被覆平板の熱応力*

藤井 石 根**

Thermal Stress in an Infinite Coating Plate

By Iwane Fujii

Generally metallic materials possess high mechanical strength, but inferior to thermal or chemical erosion. On the other hand, for ceramics high thermal and chemical erosion resistance can be expected. Therefore, metallic materials of which surfaces are coated by ceramics, that is, coating materials are considered to unite the good qualities of both.

By such reasons there exist many used instances of coating materials, but it is doubtful whether sufficient investigations for the materials have been performed not only theoretically but also experimentally.

Under these circumstances, in this paper thermoelasticity taking place in a coating slab is dealt with analytically. Furthermore, in order to make clear the general tendency of the thermal stress induced in such a slab, some numerical results calculated based on the obtained analytically are shown by graph together with several explanations.

1. 緒 言

金属材料は一般に機械的強度は高いが化学的または熱的な侵食には必ずしも強いとはいえない。他方、たとえば、セラミック材料などは逆にろいが化学的、熱的には安定である。したがって、金属の表面をセラミック膜で覆ったものは両者の長所を兼ね備えていると言え、その代表的な例がセラミックコーティング材であろう。このようなものの工業上の使用例としては醸造用大形タンク、化学工業用耐酸機器、ジェットエンジンの燃焼管や高温用工業部品などがあり、将来、核融合炉真空第一壁にも使用しようとする計画もあり、高級家庭用品のほうろく品等も加わって、その使用例は少なくない。しかしながら、熱的、機械的な特性の異なる物質をはり合えることによって生ずる種々な問題を深く検討し、思わぬ事故につながらないようにしておく必要がある。

本研究はこの一環として板厚に比して十分に面積の大きな被覆平板の板厚方向に温度変化がある場合の同平板に生ずる熱応力について扱ったもので、まず、熱応力の大きさを知るための計算式を理論的に解析されている。また、理解を深めるべく、初歩的な段階として被覆平板の板厚方向に定常熱流束が存在する際に生ずる熱応力を例に数値計算を試み、結果の一部を図示することによって、熱的および機械的物性値の違いによる影響についても明らかにした。

主な記号

E : 縦弾性係数

$E^* : = \frac{1-\nu_i}{1-\nu_s} \cdot \frac{E_s}{E_i} \quad (i=1 \text{ または } 3)$

h : 被覆層または基板の厚さの $1/2$ (図 1 参照)

I : 断面二次モーメント $(= \frac{2}{3} h^3)$

$K : = \frac{1-\nu}{2Eh} \quad ((19) \text{ 式})$

M : 被覆層、基板材の相互に作用し合う単位幅当りの曲げモーメント

P : 被覆層ならびに基板材間で互に及ぼし合う単位幅あたりの内力

T : 温度

w : 板のたわみ量

x, y, z : 被覆平板上に設けた直角座標系で z は板厚方向 (図 2 参照)

$x_i, y_i, z_i \quad (i=1, 2, 3)$: 被覆層ならびに基板材各々に対して設けた直角座標系 (図 1 参照)

α : 線膨張係数

$\alpha^* : \text{線膨張係数比} \quad (= \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2})$

ϵ : ひずみ

θ : 無次元温度 $(= T/T_0)$

λ : 熱伝導率

$\lambda^* : \text{熱伝導率比} \quad (= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2})$

ν : ポアソン比

ρ : 板厚方向の無次元座標 $(= z/c)$

* 原稿受付 昭和 51 年 4 月 28 日

昭和 51 年春季学術講演 (昭和 51 年 5 月 14 日)

** 正会員 明治大学工学部 (川崎市多摩区生田 5158)

σ : 応力

添字

i ($i=1, 2, 3$) : 2は基板部, 1と3は被覆各層であることを意味

x, y : 直角座標系 x, y の各方向成分

$t h$: 物体内温度不均一によるもの

M : モーメント M によるもの

2. 理論解析

被覆板には全く外力が作用していないものとし, この状態下での同板内部に生ずるであろうところの応力は

i) 被覆層と基板材とが相互に自由な変形を拘束し合うために生ずるもの

ii) 被覆層, 基板材の各内部温度の不均一によるものの二つの原因に起因して生ずるものと考えられる。したがって, 基板材と被覆層とが接着していることによって結果的に図1に示すごとく各部分に対して相互に作用し合う力 P_i と曲げモーメント M_i が作用するものとするとき, 無接着の際の各部材での応力 σ_{xi} に接着されたことによってもさらされる P_i, M_i による応力を重ね合わせればよいゆえ, 同図座標系に関し被覆平板内の応力 σ_{xi} は次式で与えられる。

$$\sigma_{xi} = \sigma_{xi}^0 + \frac{P_i}{2h_i} + \frac{M_i z_i}{I_i} \quad (i=1, 2, 3) \quad (1)$$

ここで, I_i は断面二次モーメントでこの場合, 単位幅を考えているので, $I_i = \frac{2}{3} h_i^3$, また σ_{xi}^0 は E_i を縦弾性係数, α_i を線膨張係数, ν_i をポアソン比, T_i を温度分布を示すものとして文献1を参考にすれば, 同平板厚さに対して十分に広い板の厚さ方向にのみ温度変化があるとき次式によって与えられる。

$$\sigma_{xi}^0 = \frac{E_i \alpha_i}{1 - \nu_i} \left\{ \frac{1}{2h_i} \int_{-h_i}^{h_i} T_i dz_i + \frac{3z_i}{2h_i^3} \int_{-h_i}^{h_i} T_i z_i dz_i - T_i \right\} \quad (i=1, 2, 3) \quad (2)$$

