デジタル画像相関法・デローニ自動要素分割FEMに基づく インテリジェントハイブリッド法によるき裂先端特異場の評価*

西岡 俊久** 梅本 圭吾*** 藤本 岳洋****

Evaluation of Singular Field Near Crack Tip by Intelligent Hybrid Method Based on Digital Image Correlation · Delaunay Automatic Element Division FEM

Toshihisa Nishioka, Keigo Umemoto and Takehiro Fujimoto

In the experimental evaluation in transparent materials, generally optical techniques are often used. However, marine engine components are consist of metals, which are opaque materials. Therefore, visualization of stresses in metallic materials was almost impossible.

In this paper, the intelligent hybrid method made it possible to visualize highly accurate stress and strain components in metallic materials.

1. 緒言

今回用いたき裂近傍領域の変位分布評価にはデジタル画像相関法^{[1]~[4]}を用いた。デジタル画像相関法などの非接触分布計測では、モアレ干渉法やひずみゲージ法に比べて、試験片表面に格子やゲージを貼付する必要がないため、比較的簡単な計測システムとなる長所がある。一方、実験的方法では変位といった簡単な一次情報のみしか計測できず、強度設計や破壊力学解析に必要となる応力やひずみエネルギー分布さらにはJ積分や応力拡大係数などの破壊力学パラメータといった高次情報を得る際には実験計測誤差の影響が大きく現れることが危惧される。そこで、本研究では著者らによって開発された実験計測誤差を最小化する変分原理に基づくインテリジェントハイブリッド法^{[5]~[8]}を用いて実験計測誤差を消去した変位場を求め、高次情報の応力、ひずみ場を求めて破壊力学パラメータの評価を行った。

なお、本研究のインテリジェントハイブリッド法では、新たに解析領域の要素分割にデローニ自動要素分割法^[9]を用いている。

2. デジタル画像相関法

デジタル画像相関法では、変形前後画像の輝度分布を比較し、変形前の各点が変形後のどの位置に移動するのを見つけて変位を評価する。本研究では以下の相関値Sの評価式を用いた。

$$S = 1 - \frac{\sum_{y=y'=1}^n \sum_{x=x'=1}^n F(x,y)G(x',y')}{\sqrt{\sum_{y=1}^n \sum_{x=1}^n (F(x,y))^2 \sum_{y'=1}^n \sum_{x'=1}^n (G(x',y'))^2}} \quad (1)$$

ここで、 $F(x,y)$ 、 $G(x',y')$ は変形前後の画像におけるサブセット内部 (x,y) 、 (x',y') 画素点における輝度値であり、 n はサブセットの大きさにより変化する。このSが最小となる画素点同士を探す事により、変形前後の画像における対応点を調べることが出来る。しかし、これだけではピクセル幅に基づいた探索結果しか取得することができない。そこで、画素単位以下（サブピクセル単位）の探索結果を取得するためにニュートンラプソン法によってサブセットの変形を考慮した画像相関法を行った。Eq. (1)より取得したx方向変位をu, y方向変位をvとし、6つの変形項をEq.(2)のように考えると、

$$\rho = (u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}) \quad (2)$$

となり、この ρ に対して、ヘッセ行列H、ヤ

*原稿受付 2009年4月3日

**正会員 神戸大学 (神戸市東灘区深江南町 5-1-1)

***神戸大学

****正会員 神戸大学

コビアンベクトル $\Delta \rho$ を用いたニュートンラプソン法による収束計算を行うと、Eq.(3)のように計算できる。

$$\Delta \rho = -H^{-1} * \nabla \rho \quad (3)$$

$$\rho_{i+1} = \rho_i + \Delta \rho \quad (4)$$

ここで、 i は収束計算の繰返し数であり、 ρ_0 の $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ には画素単位での変位を使用し、その他の項は全て 0 と考える。そして、この ρ_i が十分に収束した時の $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ が、求める変位となる。

