被覆複合円筒の非定常熱応力

竹内 洋一郎*・財満 鎮雄**

谷川 義信*・越智 俊郎**

Transient thermal stresses in bonded composite hollow circular cylinder

UDC 621.793 : 539.419

TAKEUTI Yoitiro*, ZAIMA Shigeo**

TANIGAWA Yoshinobu* and OCHI Toshiro**

A general analysis for the transient thermal stress of a composite cylinder made by bonding is described under the symmetrical temperature condition. Analysis was made by the stress function method with the aid of Laplace transform. Numerical practical problem is illustrated for a composite cylinder of aluminum alloy and steel such as an alclad pipe.

(Received January 16, 1976)

1. 緒 言

近年压力容器、構造用、排気あるいは輸送管用として、耐食または補強の目的で、異種材料を接着した複合円筒の利用が多くなった。このような円筒では、温度変化による熱応力問題は必要かつ重要性が多い。本報では最初一様な温度にある異種材料よりできた中空複合円筒が、ある瞬間から、一つの境界面は一定温度に、他の境界面は一定温度の流体にさらされる場合の、非定常熱応力問題を、二次元熱弾性理論により解析した。解析法はエアリーの熱応力関数を利用し¹⁾、熱応力分布の一般公式を求めた。これらの結果は被覆材が内面、あるいは外面にある場合にも共通して使用できる。実際の数値計算例としては、外面アルミニウム合金、内側鉄鋼の複合円筒（例アルクラッドパイプ）について、各種物性数について計算し、各場合についての熱応力分布図を示した。従来この種の研究例としては、解析法を変位法によつた武井²⁾の報告があるが、それは縦弾性係数およびポアソン比を、内外円筒について同一にとつて解析しているため、アルクラッドパイプおよびその他の全く異種材料よりできた複合円筒には適用できない。

なお、内外円筒の半径比の変化による熱応力分布の変化を調べるために、被覆的でない不特定の異種材料よりできた複合円筒の場合として、内半径比が2:1外半径比が3:2（内外円筒が同じ肉厚、および4:2）の2つの場合に対し、温度分布および熱応力分布の数値計算結果も参考例として、グラフで示した。

2. 解 析

2.1 温度分布の解析

Fig. 1 のような複合円筒において、内外円筒の温度をそれぞれ T_1 , T_2 とするとき、非定常熱伝導方程式はつぎのようになる。ただし、材料定数の添字 1, 2 はすべて内外円筒に対し区別されるためである。

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \kappa_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \kappa_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) \quad (2)$$

Fig. 1 Composite hollow circular cylinder with aluminum alloy and steel.

* 大阪府立大学工学部（堺市）。Faculty of Engineering, University of Osaka Prefecture (Sakai).

** 静岡大学工学部（浜松市）。Faculty of Engineering, Shizuoka University (Hamamatsu).

上式において, κ_i ($i = 1, 2$) は温度伝導率, t は時間の変数である。境界条件は, 内部流体温度を T' , 境界の相対熱伝達率を h とするとき,

$r = a$ において,

$$\partial T_1 / \partial r + h (T' - T_1) = 0 \quad (3)$$

$r = b$ において, $\lambda_1 (\partial T_1 / \partial r) = \lambda_2 (\partial T_2 / \partial r)$ (4)

$$T_1 = T_2 \quad (5)$$

$r = c$ において, $T_2 = 0$ (6)

初期条件は, $T_1 = T_2 = 0$ ($t = 0$) (7)

上の条件において, 外側境界面温度, および初期温度を 0 とおくことは, 温度は座標移動により変化できるから, なんら一般性を失わない。 λ_i は熱伝導率である。つぎに, 式(1)を式(7)のもとにラプラス変換をすれば, 変換後の像空間の値に対し * 印をつけると,

$$\frac{d^2 T_1^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_1^*}{dr} - \frac{p}{\kappa_1} T_1^* = 0 \quad (8)$$