したがって, 簡単のため $\phi_i = \frac{1}{2h_i} \int_{-h_i}^{h_i} T_i dz_i$, $\psi_i =$

$\frac{3z_i}{2h_i^3} \int_{-h_i}^{h_i} T_i z_i dz_i$ とおいて(1)式を書き改めれば

$$\sigma_{xi} = \frac{E_i \alpha_i}{1 - \nu_i} (\phi_i + \psi_i - T_i) + \frac{P_i}{2h_i} + \frac{3M_i z_i}{2h_i^3} \quad (3)$$

となる。

さて, 被覆平板には外力が作用していないことより $P_i,$

図1 座標系

M_i に関するつりあい条件は次式で与えられる。

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0 \quad (4)$$

$$M_1 + M_2 + M_3 - (h_1 + 2h_2 + h_3)P_1 - (h_2 + h_3)P_2 = 0 \quad (5)$$

一方, 応力とひずみとの関係 $\epsilon_{xi} = \frac{1}{E_i} \{ \sigma_{xi} - \nu_i (\sigma_{yi} + \sigma_{zi}) \} + \alpha_i T_i$ において, この場合 $\sigma_{xi} = \sigma_{yi}$, $\sigma_{zi} = 0$, $\epsilon_{xi} = \epsilon_{yi}$ なることを考慮すれば $\epsilon_{xi} = \frac{1 - \nu_i}{E_i} \sigma_{xi} + \alpha_i T_i$ となり同式の σ_{xi} に(3)式の σ_{xi} を代入すれば次式が得られる。

$$\epsilon_{xi} = \alpha_i (\phi_i + \psi_i) + (1 - \nu_i) \left\{ \frac{P_i}{2E_i h_i} + \frac{3M_i z_i}{2h_i^3 E_i} \right\} \quad (6)$$

ここで試みに $i=1$ とおき, かつ, $z_1 = -h_1$ とおけば, この場合の ϵ_{x1} は被覆層1の基板材との接着面における x 方向のひずみとなり $\phi'_1 = \frac{3}{2h_1^2} \int_{-h_1}^{h_1} T_1 z_1 dz_1$ として, これを $\epsilon_{x1}|_{z_1=-h_1}$ で表わせば

$$\epsilon_{x1}|_{z_1=-h_1} = \alpha_1 (\phi_1 - \phi'_1) + (1 - \nu_1) \left\{ \frac{P_1}{2E_1 h_1} - \frac{3M_1}{2h_1^3 E_1} \right\} \quad (7)$$

となる。また, 基板材の被覆層1との接着面における x 方向のひずみ $\epsilon_{x2}|_{z_2=h_2}$ は同様にして次式で与えられる。

$$\epsilon_{x2}|_{z_2=h_2} = \alpha_2 (\phi_2 + \phi'_2) + (1 - \nu_2) \left\{ \frac{P_2}{2E_2 h_2} + \frac{3M_2}{2h_2^3 E_2} \right\} \quad (8)$$

ここで, $\phi'_2 = \frac{3}{2h_2^2} \int_{-h_2}^{h_2} T_2 z_2 dz_2$ であり, この場合, これらの間は完全に接着されていることを考慮すれば, $\epsilon_{x1}|_{z_1=-h_1} = \epsilon_{x2}|_{z_2=h_2}$ であり(7), (8)の両式より x 方向のひずみの連続条件として

$$\alpha_1 (\phi_1 - \phi'_1) + (1 - \nu_1) \left\{ \frac{P_1}{2E_1 h_1} - \frac{3M_1}{2h_1^3 E_1} \right\} = \alpha_2 (\phi_2 + \phi'_2) + (1 - \nu_2) \left\{ \frac{P_2}{2E_2 h_2} + \frac{3M_2}{2h_2^3 E_2} \right\} \quad (9)$$

が得られる。以下, 同様にして基板材と被覆層3に関する接着面の x 方向のひずみが等しいとする条件式は $\phi'_3 =$

$$\frac{3}{2h_3^2} \int_{-h_3}^{h_3} T_3 z_3 dz_3 \text{ として}$$

$$\alpha_2 (\phi_2 - \phi'_2) + (1 - \nu_2) \left\{ \frac{P_2}{2E_2 h_2} - \frac{3M_2}{2h_2^3 E_2} \right\} = \alpha_3 (\phi_3 + \phi'_3) + (1 - \nu_3) \left\{ \frac{P_3}{2E_3 h_3} + \frac{3M_3}{2h_3^3 E_3} \right\} \quad (10)$$

となる。

次に, 接着面における被覆平板の板厚方向の変位量が等しい条件式を求める。

いま, 同方向の板のたわみ量 w は同平板内温度不均一によって生ずるたわみ w_{th} と曲げモーメント M_i によるたわみ w_M との和であると考えられる。