3. インテリジェントハイブリッド法

3.1 実験計測誤差最小化変分原理

一般的に実験計測による変位場には誤差混入の可能性があるが、計測された変位場は固体力学の支配方程式のひとつであるつりあい方程式を必ずしも満足しているとは限らない。このように実験変位場の誤差の混入のため変位の微分が必要なひずみや応力場では誤差が拡大される。これらの問題を克服するために、以下に、弾性変形の場合について、実験計測誤差を最小化する変分原理を示す。

ハイブリッド解析領域を V とすると、ポテンシャルエネルギーは次式で表される

$$\delta \pi = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V \bar{f}_i \delta u_i dV - \int_{S_t} \bar{t}_i \delta u_i dS = 0 \quad (5)$$

ここに、 W はひずみエネルギー密度で、 $\bar{t}_i$ 及び $\bar{f}_i$ はそれぞれ表面力及び体積力である。また、 $(\bar{\quad})$ は $(\quad)$ の既知量を表し、 S_t は表面力が与えられた境界を表す。ここで、ひずみエネルギー密度は次式で表される。

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (6)$$

σ_{ij} 、 ε_{ij} は応力及びひずみである。

次に、実験計測変位場を u_i^{exp} とし、一般に誤差が含まれているものとする。誤差のため u_i^{exp} はつりあい方程式を必ずしも満足していない。そこで、修正すべき変位場を u_i^{mod} で表すと、正解の変位場は、

$$u_i = u_i^{\text{exp}} + u_i^{\text{mod}} \quad (7)$$

で表される。同様に、ひずみ場、応力場も次式のように表すことができる。

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\text{exp}} + \varepsilon_{ij}^{\text{mod}} \quad (8)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\text{exp}} + \sigma_{ij}^{\text{mod}} \quad (9)$$

ここで、ポテンシャルエネルギー π の第一変分 $\delta \pi$ を考えると、最小ポテンシャルエネルギーの原理より次式が得られる。

$$\delta \pi = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V \bar{f}_i \delta u_i dV - \int_{S_t} \bar{t}_i \delta u_i dS = 0 \quad (10)$$

ここに、

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^{\text{mod}}} \delta \varepsilon_{ij}^{\text{mod}} = (\sigma_{ij}^{\text{exp}} + \sigma_{ij}^{\text{mod}}) \delta \varepsilon_{ij}^{\text{mod}} \quad (11)$$

となる。ただし、変位が拘束された境界 S_u で、

$$\delta u_i^{\text{mod}} = 0 \quad \text{on} \quad S_u \quad (12)$$

とする。Eq.(11)をEq.(10)に代入して、Eq.(10)を整理すると、修正場に対する変分原理が次式のように得られる。

$$\int_V \sigma_{ij}^{\text{mod}} \delta \varepsilon_{ij}^{\text{mod}} dV = \int_{S_t} \bar{t}_i \delta u_i^{\text{mod}} dS + \int_V \bar{f}_i \delta u_i^{\text{mod}} dV - \int_V \sigma_{ij}^{\text{exp}} \delta \varepsilon_{ij}^{\text{mod}} dV \quad (13)$$

さらに、発散定理などを用いて、修正場に対する変分原理は次のように整理できる。

$$\int_V \sigma_{ij}^{\text{mod}} \delta \varepsilon_{ij}^{\text{mod}} dV = \int_{S_t} (\bar{t}_i - \sigma_{ij}^{\text{exp}} n_j) \delta u_i^{\text{mod}} dS + \int_V (\bar{f}_i + \sigma_{ij,j}^{\text{exp}}) \delta u_i^{\text{mod}} dV \quad (14)$$

ここに、 n_j は境界上の外向き法線ベクトルの成分である。特別な場合として、実験計測場が以下に示すつりあい方程式及び力学的境界条件式を完全に満足している場合は、

$$\sigma_{ij,j}^{\text{exp}} + \bar{f}_i = 0 \quad \text{in} \quad V \quad (15)$$

$$\sigma_{ij}^{\text{exp}} n_j = \bar{t}_i \quad \text{on} \quad S_t \quad (16)$$

が成立する. この場合, 修正場は Eq.(14) より零, すなわち,

$$\sigma_{ij}^{\text{mod}} = u_i^{\text{mod}} = 0 \quad (17)$$

となる. 実験計測場に誤差がある場合, Eq.(15) や Eq.(16) は満足されない. この場合 Eq.(13) 或いは Eq.(14) の変分原理を満足する修正場 u_i^{mod} を決定することができれば, Eq.(17) より自動的に実験計測誤差を最小化した或いは消去した正解の変位場が得られる. なお, Eq.(13), Eq.(14) の右辺は不平衡力で表された実験計測場の誤差を修復する修復エネルギーと解釈することができる.