ただし, p はラプラス変換のパラメータである。いま,

$$q_1 = \sqrt{p/\kappa_1}, \quad q_2 = \sqrt{p/\kappa_2} \quad (9)$$

とおくと, 式(8)の解は

$$T_1^* = C_1 I_0(q_1 r) + C_2 K_0(q_1 r) \quad (10)$$

ただし, I_0 , K_0 はそれぞれ 0 次の変形ベッセル関数で, C_1 , C_2 は境界条件により定められる積分定数である。

同様にして, 外側円筒に対して

$$T_2^* = C_3 I_0(q_2 r) + C_4 K_0(q_2 r) \quad (11)$$

ただし, C_3 , C_4 は積分定数である。式(3)~(6)の境界条件をそれぞれラプラス変換して, 式(10)および(11)を代入すれば C_1 , C_2 , C_3 , C_4 が決定され, この結果を再び式(10), (11)に代入すれば

$$\begin{aligned} T_1^* = & (hT'/p|A|) [\lambda_1 q_1 \{I_0(q_2 b) K_0(q_2 c) - I_0(q_2 c) \\ & \times K_0(q_2 b)\} \{I_0(q_1 r) K_1(q_1 b) + I_1(q_1 b) K_0(q_1 r)\} \\ & + \lambda_2 q_2 \{I_1(q_2 b) K_0(q_2 c) + I_0(q_2 c) K_1(q_2 b)\} \\ & \times \{I_0(q_1 r) K_0(q_1 b) - I_0(q_1 b) K_0(q_1 r)\}] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} T_2^* = & (\lambda_1 hT'/bp|A|) \{I_0(q_2 r) K_0(q_2 c) \\ & - I_0(q_2 c) K_0(q_2 r)\} \end{aligned} \quad (13)$$

ただし, $|A|$ はつぎの行列式である。

$$|A| = \begin{vmatrix} hI_0(q_1 a) - q_1 I_1(q_1 a) & hK_0(q_1 a) + q_1 K_1(q_1 a) \\ \lambda_1 q_1 I_1(q_1 b) & -\lambda_1 q_1 K_1(q_1 b) \\ I_0(q_1 b) & K_0(q_1 b) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\lambda_2 q_2 I_1(q_2 b) & \lambda_2 q_2 K_1(q_2 b) \\ -I_0(q_2 b) & -K_0(q_2 b) \\ I_0(q_2 c) & K_0(q_2 c) \end{vmatrix}$$

ただし, I_1 , K_1 はそれぞれ一次の変形ベッセル関数である。式(12), (13)をそれぞれ留数の定理を用いてラプラス逆変換をすれば, 無次元化表示の温度分布の解として

$$\begin{aligned} T_1(\rho, \tau) = & \frac{\ln(\bar{b}/\bar{c}) + \lambda \ln(\rho/\bar{b})}{(1-\lambda) \ln \bar{b} - \ln \bar{c} - \lambda/B} \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\omega_n^2 \tau}}{\omega_n} \cdot \frac{B_0}{C_0} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} T_2(\rho, \tau) = & \frac{\ln(\rho/\bar{c})}{(1-\lambda) \ln \bar{b} - \ln \bar{c} - \lambda/B} \\ & + \frac{4}{\pi \bar{b}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\omega_n^2 \tau}}{\omega_n^2} \\ & \times \frac{\{J_0(\bar{c} \kappa \omega_n) Y_0(\rho \kappa \omega_n) - J_0(\rho \kappa \omega_n) Y_0(\bar{c} \kappa \omega_n)\}}{C_0} \end{aligned} \quad (15)$$

ただし, $\bar{T}_1 = T_1/T'$, $\bar{T}_2 = T_2/T'$, $\bar{b} = b/a$, $\bar{c} = c/a$, $\rho = r/a$,

$$\kappa = \sqrt{\kappa_1/\kappa_2}, B = ah, \lambda = \lambda_2/\lambda_1, \tau = \kappa_1 t/a^2 \quad (16)$$