さて, 文献(2)によれば板厚 t の板の板周辺に M' なる

曲げモーメントが作用するさいの板のたわみ量 w' は次式

$$M' = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right) \quad (11)$$

で与えられているので、この結果を参考にすれば、被覆平板の被覆層1に作用する曲げモーメント M_1 とこれによ

る同層のたわみ量 w_{M1} との間には、この場合、 $\frac{\partial^2 w_{M1}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_{M1}}{\partial y^2}$ を配慮することにより、次の関係式

$$M_1 = -\frac{E_1(2h_1)^3}{12(1-\nu_1)} \cdot \frac{\partial^2 w_{M1}}{\partial x^2} \quad (12)$$

が得られる。また、基板材のたわみ量 w_{M2} と同材に作用している曲げモーメント M_2 との関係は同様に

$$M_2 = -\frac{E_2(2h_2)^3}{12(1-\nu_2)} \cdot \frac{\partial^2 w_{M2}}{\partial x^2} \quad (13)$$

となる。

一方、平板内板厚方向 z に不均一な温度分布が存在するさいの同板のたわみ量を w'_{th} とおくと、文献(3)に

によれば $M'_{th} = \alpha E \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} T z dz$, $\Delta = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ として

$$\frac{\partial^2 w'_{th}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'_{th}}{\partial y^2} = -\frac{M_{th}}{\Delta(1-\nu)}$$

なる関係式が与えられている。ゆえに、このことにより被覆層1ならびに基板材に関するこれについての関係は $\frac{\partial^2 w_{th1}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_{th1}}{\partial y^2}$ を考慮することにより各々次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_{th1}}{\partial x^2} &= -\frac{1}{1-\nu_1^2} \cdot \frac{12(1-\nu_1^2)}{E_1(2h_1)^3} \alpha_1 E_1 \int_{-h_1}^{h_1} T_1 z_1 dz_1 \\ &= -\frac{\alpha_1}{h_1} \phi'_1 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 w_{th2}}{\partial x^2} = -\frac{\alpha_2}{h_2} \phi'_2 \quad (15)$$

ここで被覆層1の見かけ上のたわみ量 w_1 は

$$w_1 = w_{th1} + w_{M1} \quad \therefore \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_{th1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{M1}}{\partial x^2}$$

また、基板材のそれは w_2 として

$$w_2 = w_{th2} + w_{M2} \quad \therefore \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_{th2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{M2}}{\partial x^2}$$

となり、この場合、被覆層1と基板材とは完全に接着されていることから

$$w_1 = w_2$$

すなわち、 $\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}$ なることから前記の関係より

$$\frac{\partial^2 w_{th1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{M1}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_{th2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{M2}}{\partial x^2}$$

となる。これに(12)~(15)の各式の関係を代入すれば

$$\frac{\alpha_1}{h_1} \phi'_1 + \frac{3(1-\nu_1)M_1}{2h_1^3 E_1} = \frac{\alpha_2}{h_2} \phi'_2 + \frac{3(1-\nu_2)M_2}{2h_2^3 E_2} \quad (16)$$

となる。

同様にして基板材と被覆層3との接着面における被覆平板の厚さ方向に関するたわみ量が等しい条件式は

$$\frac{\alpha_2}{h_2} \phi'_2 + \frac{3(1-\nu_2)M_2}{2h_2^3 E_2} = \frac{\alpha_3}{h_3} \phi'_3 + \frac{3(1-\nu_3)M_3}{2h_3^3 E_3} \quad (17)$$

となる。

これで(4),(5),(9),(10),(16)それに(17)の六つの関係式が得られたので、 P_i , M_i の六つの未知量はこれらの式を連立させて解くことによって求まり、その結果を(3)式に代入することによって被覆平板の熱応力を解析的に知ることができる。以下、曲げ拘束された場合と、無拘束の場合とを場合分けして記述する。

(1) 曲げ拘束された場合 曲げが拘束される場合には板は曲らず、そのために板のたわみ量 w_i は零となる。その結果、(16),(17)式を零とおくことができるので、これより M_i が容易に求まり

$$M_i = -\frac{\alpha_i h_i}{3K_i} \phi'_i \quad (18)$$

を得る。ここで K_i は

$$K_i = \frac{1-\nu_i}{2E_i h_i} \quad (19)$$

であり、 M_i の値を(5),(9)それに(10)式に代入 P_i を求めれば

$$\phi_i = \frac{\alpha_i}{2h_i} \int_{-h_i}^{h_i} T_i dz_i \quad (20)$$

として

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{K_2 \phi_3 - K_3 \phi_1 - K_3 \phi_1 + K_3 \phi_2}{K_1 K_2 + K_1 K_3 + K_2 K_3} \\ P_2 &= \frac{K_1 \phi_3 + K_3 \phi_1 - K_1 \phi_2 - K_3 \phi_2}{K_1 K_2 + K_1 K_3 + K_2 K_3} \\ P_3 &= \frac{K_2 \phi_1 + K_1 \phi_2 - K_2 \phi_3 - K_1 \phi_3}{K_1 K_2 + K_1 K_3 + K_2 K_3} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