3.2 誤差最小化変分原理に基づく FEM 定式化

ここでは, 前節の実験計測場の誤差を最小化する変分原理に基づきインテリジェントハイブリッド法の定式化を行う.

ハイブリッド解析領域を要素分割し, Eq.(13) をベクトル表記すると,

$$\begin{aligned} & \sum_n \int_{V_n} \{\sigma^{\text{mod}}\} \{\delta \epsilon^{\text{mod}}\} dV \\ &= \sum_n \left(\int_{S_m} \{\bar{t}\}^T \{\delta u^{\text{mod}}\} dS + \int_{V_n} \{\bar{f}\}^T \{\delta u^{\text{mod}}\} \right. \\ & \quad \left. - \int_{V_n} \{\sigma^{\text{exp}}\}^T \{\delta \epsilon^{\text{mod}}\} dV \right) \end{aligned} \quad (18)$$

となる. n は要素番号を表し, V_n , S_m はそれぞれ n 番目要素の領域と力学的境界を表す. 変位ベクトルを有限要素表示すると,

$$\{u\} = \{u^{\text{exp}}\} + \{u^{\text{mod}}\} = [N] (\{q^{\text{exp}}\} + \{q^{\text{mod}}\}) \quad (19)$$

となる. $[N]$ は形状関数マトリックスで, $\{q^{\text{exp}}\}$, $\{q^{\text{mod}}\}$ は実験計測場及び修正場の要素節点変位ベクトルである.

同様に, ひずみ及び応力場は,

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^{\text{exp}}\} + \{\epsilon^{\text{mod}}\} = [B] (\{q^{\text{exp}}\} + \{q^{\text{mod}}\}) \quad (20)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma^{\text{exp}}\} + \{\sigma^{\text{mod}}\} = [D][B] (\{q^{\text{exp}}\} + \{q^{\text{mod}}\}) \quad (21)$$

と表すことができる. $[B]$, $[D]$ はそれぞれ, ひずみ・変位マトリックス, 弾性係数マトリ

ックスである. なお, 計測不能領域の変位場も Eq.(19) の表示で統一的に表す. ただし, この領域では, 実験計測場が得られていないことから $\{q^{\text{exp}}\} = 0$ と設定し, $\{q^{\text{mod}}\}$ を求めることにする. Eq.(19), (20) 及び(21) を Eq.(18) に代入し, $\{\delta q^{\text{mod}}\}$ の任意性より, 次の有限要素方程式が得られる.

$$[K] \{Q^{\text{mod}}\} = \{F\} - [K] \{Q^{\text{exp}}\} \quad (22)$$

$$[K] = \sum_n [k]_n = \sum_n \int_{V_n} [B]^T [D] [B] dV \quad (23)$$

$$\{F\} = \sum_n \{f\}_n = \left(\int_{S_m} [N]^T \{\bar{t}\} dS + \int_{V_n} [N]^T \{\bar{f}\} dV \right) \quad (24)$$

$[K]$, $[k]_n$ はそれぞれ全体及び要素の剛性マトリックス, $\{F\}$, $\{f\}_n$ は全体及び要素の等価節点力ベクトルである. また, $\{Q^{\text{exp}}\}$, $\{Q^{\text{mod}}\}$ は実験計測場及び修正場の全体節点変位ベクトルを表す. なお, 通常のハイブリッド解析では, $\{F\}$ は零ベクトルとなる場合が多い.