また, ω_n は次式を満足する正根として与えられる。

$$\begin{aligned} & \{J_0(\omega) Y_1(\bar{b} \omega) - J_1(\bar{b} \omega) Y_0(\omega)\} \{J_0(\bar{b} \kappa \omega) Y_0(\bar{c} \kappa \omega) \\ & - J_0(\bar{c} \kappa \omega) Y_0(\bar{b} \kappa \omega)\} + (\omega/B) \{J_1(\omega) Y_1(\bar{b} \omega) \\ & - J_1(\bar{b} \omega) Y_1(\omega)\} \{J_0(\bar{b} \kappa \omega) Y_0(\bar{c} \kappa \omega) - J_0(\bar{c} \kappa \omega) \\ & \times Y_0(\bar{b} \kappa \omega)\} - \kappa \lambda \{J_0(\omega) Y_0(\bar{b} \omega) - J_0(\bar{b} \omega) Y_0(\omega)\} \\ & \times \{J_1(\bar{b} \kappa \omega) Y_0(\bar{c} \kappa \omega) - J_0(\bar{c} \kappa \omega) Y_1(\bar{b} \kappa \omega)\} \\ & - (\kappa \lambda \omega/B) \{J_1(\omega) Y_0(\bar{b} \omega) - J_0(\bar{b} \omega) Y_1(\omega)\} \\ & \times \{J_1(\bar{b} \kappa \omega) Y_0(\bar{c} \kappa \omega) - J_0(\bar{c} \kappa \omega) Y_1(\bar{b} \kappa \omega)\} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