となる。ここで(18),(21)式で求めた M_i , P_i を(3)式に代入、図2のような座標系を置換、無次元化表示して

$$\rho = z/c, \quad \rho_1 = a/c, \quad \rho_2 = b/c \quad (22)$$

また、 T_0 は代表温度を表わすものとして $\theta_i = T_i/T_0$ で表わし整理すれば次の結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{(1-\nu_1)\alpha_{z1}}{E_1 \alpha_1 T_0} &= \frac{\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \bar{\phi}_3 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{K_3}{K_2} \bar{\phi}_2 + \frac{K_3}{K_1} \bar{\phi}_1}{1 + \frac{K_3}{K_2} + \frac{K_3}{K_1}} - \theta_1 \\ &\quad (0 \leq \rho \leq \rho_1) \\ \frac{(1-\nu_2)\alpha_{z2}}{E_2 \alpha_2 T_0} &= \frac{\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \frac{K_1}{K_3} \bar{\phi}_3 + \frac{K_1}{K_2} \bar{\phi}_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \bar{\phi}_1}{\frac{K_1}{K_3} + \frac{K_1}{K_2} + 1} - \theta_2 \\ &\quad (\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

図2 置換座標系

$$\frac{(1-\nu_3)\sigma_{z3}}{E_3\alpha_3T_0} = \frac{\frac{K_2}{K_3}\bar{\phi}_3 + \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\bar{\phi}_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3}\cdot\frac{K_2}{K_1}\bar{\phi}_1}{\frac{K_2}{K_3} + 1 + \frac{K_2}{K_1}} - \theta_3 \quad (\rho_2 \leq \rho \leq 1)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi}_1 &= \frac{1}{\rho_1} \int_0^{\rho_1} \theta_1 d\rho, \quad \bar{\phi}_2 = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \theta_2 d\rho \\ \bar{\phi}_3 &= \frac{1}{1 - \rho_2} \int_{\rho_2}^1 \theta_3 d\rho \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

また

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_2}{K_1} &= \frac{1-\nu_2}{1-\nu_1} \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \\ \frac{K_3}{K_2} &= \frac{1-\nu_3}{1-\nu_2} \cdot \frac{E_2}{E_3} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{1-\rho_2} \\ \frac{K_1}{K_3} &= \frac{1-\nu_1}{1-\nu_3} \cdot \frac{E_3}{E_1} \cdot \frac{1-\rho_2}{\rho_1} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

である。

(ii) 無拘束の場合 まず、(9)式、(10)式の辺々には $\frac{2E_2h_2^3}{1-\nu_2}$ を乗じ、(16)式および(17)式の辺々には

$\frac{2E_2h_2^3}{3(1-\nu_2)}$ を乗じて変形、(4)、(5)式と共にこれらの式を示せば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 &= 0 \\ M_1 + M_2 + M_3 - (h_1 + 2h_2 + h_3)P_1 \\ &\quad - (h_2 + h_3)P_2 = 0 \\ A_1\{h_1^2P_1 - 3h_1M_1\} - \{h_2^2P_2 + 3h_2M_2\} \\ &= \frac{8E_2h_2^3}{1-\nu_2}\alpha_2T_0\Gamma_1 \\ A_2\{h_3^2P_3 + 3h_3M_3\} - \{h_2^2P_2 - 3h_2M_2\} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$= \frac{8E_2h_2^3}{1-\nu_2}\alpha_2T_0\Gamma_2$$

$$A_1M_1 - M_2 = \frac{2E_2h_2^3\alpha_2T_0}{3(h_1+h_2+h_3)(1-\nu_2)}A_1$$

$$A_2M_3 - M_2 = \frac{2E_2h_2^3\alpha_2T_0}{3(h_1+h_2+h_3)(1-\nu_1)}A_2$$

ここで Γ_1 , Γ_2 , A_1 , A_2 , D_1 それに D_2 は各々

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{4T_0} \{ \phi_2 + \phi'_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(\phi_1 - \phi'_1) \} \\ \Gamma_2 &= \frac{1}{4T_0} \{ \phi_2 - \phi'_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}(\phi_3 + \phi'_3) \} \\ A_1 &= \frac{h_1 + h_2 + h_3}{T_0} \left(\frac{1}{h_2}\phi'_2 - \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\phi'_1 \right) \\ A_2 &= \frac{h_1 + h_2 + h_3}{T_0} \left(\frac{1}{h_2}\phi'_2 - \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\phi'_3 \right) \\ D_1 &= \frac{1-\nu_1}{1-\nu_2} \cdot \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{h_2^3}{h_1^3} \\ D_2 &= \frac{1-\nu_3}{1-\nu_2} \cdot \frac{E_2}{E_3} \cdot \frac{h_2^3}{h_3^3} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