実験計測場がつりあい方程式を満足していなければ, Eq.(13), (14) 及び(18) を比較してわかるように, Eq.(22) の右辺は,

$$\{R\} = \{F\} - [K] \{Q^{\text{exp}}\} \neq 0 \quad (25)$$

となる. ここで, $\{R\}$ は実験計測場の誤差を修復する修復力ベクトルと解釈することができ, 不平衡力ベクトルの逆向きとなっている. したがって, 修正変位場は,

$$[K] \{Q^{\text{mod}}\} = \{R\} \quad (26)$$

を解くことによって得られる.

4. 実験

4.1 実験方法

実験は船舶や航空機等によく使用されているアルミ合金を試験片とし, ヤング率 72GPa, ポアソン比 0.3, 板厚 3mm の A2024 アルミ合金を用いて三点曲げ試験を行った. 試験片形状及び三点曲げ試験概念図を Fig.1 に示す. 変形前後の画像を CCD カメラで撮影し画像相関法により変位の算出を行った. 変形前後における負荷は変形前-0.1N, 変形後-2800N の圧縮荷重を与えた画像を用いた. 画像相関法における解析領域は 5.0[mm]×5.0[mm] で, 画

像の大きさは 1024×1024[pixels]で倍率は 4.9[μm/pixel]である。

Fig.1 Specimen configuration

4.2 実験結果

実験によって撮影した Fig.2 に示す変形前後の画像を解析画像とし画像相関法より実験変位場を取得した。また、この画像より取得した実験変位場の等高線を Fig.3 に示す。

Fig.2 Image for displacement analysis

Fig.3 Displacement field by the Digital Image Correlation

実験変位場においては定性的には等高線の分布は正しい分布を示しているが、滑らかな分布の線ではなく誤差等を含んだ等高線の分布となった。この実験変位場の結果を基に、次章ではハイブリッド解析を行う。

5. ハイブリッド解析

5.1 解析方法

実験場・修正場の比較として、次の2つを用いた。

① 従来型ハイブリッド法

一般的に誤差を含む実験計測変位場を入力データとして有限要素法的に直接ひずみ、応力場を求める実験・数値ハイブリッド法。

② インテリジェントハイブリッド法

誤差を含む実験計測変位場を先に示した実験計測誤差を最小化する変分原理を用いて修正した修正変位場を有限要素法の入力データとしてひずみ、応力場を求める実験・数値ハイブリッド法。

以上二つの方法により実験場と修正場のひずみ、応力場の比較をすることによりインテリジェントハイブリッド法の有用性を示す。また、式(27)に示すJ積分経路の模式図から求められる静的J積分より経路独立性を証明し破壊力学パラメータの評価を行った。J積分値より応力拡大係数を求め片側にき裂を有する三点曲げ試験片の応力拡大係数の解析解^[10]との比較により本研究の有用性を証明する。要素分割は Fig.2 を基に①、②とも Fig.5 のモデルを使用した。

$$J_k = \int_{\Gamma + \Gamma_c} (W n_k - t_i u_{i,k}) dS \quad (27)$$

Fig.4 J integral path

ここに、W はひずみエネルギー密度、 n_k は経路上の外向き法線ベクトル成分、 t_i は表面力ベクトル、 $u_{i,k}$ は変位成分の空間微分を意味する。Γ, Γ_c はき裂先端をとり囲む積分経路であり、Fig.4 にその定義を示す。

Fig.5 Mesh pattern for hybrid method

Fig.5 にハイブリッド解析に用いた要素分割図を示す.

総節点数は 2000, 総要素数は 3834 と設定した. 解析画像では 5mm×5mm の画像であったが, 画像相関解析のサブセットの考慮によって画像の端のデータが消失するので有効なデータは 4.6mm×4.6mm まで縮小した.

5.2 解析結果

インテリジェントハイブリッド法より得た修正変位場を Fig.6 に示す. 比較対象となる従来型ハイブリッド法 (画像相関法) における変位場は Fig.3 と同様である.

Fig.6 Displacement field by the intelligent hybrid method

実験変位場では等高線の誤差が見受けられるが, 修正変位場では, 滑らかな変位場を得ることができた. 実験変位場, 修正変位場とも等高線の縞の間隔の値が似ていることから, 画像相関法のおおよその精度は保障できることがわかる.