なお, B_0 , C_0 はそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} B_0 = & -\{J_1(\bar{b} \omega_n) Y_0(\rho \omega_n) - J_0(\rho \omega_n) Y_1(\bar{b} \omega_n)\} \\ & \times \{J_0(\bar{b} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{c} \kappa \omega_n) - J_0(\bar{c} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{b} \kappa \omega_n)\} \\ & + \kappa \lambda \{J_0(\bar{b} \omega_n) Y_0(\rho \omega_n) - J_0(\rho \omega_n) Y_0(\bar{b} \omega_n)\} \\ & \times \{J_1(\bar{b} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{c} \kappa \omega_n) - J_0(\bar{c} \kappa \omega_n) Y_1(\bar{b} \kappa \omega_n)\} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} C_0 = & [-\{J_1(\omega_n) Y_1(\bar{b} \omega_n) - J_1(\bar{b} \omega_n) Y_1(\omega_n)\} \\ & \times \{J_0(\bar{b} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{c} \kappa \omega_n) - J_0(\bar{c} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{b} \kappa \omega_n)\} \\ & + \bar{b} \{J_0(\omega_n) Y_0(\bar{b} \omega_n) - J_0(\bar{b} \omega_n) Y_0(\omega_n)\} \\ & \times \{J_0(\bar{b} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{c} \kappa \omega_n) - J_0(\bar{c} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{b} \kappa \omega_n)\} \\ & - \bar{b} \kappa \{J_0(\omega_n) Y_1(\bar{b} \omega_n) - J_1(\bar{b} \omega_n) Y_0(\omega_n)\} \\ & \times \{J_1(\bar{b} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{c} \kappa \omega_n) - J_0(\bar{c} \kappa \omega_n) Y_1(\bar{b} \kappa \omega_n)\} \\ & - \bar{c} \kappa \{J_0(\omega_n) Y_1(\bar{b} \omega_n) - J_1(\bar{b} \omega_n) Y_0(\omega_n)\} \\ & \times \{J_0(\bar{b} \kappa \omega_n) Y_1(\bar{c} \kappa \omega_n) - J_1(\bar{c} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{b} \kappa \omega_n)\} \\ & + (\omega_n/B) [\{J_0(\omega_n) Y_1(\bar{b} \omega_n) - J_1(\bar{b} \omega_n) Y_0(\omega_n)\} \\ & \times \{J_0(\bar{b} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{c} \kappa \omega_n) - J_0(\bar{c} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{b} \kappa \omega_n)\} \\ & + \bar{b} \{J_1(\omega_n) Y_0(\bar{b} \omega_n) - J_0(\bar{b} \omega_n) Y_1(\omega_n)\} \\ & \times \{J_0(\bar{b} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{c} \kappa \omega_n) - J_0(\bar{c} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{b} \kappa \omega_n)\} \\ & - \bar{b} \kappa \{J_1(\omega_n) Y_1(\bar{b} \omega_n) - J_1(\bar{b} \omega_n) Y_1(\omega_n)\} \\ & \times \{J_1(\bar{b} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{c} \kappa \omega_n) - J_0(\bar{c} \kappa \omega_n) Y_1(\bar{b} \kappa \omega_n)\} \\ & - \bar{c} \kappa \{J_1(\omega_n) Y_1(\bar{b} \omega_n) - J_1(\bar{b} \omega_n) Y_1(\omega_n)\} \\ & \times \{J_0(\bar{b} \kappa \omega_n) Y_1(\bar{c} \kappa \omega_n) - J_1(\bar{c} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{b} \kappa \omega_n)\}] \\ & + \kappa \lambda [\{J_1(\omega_n) Y_0(\bar{b} \omega_n) - J_0(\bar{b} \omega_n) Y_1(\omega_n)\} \\ & \times \{J_1(\bar{b} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{c} \kappa \omega_n) - J_0(\bar{c} \kappa \omega_n) Y_1(\bar{b} \kappa \omega_n)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{b} \{J_0(\omega_n) Y_1(\bar{b}\omega_n) - J_1(\bar{b}\omega_n) Y_0(\omega_n)\} \\
& \times \{J_1(\bar{b}\kappa\omega_n) Y_0(\bar{c}\kappa\omega_n) - J_0(\bar{c}\kappa\omega_n) Y_1(\bar{b}\kappa\omega_n)\} \\
& - \bar{b}\kappa \{J_0(\omega_n) Y_0(\bar{b}\omega_n) - J_0(\bar{b}\omega_n) Y_0(\omega_n)\} \\
& \times \{J_0(\bar{b}\kappa\omega_n) Y_0(\bar{c}\kappa\omega_n) - J_0(\bar{c}\kappa\omega_n) Y_0(\bar{b}\kappa\omega_n)\} \\
& + \bar{c}\kappa \{J_0(\omega_n) Y_0(\bar{b}\omega_n) - J_0(\bar{b}\omega_n) Y_0(\omega_n)\} \\
& \times \{J_1(\bar{b}\kappa\omega_n) Y_1(\bar{c}\kappa\omega_n) - J_1(\bar{c}\kappa\omega_n) Y_1(\bar{b}\kappa\omega_n)\} \\
& + (\kappa\lambda\omega_n/B) [-\{J_0(\omega_n) Y_0(\bar{b}\omega_n) - J_0(\bar{b}\omega_n) Y_0(\omega_n)\} \\
& \times \{J_1(\bar{b}\kappa\omega_n) Y_0(\bar{c}\kappa\omega_n) - J_0(\bar{c}\kappa\omega_n) Y_1(\bar{b}\kappa\omega_n)\} \\
& + \bar{b} \{J_1(\omega_n) Y_1(\bar{b}\omega_n) - J_1(\bar{b}\omega_n) Y_1(\omega_n)\} \\
& \times \{J_1(\bar{b}\kappa\omega_n) Y_0(\bar{c}\kappa\omega_n) - J_0(\bar{c}\kappa\omega_n) Y_1(\bar{b}\kappa\omega_n)\} \\
& - \bar{b}\kappa \{J_1(\omega_n) Y_0(\bar{b}\omega_n) - J_0(\bar{b}\omega_n) Y_1(\omega_n)\} \\
& \times \{J_0(\bar{b}\kappa\omega_n) Y_0(\bar{c}\kappa\omega_n) - J_0(\bar{c}\kappa\omega_n) Y_1(\bar{b}\kappa\omega_n)\} \\
& + \bar{c}\kappa \{J_1(\omega_n) Y_0(\bar{b}\omega_n) - J_0(\bar{b}\omega_n) Y_1(\omega_n)\} \\
& \times \{J_1(\bar{b}\kappa\omega_n) Y_1(\bar{c}\kappa\omega_n) - J_1(\bar{c}\kappa\omega_n) Y_1(\bar{b}\kappa\omega_n)\} \\
& \times Y_1(\bar{b}\kappa\omega_n)] \quad (19)
\end{aligned}$$

2.2 熱応力分布の解析

式(18)で得られた温度分布のもとにおける、非定常熱応力分布をつぎに求める。極座標系の二次元熱応力問題の基礎微分方程式¹⁾は、熱応力関数を x_i とするとき次式で与えられる。

$$\Delta \Delta x_i = -k_i \Delta T_i \quad (20)$$

ただし、 $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + 1/r \cdot \partial/\partial r$, k_i は材料定数で平面ひずみ問題に対し、 $k_i = \alpha_i E_i / (1 - \nu_i)$ 、ただし、 α_i は線膨張係数、 E_i は縦弾性係数、 ν_i はポアソン比である。