であり、更に図2で示するような座標系に(26)、(27)の両式を書き改め、かつ P_i , M_i に関する(26)式の連立方程式をとけば

$$\left. \begin{aligned} \Xi_1 &= \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} + \frac{3\rho_2(1-\rho_1)}{(\rho_2-\rho_1)^2} + 1 \\ \Xi_2 &= \frac{3}{2}(1-\rho_1+\rho_2) + \frac{3}{2}\rho_2\left(\frac{1-\rho_2}{\rho_2-\rho_1}\right)^2 D_2 \\ \Pi_1 &= \frac{1}{2}(1-\rho_1+\rho_2) + \frac{\rho_1^2(1-\rho_1)}{2(\rho_2-\rho_1)^2} D_1 \\ \Pi_2 &= \frac{(1-\rho_2)^2}{4} D_2 + \frac{\rho_1^2}{4} \left\{ \left(\frac{1-\rho_2}{\rho_2-\rho_1}\right)^2 D_2 + 1 \right\} D_1 \\ \Sigma_1 &= \frac{A_1}{6D_1} + \frac{A_2}{6D_2} + \frac{2(1-\rho_1)}{(\rho_2-\rho_1)^2} \left(\Gamma_1 + \frac{\rho_1}{4} A_1 \right) \\ \Sigma_2 &= \Gamma_2 - \frac{1-\rho_2}{4} A_2 \\ &\quad - \left\{ \left(\frac{1-\rho_2}{\rho_2-\rho_1}\right)^2 D_2 + 1 \right\} \left(\Gamma_1 + \frac{\rho_1}{4} A_1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

として

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{E_2\alpha_2T_0}{1-\nu_2}(\rho_2-\rho_1)^3 c \bar{P}_1 \\ P_2 &= \frac{E_2\alpha_2T_0}{1-\nu_2}(\rho_2-\rho_1)^3 c \bar{P}_2 \\ P_3 &= \frac{E_2\alpha_2T_0}{1-\nu_2}(\rho_2-\rho_1)^3 c \bar{P}_3 \\ M_1 &= \frac{E_2\alpha_2T_0}{1-\nu_2}(\rho_2-\rho_1)^3 c^2 \bar{M}_1 \\ M_2 &= \frac{E_2\alpha_2T_0}{1-\nu_2}(\rho_2-\rho_1)^3 c^2 \bar{M}_2 \\ M_3 &= \frac{E_2\alpha_2T_0}{1-\nu_2}(\rho_2-\rho_1)^3 c^2 \bar{M}_3 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

なる結果を得る。

ここで $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ は

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_1 &= -\frac{\Sigma_1 \Sigma_2 + \Sigma_2 \Sigma_1}{\Sigma_1 \Pi_2 - \Sigma_2 \Pi_1} \\ \bar{P}_2 &= \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \{ 6\rho_1 \cdot \frac{\Sigma_1 \Pi_2 + \Sigma_2 \Pi_1}{\Sigma_1 \Pi_2 - \Sigma_2 \Pi_1} \\ &\quad - \rho_1^2 A_1 \cdot \frac{\Sigma_1 \Sigma_2 + \Sigma_2 \Sigma_1}{\Sigma_1 \Pi_2 - \Sigma_2 \Pi_1} - 4(\Gamma_1 + \frac{\rho_1}{4} A_1) \} \\ \bar{P}_3 &= -\bar{P}_1 - \bar{P}_2 \\ \bar{M}_1 &= \frac{1}{A_1} \{ \frac{A_1}{6} + \frac{\Sigma_1 \Pi_2 + \Sigma_2 \Pi_1}{\Sigma_1 \Pi_2 - \Sigma_2 \Pi_1} \} \\ \bar{M}_2 &= -\frac{\Sigma_1 \Pi_2 + \Sigma_2 \Pi_1}{\Sigma_1 \Pi_2 - \Sigma_2 \Pi_1} \\ \bar{M}_3 &= \frac{1}{A_2} \{ \frac{A_2}{6} + \frac{\Sigma_1 \Pi_2 + \Sigma_2 \Pi_1}{\Sigma_1 \Pi_2 - \Sigma_2 \Pi_1} \} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

であり、とくに、(27)の各式の右辺を無次元形に書き改めれば

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi}'_1 &= -\frac{6}{\rho_1^2} \int_0^{\rho_1} \theta_1 (\rho - \frac{\rho_1}{2}) d\rho \\ \bar{\phi}'_2 &= -\frac{6}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \theta_2 (\rho - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}) d\rho \\ \bar{\phi}'_3 &= -\frac{6}{(1 - \rho_2)^2} \int_{\rho_2}^1 \theta_3 (\rho - \frac{1 + \rho_2}{2}) d\rho \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

として

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{4} \{ \bar{\phi}_2 + \bar{\phi}'_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}'_1) \} \\ \Gamma_2 &= \frac{1}{4} \{ \bar{\phi}_2 - \bar{\phi}'_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} (\bar{\phi}_3 + \bar{\phi}'_3) \} \\ A_1 &= \frac{\bar{\phi}'_2}{\rho_2 - \rho_1} - \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \bar{\phi}'_1 \\ A_2 &= \frac{\bar{\phi}'_2}{\rho_2 - \rho_1} - \frac{1}{1 - \rho_2} \cdot \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \bar{\phi}'_3 \\ A_1 &= \frac{1 - \nu_1}{1 - \nu_2} \cdot \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \right)^3 \\ A_2 &= \frac{1 - \nu_3}{1 - \nu_2} \cdot \frac{E_2}{E_3} \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{1 - \rho_2} \right)^3 \end{aligned} \right\} \quad (27)'$$

となる。

一方、(3)式を変形すれば

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \nu_i) \sigma_{xi}}{E_i \alpha_i T_0} &= \frac{1}{T_0} \{ \phi_i + \psi_i - T_i \} \\ &\quad + \frac{1 - \nu_i}{E_i \alpha_i T_0} \cdot \frac{P_i}{2 h_i} + \frac{1 - \nu_i}{E_i \alpha_i T_0} \cdot \frac{3 z_i}{2 h_i^3} M_i \end{aligned} \quad (3)'$$