Fig.7 の従来型ハイブリッド法における応力場からわかるように実験変位場のままでは誤差が混入しているため滑らかな等高線の縞を観測することができない. 一方, Fig.8 に示すインテリジェントハイブリッド法における応力場では修正変位場を用いて誤差が消去されているので滑らかな等高線を取得すること

ができる.

Fig.7 Stress field by the conventional hybrid method

Fig.8 Stress field by the intelligent hybrid method

次に, Fig.9 にインテリジェントハイブリッド法より取得した応力分布の 3D グラフを示す. この分布によりき裂先端近傍において応力特異性が顕著に現れていることがわかる. これらの結果より, J 積分値の評価を行った.

Fig.9 3D Stress field by the intelligent hybrid method

従来型ハイブリッド法より求めた J_I の値を Fig.10 および Table1 に、また、インテリジェントハイブリッド法より求めた J_I の値を Fig. 11 および Table2 に示す。従来型ハイブリッド法においては実験変位場の結果より求めたひずみ、応力等の誤差が大きすぎるためJ積分値が大ききばらつき、経路独立性を保っていない結果となった。しかしインテリジェントハイブリッド法を用いた J_I においてはほぼ一定の値を示し経路独立性を示した。また、解析解より求めた応力拡大係数の解析値は $3.911 \times 10^7 \text{ Pa}\sqrt{\text{m}}$ となり、この値より求めた解析値の J_I との誤差もインテリジェントハイブリッド法においては3~5%程度となり良好な結果を示した。また、path No5~9 の J_I の平均より求めた応力拡大係数は $40.11 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ となった。これは解析解の比較においても2.5%程度となり精度よく評価できている。

Fig.10 Path dependence of J_I values in the conventional hybrid method

Table1 J_I values by the conventional hybrid method

path No	J_I [kN/m]
5	1170
6	-3.15
7	-3.15
8	-261
9	948

Fig.11 Path independence of J_I values in the intelligent hybrid method

Table2 J_I values by the intelligent hybrid method

path No	J_I [kN/m]	error [%]
5	22.20	2.8
6	22.47	4.0
7	22.72	5.2
8	22.52	4.3
9	22.45	3.9
average	22.47	

6. 結言

基礎的な実験結果をもとに、き裂先端の変位場、応力場について解析した。得られた結果の概要は下記のとおりである。

- (1) デジタル画像相関法により実験変位場を取得した。
- (2) デローニ自動要素分割法による要素分割にインテリジェントハイブリッド法を適用して実験計測変位場の誤差最小化を行い、滑らかな修正変位場、応力場を精度良く求めた。
- (3) インテリジェントハイブリッド法により求めたJ積分値はほぼ一定でかつ経路独立性を示し、応力拡大係数の解析値 ($3.911 \times 10^7 \text{ Pa}\sqrt{\text{m}}$) との誤差も少なく、良好な結果が得られた。

今後、種々の機器・装置、機械構造物に本法を適用し、これらの表面のひずみエネルギーなどを正確にリアルタイムにモニターしたいと考えている。

参考文献

- 1) Bruck H.A., Mcneil S.R., Sutton M.A. and Peer III W.H. Exp.Mech., 29-3(1989), 261-268.
- 2) 町田, 山田, J.JSEM, 5-2(2005), 130-135.
- 3) 町田, 森田, J.JSEM, 6-1(2006), 36-42
- 4) 西岡, 藪内, 藤本, JSME Kansai 83th annual meeting, No.084-1(2008), 9
- 5) 西岡, 池北, 玉井, JSIAM, Vol.6, No.3(1996), 43-61
- 6) 西岡, 池北, 玉井, comp.Mech., 20(1997), 101-108.
- 7) 西岡, 栗尾, 中林, Exp.Mech, 40-2(2000), 170-179
- 8) 西岡, 藤本, T.JSME, 67-655A(2001), 424-43
- 9) 谷口健男, FEMのための要素自動分割, 1992, 森北出版
- 10) 岡村, 線形破壊力学入門, 1976, 培風館