式(20)は軸対称温度分布問題に対し、次式のように簡単化される。

$$d \left[r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dx_i}{dr} \right) \right\} \right] = -k_i d \left(r \frac{dT_i}{dr} \right) \quad (21)$$

上式の解は

$$\begin{aligned}
x_i = & -k_i \int \frac{1}{r} \int T_i r dr dr + C_{1i} r^2 \ln r + C_{2i} r^2 \\
& + C_{3i} \ln r + C_{4i} \quad (22)
\end{aligned}$$

上の解(22)において、 C_{1i} は変位を多価にするため、また C_{4i} は応力に関係がないため、それぞれ 0 としてさしつかえない。このとき熱応力の成分は

$$(\sigma_{rr})_i = -k_i r^{-2} \int T_i r dr + 2C_{2i} + r^{-2} C_{3i} \quad (23)$$

$$(\sigma_{\theta\theta})_i = k_i r^{-2} \int T_i r dr + 2C_{2i} - k_i T_i - r^{-2} C_{3i} \quad (24)$$

$$(\sigma_{r\theta})_i = 0 \quad (25)$$

軸対称温度分布の複合円筒における境界条件は、軸方向のひずみが拘束されるとき、つぎの 4 式となる。

$$r = a \text{ で、 } (\sigma_{rr})_1 = 0 \quad (26)$$

$$r = b \text{ で、 } (\sigma_{rr})_1 = (\sigma_{rr})_2 \quad (27)$$

$$(u_r)_1 = (u_r)_2 \quad (28)$$

$$r = c \text{ , } (\sigma_{rr})_2 = 0 \quad (29)$$

ただし、 u_r は半径方向の変位成分である。式(26)の条件はまた円周方向のひずみを $(\epsilon_{\theta\theta})_i$ とするとき、

$$r = b \text{ で、 } (\epsilon_{\theta\theta})_1 = (\epsilon_{\theta\theta})_2 \quad (30)$$

の条件に相当するから、これを応力成分で表わすと

$$\begin{aligned}
& (1 - \nu_1)^2 E_1^{-1} \{ (\sigma_{\theta\theta})_1 - \nu_1 (\sigma_{rr})_1 / (1 - \nu_1) \} \\
& + (1 + \nu_1) \alpha_1 T_1 = (1 - \nu_2)^2 E_2^{-1} \{ (\sigma_{\theta\theta})_2 \\
& - \nu_2 (\sigma_{rr})_2 / (1 - \nu_2) \} + (1 + \nu_2) \alpha_2 T_2 \quad (31)
\end{aligned}$$

式(23)、(24)、および(25)を式(26)、(27)、(28)および(29)に代入すると、応力成分中の各種積分定数はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
C_{21} = & \frac{1}{|P|} \left\{ -\frac{2D_1}{b^2} (e_2 + e_4) + \frac{D_1}{c^2} \left(2e_2 + \frac{1}{b^2} e_3 \right) \right. \\
& - \frac{D_2}{a^2} \left(\frac{1}{b^2} e_3 - 2e_4 \right) + \frac{2}{a^2} \left(D_3 e_4 + \frac{D_4}{b^2} \right) \\
& \left. - \frac{1}{a^2 c^2} (D_3 e_3 + 2D_4) \right\} \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{31} = & \frac{1}{|P|} \left\{ 2D_2 \left(\frac{1}{b^2} e_3 - 2e_4 \right) - 4 \left(D_3 e_4 + \frac{1}{b^2} D_4 \right) \right. \\
& + \frac{2}{c^2} (D_3 e_3 + 2D_4) + 2D_1 \left(\frac{1}{b^2} e_1 + 2e_4 \right) \\
& \left. - 2 \frac{D_1}{c^2} (e_1 + e_3) \right\} \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{22} = & \frac{1}{|P|} \left\{ -2 \frac{D_2}{b^2} (e_2 + e_4) + \frac{D_2}{a^2} \left(\frac{1}{b^2} e_1 + 2e_4 \right) \right. \\
& + \frac{2}{c^2} \left(-D_3 e_2 + \frac{1}{b^2} D_4 \right) - \frac{1}{a^2 c^2} (-D_3 e_1 + 2D_4) \\
& \left. + \frac{D_1}{c^2} \left(-\frac{1}{b^2} e_1 + 2e_2 \right) \right\} \quad (34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{32} = & \frac{1}{|P|} \left\{ -4 \left(-D_3 e_2 + \frac{1}{b^2} D_4 \right) \right. \\
& + \frac{2}{a^2} (-D_3 e_1 + 2D_4) - 2D_1 \left(-\frac{1}{b^2} e_1 + 2e_2 \right) \\
& \left. + 2D_2 \left(2e_2 + \frac{1}{b^2} e_3 \right) - 2 \frac{D_2}{a^2} (e_1 + e_3) \right\} \quad (35)
\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
e_1 = & 2b^2(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)E_1^{-1} \\
e_2 = & -(1 + \nu_1)E_1^{-1} \\
e_3 = & -2b^2(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)E_2^{-1} \\
e_4 = & (1 + \nu_2)E_2^{-1} \quad (36)
\end{aligned}$$