であり、ここで

$$\phi_i = T_0 \bar{\phi}_i, \quad \psi_i = \frac{z_i}{h_i} T_0 \bar{\phi}'_i, \quad T_i = T_0 \theta_i$$

なる関係、並びに P_i, M_i に関しては(29)式の関係、すなわち

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{E_2 \alpha_2 T_0}{1 - \nu_2} (\rho_2 - \rho_1)^3 c \bar{P}_i \\ M_i &= \frac{E_2 \alpha_2 T_0}{1 - \nu_2} (\rho_2 - \rho_1)^3 c^2 \bar{M}_i \end{aligned}$$

を上式に代入、更に変形すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \nu_i) \sigma_{xi}}{E_i \alpha_i T_0} &= \bar{\phi}_i + \frac{z_i}{h_i} \bar{\phi}'_i - \theta_i \\ &\quad + \frac{1 - \nu_i}{1 - \nu_2} \cdot \frac{E_2}{E_i} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_i} \cdot \frac{(\rho_2 - \rho_1)^3 c}{2 h_i} \bar{P}_i \\ &\quad + \frac{1 - \nu_i}{1 - \nu_2} \cdot \frac{E_2}{E_i} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_i} \cdot \frac{3 z_i (\rho_2 - \rho_1)^3 c^2}{2 h_i^3} \bar{M}_i \end{aligned} \quad (3)''$$

したがって、図2で示す座標系に座標を変換し(22)式による無次元化を z_i, h_i について行えば

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{2} &= \frac{1}{2} c \cdot \frac{a}{c} = \frac{c}{2} \rho_1 \quad (i=1) \\ h_i &= \begin{cases} \frac{b-a}{2} = \frac{c}{2} (\rho_2 - \rho_1) & (i=2) \\ \frac{c-b}{2} = \frac{c}{2} (1 - \rho_2) & (i=3) \end{cases} \\ \frac{z_i}{h_i} &= \begin{cases} \frac{\frac{a}{2} - z}{\frac{a}{2}} = -\frac{2}{\rho_1} (\rho - \frac{\rho_1}{2}) & (i=1) \\ \frac{(b+a) - 2z}{b-a} = -\frac{2}{\rho_2 - \rho_1} (\rho - \frac{\rho_2 + \rho_1}{2}) & (i=2) \\ \frac{c+b-2z}{c-b} = -\frac{2}{1 - \rho_2} (\rho - \frac{1 + \rho_2}{2}) & (i=3) \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

なることより、最終的な結果として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{(1 - \nu_1) \sigma_{x1}}{E_1 \alpha_1 T_0} &= \bar{\phi}_1 - \frac{2}{\rho_1} (\rho - \frac{\rho_1}{2}) \bar{\phi}'_1 - \theta_1 + A_1 \rho_1^2 \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \bar{P}_1 \\ &\quad - 12 A_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (\rho - \frac{\rho_1}{2}) \bar{M}_1 \quad (0 \leq \rho \leq \rho_1) \\ \frac{(1 - \nu_2) \sigma_{x2}}{E_2 \alpha_2 T_0} &= \bar{\phi}_2 - \frac{2}{\rho_2 - \rho_1} (\rho - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}) \bar{\phi}'_2 - \theta_2 \\ &\quad + (\rho_2 - \rho_1)^2 \bar{P}_2 - 12 (\rho - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}) \bar{M}_2 \\ &\quad (\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2) \\ \frac{(1 - \nu_3) \sigma_{x3}}{E_3 \alpha_3 T_0} &= \bar{\phi}_3 - \frac{2}{1 - \rho_2} (\rho - \frac{1 + \rho_2}{2}) \bar{\phi}'_3 - \theta_3 \\ &\quad + A_2 (1 - \rho_2)^2 \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \bar{P}_3 \\ &\quad - 12 A_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_3} (\rho - \frac{1 + \rho_2}{2}) \bar{M}_3 \quad (\rho_2 \leq \rho \leq 1) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ここで $\bar{\phi}_i$ については(24)式、 $\bar{\phi}'_i$ については(31)式、 A_1, A_2 については(27)'式、また、 $\bar{P}_i, \bar{M}_i$ については(27)', (28)の両式を利用することにより(30)式すでに与えられているので無次元温度 θ_i が決まれば、これらより容易に熱応力の大きさを計算することができる。

3. 数値計算ならびにその結果に対する考察

被覆平板に生ずる熱応力は基板の厚さに対する被覆層の厚さの割合、いわゆる幾何学的な影響ならびにそれら各物質のもつ物性値の違いの程度によってどのように大

図3 系内温度分布例
(板厚方向に一様熱流束がある場合)

