.2	3.2, 5.6	3.2, 4.4	—	—
	Size of initial imperfection, d_i /mm	0.01	0.05	0.05	0.01	—	—

Fig. 9 Predicted deformation shapes of tubular structures with various axial lengths. (a) Type A and (b) Type B.

Fig. 10 Compressive load-time histories in numerical simulation and experiment. (a) Type-A ($l=100\text{mm}$), (b) Type-A ($l=300\text{mm}$), (c) Type-B ($l=100\text{mm}$) and (d) Type-B ($l=300\text{mm}$).

る。また、最大荷重 $P_{\max}$ の大きさも、軸長の変化に影響を受けていない。この傾向はType A～Gのすべての断面形状で確認された。各軸長における平均荷重 P_{ave} をFig. 13に示す。断面にリブのない管 (Type A, D, E) では、Type Aにおいて平均荷重 P_{ave} が他の断面形状と比較して小さくなった。また、リブを有する管では平均荷重が大きくなった。本軸長の範囲では、軸長が変化しても、平均荷重 P_{ave} はType A～Eではほとんど変化せず、Type F, Gでは差異が生じていることが確認された。これは、後者では、座屈で生じたうねり変形が、

Fig. 12 Compressive load-time histories for various tubular length and cross-sectional shapes (a) Type A with various axial length, (b) Type A, D, E (no internal rib) with 300 mm length, (c) Type A, B, C with 300 mm length and (d) Type F, G with 300 mm length.

密になって次のうねり変形を生じる前に、変形が終了したためである。

Fig. 12(b) より、Type Aにおいて $P_{\max}$ が他の断面形状と比較してわずかに小さいことが確認された。Type DとType Eを比較すると、 $P_{\max}$ にほとんど差がなかった。これは後述のように、周長にほとんど差異がなかったためだと考えられる。Fig. 12(c), (d) より、リブの枚数が増加するにつれて $P_{\max}$ が大きくなることが確認された。これは、補強リブによって角部のねじり剛性が向上したためだと考えられる。Type G, Hでは、前述のようにうねり変形が一つしか生じて

Fig. 11 Final deformation of analytical models ($l=300$ mm). (a) Type C, (b) Type D, (c) Type E, (d) Type F and (e) Type G.

Fig. 13 Average load of tubular structures with various lengths.

Table 5 Torsional stiffness and maximum force of each cross-sectional shape.

Cross-sectional shape	I_B/mm^4	$P_{\max}/\text{kN}$
Type A	6400	34.2
Type D	101823	37.7
Type E	118257	38.4
Type F	126490	37.2

いないため、Fig. 12(d) に示すように荷重のピークは一つしか生じなかった。

以上より、断面の多角化と補強リブは平均荷重を向上させるため、エネルギー吸収量の向上に有効である。しかし、補強リブは最大荷重も著しく向上させる。最適な補強リブの形状については、最大荷重がかかる時間を含めて、さらなる検討が必要である。

ここで、本研究の範囲では、断面全体で軸回りのモーメントが生じ、断面で角部を初めとしてねじれるような変形が生じている。そのため、多角管が動的軸圧縮される過程においては、断面のねじり剛性が、座屈変形に対する拘束の強さとみなすことができ、最大荷重の向上に寄与していると考えた。最大荷重の向上の要因にはリブの張力による影響も考えられるが、本研究では簡易的に断面のねじり剛性に着目し、

変形に対する拘束の強さを検討した。ここでは単純ねじりを想定し、Saint-Venantのねじり理論に従うものとした。薄肉閉断面のねじり剛性の算出にはBredtの式(2)を用いた²⁹⁾。

$$I_B = \frac{4A^2}{\frac{s}{d}} \quad (2)$$

ここで、 I_B はBredtのねじり定数、 A は管の外周と内周の中心線から内側の面積、 d は肉厚、 s は管の環断面の中心線の長さである。 I_B と荷重履歴より得られた $P_{\max}$ ($l=300$ mm)をTable 5に示す。これより、Type-Aは他の断面形状と比較して I_B が小さく、最大荷重も10%程度小さくなっていることが確認された。これは断面のねじり剛性が小さく、弾性変形に続いて生じる塑性変形が生じやすくなったためと考えられる。Type D, Type E, Type Fについては I_B に大きな差異はなく、 $P_{\max}$ もほとんど変化しなかった。これは断面形状が一定の半径の円に内接するような多角形であり、 A と s が大きく変化しなかったためと考えられる。このように、断面にリブを持たない多角管では、断面全体のねじり剛性が最大荷重に影響を及ぼしていると考えられる。

また、Saint-Venantのねじり理論に従うと、断面のリブに応力が生じないことが知られており²⁹⁾、ねじり定数を算出することは困難となる。そこで、四角管の場合¹⁴⁾と同様に、断面における角部のねじり変形が座屈形状に影響するものと考え、角部の断面二次極モーメント I_c からねじり剛性を評価することとした。本研究の範囲では、まず辺部で座屈し、最後に角部が座屈する変形が生じたことから、角部による拘束が大きいと言える。そのため、角部の剛性は辺部と比較して影響が大きく、実際の I_B との効果は近いと考えられる。実際に角部と隣接する要素のみを2mmに厚肉化した場合には、最大荷重で9%、平均荷重で30%増加することが確認された。肉厚が一樣でないため一概に比較することはできないが、角部の剛性の増加によって生じる荷重が増加したものと考えられる。対角上にリブを有する断面において、角部はFig. 14に示すような五角形とし、 I_c を算出した。これは角部1個あたりのねじり剛性であり、角部の幾何学的形状の差異によるねじり剛性への影響を示している。なおType Bにおける角

Fig. 14 Increase in torsional stiffness at corner portion of polygonal tube by additional ribs.