$|P|$ はつぎの行列式を表わす。

$$|P| = \begin{vmatrix} 2 & a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & c^{-2} \\ 2 & b^{-2} & -2 & -b^{-2} \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix} \quad (37)$$

なお、 $D_1 \sim D_4$ はつぎの定積分で、温度分布が与えられるとき時間をパラメータとする定数となる。

$$\begin{aligned}
D_1 = & \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\alpha_1 E_1}{1 - \nu_1} \int T_1 r dr \Big|_{r=a} \\
D_2 = & \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\alpha_2 E_2}{1 - \nu_2} \int T_2 r dr \Big|_{r=c}
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} D_3 &= \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\alpha_1 E_1}{1-\nu_1} \int T_1 r dr \Big|_{r=b} \\ &\quad - \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\alpha_2 E_2}{1-\nu_2} \int T_2 r dr \Big|_{r=b} \\ D_4 &= -\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \alpha_1 \int T_1 r dr \Big|_{r=b} \\ &\quad + \frac{1+\nu_2}{1-\nu_2} \alpha_2 \int T_2 r dr \Big|_{r=b} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

ゆえに式(4), (5)の温度解を式(38)に代入し, D_i を決定すれば応力成分の積分定数 C_{ij} が決定され, 最終的に熱応力成分はつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr})_1 / \alpha_1 E_1 T' &= \\ &= -\frac{1}{1-\nu_1} \left[\frac{1}{4V} \left(2 \ln \frac{\bar{b}}{\bar{c}} + 2\lambda \ln \frac{\rho}{\bar{b}} - \lambda \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \left\{ \frac{F_1}{H} J_1(\rho \omega_n) + \frac{G_1}{H} Y_1(\rho \omega_n) \right\} \right] \\ &\quad + 2C_{21} + \frac{C_{31}}{\rho^2} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{\theta\theta})_1 / \alpha_1 E_1 T' &= \\ &= \frac{1}{1-\nu_1} \left[-\frac{1}{4V} \left(2 \ln \frac{\bar{b}}{\bar{c}} + 2\lambda \ln \frac{\rho}{\bar{b}} + \lambda \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \left\{ \frac{F_1}{H} J_1(\rho \omega_n) + \frac{G_1}{H} Y_1(\rho \omega_n) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{F_1}{H} J_0(\rho \omega_n) + \frac{G_1}{H} Y_0(\rho \omega_n) \right\} \right] \\ &\quad + 2C_{21} - \frac{C_{31}}{\rho^2} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr})_2 / \alpha_1 E_1 T' &= \\ &= -\frac{\alpha E}{1-\nu \nu_1} \left[\frac{1}{4V} \left(2 \ln \frac{\rho}{\bar{c}} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho \kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \left\{ \frac{F_2}{H} J_1(\rho \kappa \omega_n) + \frac{G_2}{H} Y_1(\rho \kappa \omega_n) \right\} \right] \\ &\quad + 2C_{22} + \frac{1}{\rho^2} C_{32} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{\theta\theta})_2 / \alpha_1 E_1 T' &= \\ &= \frac{\alpha E}{1-\nu \nu_1} \left[-\frac{1}{4V} \left(2 \ln \frac{\rho}{\bar{c}} + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho \kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \left\{ \frac{F_2}{H} J_1(\rho \kappa \omega_n) + \frac{G_2}{H} Y_1(\rho \kappa \omega_n) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{F_2}{H} J_0(\rho \kappa \omega_n) + \frac{G_2}{H} Y_0(\rho \kappa \omega_n) \right\} \right] \\ &\quad + 2C_{22} - \frac{1}{\rho^2} C_{32} \end{aligned} \quad (42)$$