きさが変化し、かつ、その変化の仕方はどのようになるかを概略的にでもは握するため数値計算を試みた。

さて、この作業を試みるに先立ち、まず、無次元温度 θ_i を求める必要があり、ここでは初歩的段階であることもあって被覆平板の板厚方向に定常熱流束 q が存在する系について取扱った。いま図3で示すように $z=0$ ($\rho=0$) における温度を T_0 、 $z=c$ ($\rho=1$) における温度を基準温度として零に定め、二つの接着面での温度ギャップはなく、かつ、熱流束は連続する条件の下に系内温度分布を求めれば次の結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_1}{T_0} = \theta_1 &= \frac{\lambda_3^*}{D} \rho + 1 & (0 \leq \rho \leq \rho_1) \\ \frac{T_2}{T_0} = \theta_2 &= \frac{\lambda_1^*}{D} \{ \lambda_3^* \rho + (1 - \lambda_3^*) \rho_2 - 1 \} & (\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2) \\ \frac{T_3}{T_0} = \theta_3 &= \frac{\lambda_1^*}{D} (\rho - 1) & (\rho_2 \leq \rho \leq 1) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ここで、 λ_1^* 、 λ_3^* は被覆層および基板の熱伝導率を λ_i ($i=1, 2, 3$) として $\lambda_1^* = \lambda_1 / \lambda_2$ 、 $\lambda_3^* = \lambda_3 / \lambda_2$ また D は $D = \lambda_1^* \lambda_3^* (\rho_1 - \rho_2) + \lambda_1^* (\rho_2 - 1) - \lambda_3^* \rho_1$ である。

ところで、ここでの数値計算においては被覆層1と被覆層3とは同種の材質であるものと仮定したことにより

$$\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2} \cdot \frac{E_2}{E_1} = \frac{1-\nu_3}{1-\nu_2} \cdot \frac{E_2}{E_3} \quad (=E^*)$$

となり、これを E^* とおくと、曲げ拘束の場合(25)式は

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{E^* \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}, \quad \frac{K_3}{K_2} = E^* \frac{\rho_2 - \rho_1}{1 - \rho_2}, \quad \frac{K_1}{K_3} = E^* \frac{1 - \rho_2}{\rho_1}$$

無拘束の場合の(27)'式の A_1 、 A_2 は

$$A_1 = E^* \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho} \right)^3, \quad A_2 = E^* \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{1 - \rho_2} \right)^3$$

となる。また

$$\lambda_1^* = \lambda_3^* \quad (= \lambda^*)$$

更に曲げ拘束の場合は(23)式、無拘束の場合には(27)', (32)の両式における線膨張係数比は

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \quad (= \alpha^*)$$

となり、これを α^* とおくことにする。

図4~10は数値計算結果の一部を代表例として掲げたもので、これらの各図でみられるパラメータの値の変化による動向は固定したパラメータ値が他の値であっても見られる一般的な傾向である。さて、この場合、図4~7の各図は曲げ拘束された場合、残り3枚の図は無拘束の場合、図11, 12の両図は具体的な材料を想定して、その材料の物性値をもとに E^* 、 λ^* 、 α^* の値を求めて計算した結果を示したもので図11は曲げ拘束された場合、図12は無拘束の場合である。これらの図の縦軸の値、

すなわち $\frac{(1-\nu_i)\sigma_{xi}}{E_i \alpha_i T_0}$ ($i=1, 2, 3$) の値が正符号の場合

は引張り、負符号は圧縮応力であることを意味する。なお、図11, 12の両図で使用した E^* 、 λ^* 、 α^* の値は表で示されている。

図4は α^* 、 λ^* の値を固定し E^* の値の変化による影響をみたもので、同図から明らかなように E^* の値を増大させると応力分布はグラフ上、上方へ平行移動することがわかる。もちろん、この傾向は α^* 、 λ^* の値が他の値であっても見られる傾向であって、 E^* の値が1付近になると平行移動量の度合が非常に小さくなる。このことは同図からもある程度、推測できよう。

図4 E^* の変化による熱応力分布の動向(曲げ拘束)

図5 λ^* の変化による熱応力分布の動向(曲げ拘束)

図6 ρ_1, ρ_2 の変化による熱応力分布の動向(曲げ拘束)

図5は α^*, E^* の値を固定して λ^* の値が変化するときの動向をみたもので、この場合は、被覆平板内の温度分布の形が変わるのみであるので理論的にもある程度、予想できることながら λ^* の値を増大させると基板内応力分布は狭しく、被覆層内のそれはゆるやかになる。なお、基板両面の被覆層の厚さが同一の場合、 $\rho=0, 0.5$ それに1になるところが基板、被覆層各々における応力分布曲線の見かけ上の回転中心点になっていることがわかり、これらの点の縦軸上の位置は $\alpha^*, E^*, \rho_1, \rho_2$ などの値によって影響される。

図6は材料の物性値を固定して幾何学的な影響について示した図であるが応力的なつり合いもさることながら、系内の温度分布にも直接、影響を及ぼすので結果的には、結論的なことが言い難く、より多くの検討を要するものと考えている。

図7は α^* 値の変化による影響を示したもので、この値を増大させると基板内応力分布はグラフ上、上方へ平行移動し、被覆材内のそれは下方へ平行移動する。そして、 α^* の値が1になると基板内の熱応力値と被覆材内のそれとは $\rho=\rho_1$ および ρ_2 において一致し、 α^* の値が1より大きい値のときでもこの動きは変わらない。従って、誘起熱応力値を小さくするためには α^* の値を1に近づけることが必要で大きいにしろ、小さいにしろこの値から離れるに伴って、熱応力による被覆材の破壊の危険性が飛躍的に増すことが同図からも理解できる。