Table 6 Torsional stiffness of corner portion and maximum load of each cross-sectional shape.

Cross-sectional shape	I_c / mm^4	$P_{\max} / \text{kN}$
Type B	0.17	43.6
Type C	0.30	60.9
Type F	0.35	78.3
Type G	0.38	95.0

Fig. 15 Relationship between maximum load and torsional stiffness. (a) Torsional stiffness, (b) Torsional stiffness of corner.

部は正方形である。得られた I_c と $P_{\max}$ ($l=300\text{mm}$) の関係を Table 6 に示す。また、以上のねじり剛性と最大荷重の関係を Fig. 15 に示す。これらより、断面が多角化するほど、 I_c がわずかに大きくなることが確認された。ねじり剛性の差異は角一つあたりでは小さいが、断面全体ではその影響は大きいと考えられる。また、 I_c の増加に伴い、 $P_{\max}$ が大きくなる傾向が確認された。これは、ねじり剛性の増加によって、角管断面が変形しにくくなったためだと思われる。このように、断面にリブを有する多角管では、角部のねじり剛性が最大荷重に影響を及ぼしていると考えられる。

4. 結 言

本研究では、多角管の角数と内部に設ける補強リブが変形

挙動に及ぼす影響について検討した結果、以下の結論を得た。

- (1) 本軸長の範囲では、軸長が最大荷重に及ぼす影響は小さい。
- (2) 断面形状が多角化しても、生じる最大荷重に大きな差異は見られず、平均荷重が大きくなる。
- (3) 補強リブは角部のねじり剛性を著しく増加させ、それに伴い、最大荷重も大きくなる。
- (4) 断面のねじり剛性が大きくなるほど変形しにくくなり、最大荷重の大きさが大きくなる。
- (5) 本研究の範囲では、最大荷重が小さく、平均荷重を向上させることから、衝撃吸収部材として適するのは断面にリブを持たない多角形の筒状体である。

参 考 文 献

- 1) J. M. Alexander: Q. J. Mech. Appl. Math., **13** (1960), 10–15.
- 2) W. Abramowicz and N. Jones: Int. J. Impact Eng., **2** (1984), 179–208.
- 3) 村瀬勝彦, ノーマン・ジョーンズ: 材料, **42** (1993), 1420–1426.
- 4) Q. Meng, S. T. S. Al-Hassani and P. D. Soden: Int. J. Mech. Sci., **25** (1983), 747–773.
- 5) V. Tarigopula, M. Langseth, O. S. Hopperstad and A. H. Clausen: Int. J. Impact Eng., **32** (2006), 847–882.
- 6) H. Schneider and N. Jones: Int. J. Mech. Sci., **45** (2003), 2061–2081.
- 7) 萩原一郎, 津田政明, 佐藤佳裕: 日本機械学会論文集 A 編, **55** (1989), 1407–1415.
- 8) D. Karagiozova: Int. J. Impact Eng., **30** (2004), 143–166.
- 9) D.-K. Kim, S. Lee and M. Rhee: Mater. Des., **19** (1998), 179–185.
- 10) 伊藤清文, 熊谷正樹: 塑性と加工, **56** (2015), 8–12.
- 11) J. Fleischer, G. Lanza, S. Dosch, J. Elser and W. Pangboonyanon: Procedia CIRP, **18** (2014), 221–225.
- 12) J. Fang, Y. Gao, G. Sun, N. Qiu and Q. Li: Thin-walled Struct., **95** (2015), 115–126.
- 13) X. Zhang, Z. Wen and H. Zhang: Thin-walled Struct., **84** (2014), 263–274.
- 14) M. Miyazaki and H. Negishi: Mater. Trans., **44** (2003), 1566–1570.
- 15) M. Miyazaki and M. Yamaguchi: Procedia Eng., **81** (2014), 1067–1072.
- 16) チモシェンコ: 座屈理論, 仲 威雄, 濤川聲一, 久田俊彦 (訳), コロナ社, (1954), 221–225.
- 17) 宮崎 忠, 根岸秀明: 軽金属, **52** (2002), 313–317.
- 18) 宮崎 忠, 横谷圭亮: 第66回塑性加工連合講演会講演論文集, (2015), 395–396.
- 19) 宮崎 忠, 横谷圭亮, 東條湧介: 平成28年度塑性加工春季講演会講演論文集, (2016), 169–170.
- 20) K. Yokoya, M. Miyazaki and Y. Tojo: Mater. Sci. Forum, **910** (2017), 117–122.
- 21) K. Yokoya, M. Miyazaki, Y. Tojo and M. Yamashita: Procedia Eng., **207** (2017), 251–256.
- 22) 山下 実, 後藤 學, 高橋隆博, 澤入安彦: 日本機械学会論文集 A 編, **68** (2002), 668–673.
- 23) 山下 実, 後藤 學, 高橋隆博, 澤入安彦: 日本機械学会論文集 A 編, **68** (2002), 217–222.
- 24) M. Yamashita, H. Kenmotsu and T. Hattori: Thin-walled Struct., **69** (2013), 45–53.
- 25) M. Miyazaki, H. Endo and H. Negishi: J. Mater. Process. Technol., **85** (1999), 213–216.
- 26) M. Yamashita, H. Kenmotsu and T. Hattori: Thin-walled Struct., **50** (2012), 37–44.
- 27) S. Tanimura, H. Hayashi, T. Yamamoto and K. Mimura: J. Solid Mech. Mater., **3** (2009), 1263–1273.
- 28) J. Chung and G. M. Hulber: Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **118** (1994), 1–11.
- 29) S. P. Timoshenko and J. N. Goodier: Theory of Elasticity 3rd ed., McGraw-Hill, New York, (1970), 291–353.