ただし, $V = (1-\lambda) \ln \bar{b} - \ln \bar{c} - \lambda/B$

$$H = C_0$$

$$\begin{aligned} F_1 &= 2e^{-\omega_n^2 \tau} \omega_n^{-1} [Y_1(\bar{b} \omega_n) \{J_0(\bar{b} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{c} \kappa \omega_n) \\ &\quad - J_0(\bar{c} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{b} \kappa \omega_n)\} - \kappa \lambda Y_0(\bar{b} \omega_n) \{J_1(\bar{b} \kappa \omega_n) \\ &\quad \times Y_0(\bar{c} \kappa \omega_n) - J_0(\bar{c} \kappa \omega_n) Y_1(\bar{b} \kappa \omega_n)\}] \\ G_1 &= 2e^{-\omega_n^2 \tau} \omega_n^{-1} [-J_1(\bar{b} \omega_n) \{J_0(\bar{b} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{c} \kappa \omega_n) \end{aligned}$$

$$- J_0(\bar{c} \kappa \omega_n) Y_0(\bar{b} \kappa \omega_n)\} + \kappa \lambda J_0(\bar{b} \omega_n) \{J_1(\bar{b} \kappa \omega_n) \\ \times Y_0(\bar{c} \kappa \omega_n) - J_0(\bar{c} \kappa \omega_n) Y_1(\bar{b} \kappa \omega_n)\}]$$

$$F_2 = -\frac{4e^{-\omega_n^2 \tau}}{\pi \bar{b} \omega_n^2} Y_0(\bar{c} \kappa \omega_n)$$

$$G_2 = \frac{4e^{-\omega_n^2 \tau}}{\pi \bar{b} \omega_n^2} J_0(\bar{c} \kappa \omega_n)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad E = \frac{E_2}{E_1}, \quad \nu = \frac{\nu_2}{\nu_1}$$

3. 数値計算

本報告の主要部を実在のアルミニウム被覆接着鋼管の非定常熱応力の解析法と, 複合円筒における非定常熱応力の発生と, その分布の進展を定常状態に至るまでの過程を調べ, 熱衝撃問題に対応する資料を作るため数値計算を実行し, 各時刻の分布結果をグラフにより図示した。

まず, 実在のアルクラッドパイプの場合に対応して, 外側円筒がアルミニウム合金, 内側円筒が鋼管よりできている複合円筒を例にとり, 得られた結果に一般性をもたすため, 内外円筒の半径および材料定数をすべて比の値で示し, また温度と半径方向および円周方向熱応力分布も無次元化表示してある。アルクラッドパイプの温度分布および熱応力分布を **Fig. 2~5** に示した。採用した諸元は

$$\bar{b} = \frac{b}{a} = \frac{14.7}{12.2} \div 1.2050$$

$$\bar{c} = \frac{c}{a} = \frac{15.0}{12.2} \div 1.2295$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \div \sqrt{\frac{0.12}{0.86}} \div 4.364$$

$$E = \frac{E_2}{E_1} = \frac{0.71}{2.10} \div 0.3381$$

$$\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{23.5}{11.0} \div 2.136$$

$$\nu = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{0.33}{0.30} \div 1.10$$

したがって得られた結果は, 上記の比が成立する複合円筒に対し, 共通して使用できる。ビオ数 $B = ah$ としては, 鋼管と流体の相対熱伝達率の値はひじょうに大きい範囲が実際に存在するので, $B = 3.0$ と $B = 0.3$ の場合についての結果を示した。また, 半径比の変化による影響を見るために, アルクラッドパイプなどの実例の寸法と離れるが, 内外の円筒の肉厚が接近している場合として, 内半径比が $2:1$, 外半径比が $3:2$, および $4:2$ の場合の数値計算を行ない **Fig. 6, 7, 8** に温度および円周方向熱応力分布を参考例として示した。この場合採用した諸元は, つぎの値を採用した。

$$E = 1.2, \quad \alpha = 0.9, \quad B = 0.3$$

半径方向応力は小さいので図示を省略した。

Fig. 2 Temperature distribution in bonded composite hollow circular cylinder ($B = 3.0$).