図8は図4と対比させる意味で示したもので幾何学的条件ならびに物性値に対する条件は両者は同じである。この場合、図4でみられた E^* の値の変化による同じような応力分布の動きは認められるが平行移動の性質は失われ、かつこの場合、熱応力値に関しても全般的に絶対値が小さくなって曲げ拘束の場合よりも安全側に動いている。

図9は図5に対応するもので、 ρ に関する応力分布曲線の見かけ上の回転中心点は基板内に関する限り保持されているが、被覆層内のそれはもはやその限りではない。なお、この場合も熱応力の絶対値は全般的に曲げ拘束の場合に比して小さくなっている。

次に α^* の値の変化による影響をみたものが図10であって、これは図7に対応するものである。これら二つの図を比べて見ると次のようなことが察せられる。

(i) α^* の値が0.5程度になると無拘束の場合の応力分布の形は曲げ拘束された場合と直線のこう配の差こそあれ、ほぼ同じような分布傾向をもち、応力の絶対値も全般に小さくなり、応力分布直線のこう配も小さくなっている。

(ii) α^* の値が0.4程度以下では被覆層内の応力分布直線のこう配が曲げ拘束された場合のそれと全く逆になり、 α^* の値が小さくなるに従ってそのこう配の大きさも増大して、この場合に限っては、これまでに見られた「無拘束の場合の方が曲げ拘束の場合に比して誘起熱応力は全

図7 α^* の変化による熱応力分布の動向(曲げ拘束)

図8 E^* の変化による熱応力分布の動向(無拘束)

般的に小さくなる」と言うことは言えない。たとえば、 $\alpha^* = 0.1$ の場合の被覆層での $\rho = 0.85$ における縦軸の値は3程度にも達しており図7ではこのような大きな値は見当らない。

このように関係するパラメータが多く、これらが熱応力分布に複雑な影響を及ぼしていることから、結論的なことが言い難いが、ここで前述のごとく、具体的な材料

図9 λ^* の変化による熱応力分布の動向(無拘束)

図10 α^* の変化による熱応力分布の動向(無拘束)

を想定して計算した結果を示した図が図11, 12である。この2枚の図が示す応力分布の様子は両者かなり異なっており、さきにも述べたように、無拘束の場合でも条件次第では曲げ拘束された場合に比して必ずしも誘起熱応力そのものが全般的に安全側に移行することがないことがこれらの図からも読みとれ、この点、単なる平板の場合と異なる点であろう。

NO	基 材	被覆材	α^*	λ^*	E^*
1	低炭素鋼	Al ₂ O ₃	$\frac{7.3}{11.7} = 0.6$	$\frac{16.5}{45} = 0.4$	$\frac{0.68}{0.7} \cdot \frac{21}{36.7} = 0.6$
2		MgO	$\frac{12.7}{11.7} \div 1.0$	$\frac{34}{45} = 0.8$	$\frac{0.7}{0.7} \cdot \frac{21}{8.7} = 2.4$
3		ZrO ₂	$\frac{8.3}{11.7} = 0.7$	$\frac{0.99}{45} = 0.02$	$\frac{0.7}{0.7} \cdot \frac{21}{13.4} = 1.6$
4	Cr-Mo鋼	Al ₂ O ₃	$\frac{7.3}{13.5} = 0.5$	$\frac{16.5}{40} = 0.4$	$\frac{0.68}{0.7} \cdot \frac{21}{36.7} = 0.6$
5		MgO	$\frac{12.7}{13.5} = 0.9$	$\frac{34}{40} = 0.9$	$\frac{0.7}{0.7} \cdot \frac{21}{8.7} = 2.4$
6		ZrO ₂	$\frac{8.7}{13.5} = 0.6$	$\frac{0.99}{40} = 0.03$	$\frac{0.7}{0.7} \cdot \frac{21}{13.4} = 1.6$

図 11 セラミック被覆板の熱応力分布例
(曲げ拘束)

4. 結 言

本報では被覆平板における熱応力を理論的に解析し、同問題における誘起熱応力の挙動を明らかにするために関係するパラメータを個々に変化させながらいくつかの例について数値計算を試みた。計算結果の若干例は図示

図 12 セラミック被覆板の熱応力分布例
(無拘束)

した通りであるが、この場合、関係するパラメータがかなり多いことから結論的なことが言い難く、ここでは定常熱応力についての数値計算に限ったこともあって、結果的には問題に直面した場合にそのつど数値計算を試みられ、誘起熱応力の大きさ等については握されることを希望するものである。なお、非定常熱応力については(33)式の l_i のみが異なるだけで以後の熱応力計算の仕方にはなんら変わりがないが、もし、機会があれば別のときに扱ってみたいと考えている。

最後に本解析に際し、東芝(電気機械研究所)の武井明朗氏にお手数をわずらわしたことを記し、感謝の意を表わしたい。

文 献

- 1) Timoshenko, S. and Goodier, J. N., Theory of Elasticity, (1951), 399, McGraw-Hill.
- 2) 同上, 頁 255
- 3) Boley and Weiner, Theory of Thermal Stress, (1960), 401, John Wiley & Sons, Inc.
- 4) 武井明朗, 日本機械学会論文集, 39 巻 320 号(昭和48-4)1138