Fig. 3 Radial thermal stress distribution for $B = 3.0$.

被覆な場合、肉厚が接近している場合、いずれの場合も、図より明らかなように円周方向応力は内外円筒の接着部で不連続となり、温度分布および半径方向応力はその配が不連続となる。

4. 考 察

アルクラッドパイプなどアルミニウム合金と鋼との接着による複合円筒の熱応力問題は、実用上興味ある問題であるにもかかわらず従来解析報告がなされていない。

Fig. 4 Hoop stress distribution for $B = 3.0$.

Fig. 5 Hoop stress distribution for $B = 0.3$.

Fig. 6 Temperature distribution in composite cylinder with radial ratio 3:2 ($B = 0.3$).

Fig. 7 Hoop stress distribution in composite cylinder with radial ratio 3: 2 ($B = 0.3$).

Fig. 8 Hoop stress distribution in composite cylinder with radial ratio 4: 2. ($B = 0.3$)

異種材料による複合円筒の場合、膨張係数の相異により、一様な温度変化であっても熱応力が発生するから、本例のように、アルミニウムと鋼のように、膨張係数、熱伝導率の大きい相異があると、温度こう配、不均一膨張により熱応力問題は重要になる。アルミニウム合金が被覆的な厚さの本報告のような場合、鋼管の熱応力分布は単一管の場合と似た傾向を示し、高温側の内面で大きい圧縮応力を発生し、接着部で大きい引張応力を発生する。図より明らかなようにアルミニウム合金部がなければ、鋼管の熱応力は単一管のときさらに大きくなる。これは複合円筒にすれば、アルミニウムの膨張係数が大きいから、拘束が緩和されることになり、また熱伝導率が大きいから温度こう配も緩和されるからである。応力分布と温度分布と時間の関係から明らかなように、最初一様に温度分布 0 の状態が、内面加熱の影響が時刻とともに外面に伝わり、温度のこう配も進行し、熱応力も時刻とともに大きくなって、定常状態で最大となっている。もし温度条件を内面で、 $t = 0$ の瞬間に T' に保つとして与えると、最初の熱応力が最大となるが、これは

Fig. 9 Relation between maximum hoop stress and B for alclad pipe.

$B = \infty$ の場合で実際に起こりにくい。したがって本グラフの見方としては、応力は無次元化して示してあるから、 T' をいくらでも定められるわけで、熱衝撃的な考慮をすれば、許容応力または破壊応力として $\sigma_{\theta\theta} = \alpha_1 E_1 T'$ の値を見れば、たとえばある T' では、 $\tau = 0.001$ でも降伏値に達し、またある T' では $\tau = 0.01$ で破損に至ることがわかり、また降伏応力を横線に引くと、時刻の経過につれて、内面より外面へ降伏が進んでいくようすがわかる。なお、アルミニウム合金部の熱応力が急に小さくなっているのは、縦弾性係数が小さいことが主因である。ビオ数 B と最大熱応力との関係は、 B が大きくなるほど熱応力は大きくなる。(Fig. 9 参照) これは B が大きくなるほど加熱のしかたが急になり、熱衝撃的な現象が起こりやすく、大きい温度差を生じるためである。応力分布図でアルミニウム部が、直線状* でかつ変化が少ないのは、アルミニウムの熱伝導率が高いための温度差が少ないためである。また、アルミニウム部が厚いときには、アルミニウムの大きい熱膨張係数のため、アルミニウム部に圧縮の円周方向応力が表われることも起こりうるが (Fig. 8 参照)、被覆的に使用した場合には、内部高温による反対面引張の影響の方が大きく、本例の場合はアルミニウム合金部全部引張の円周方向熱応力となっている。

本報告は一般性なるべく失わないため、中空複合円筒の非定常解析を行なったため、解析結果はかなり複雑であるが、実際は電子計算機を利用するから見かけほど手数はかからない。

なお、実際には軸方向の温度変化、弾性係数を始めとして各材料定数の温度依存性、軸方向の端面条件 (開放、閉塞、固定) により熱応力の値は変化してくることはいうまでもない。

参 考 文 献

- 1) 竹内：熱応力，日新出版，(1971)，5 章。
- 2) 武井：機械学会論文集，41 (1975)，2278。

* 厳密には曲線であるが、図に表われない程度である。