最適交換方式の決定手順と交換コスト によるその評価*

堀 籠 教 夫**

A Procedure to Choose the Optimum Unit Replacement Method
and the Evaluation by Replacement Cost

By Michio Horigome

In the former paper, based on the Weibull model, we investigated the relationship between the optimal replacement interval, its corresponding replacement cost per unit time and the cost ratio of replacement through the variation of the shape parameter.

The object of this note is to provide the procedure for calculating the minimum cost per unit time and the optimal interval of each replacement policy by using the results already obtained in the former paper.

The numerical examples are illustrated by utilizing the field data in order to show the usefulness of the calculation method given in this note.

1. ま え が き

前報¹⁾において部品の寿命分布をワイブル分布で近似した場合の交換方式の関係を、形状パラメータ及び交換コスト比から理論的に検討した。しかし、保全現場における部品交換に関する具体例については、十分に検討したとはいえなかった。したがって、本資料では最適交換方式の決定、交換コストの計算法を与えるが、とくに、実例を用いて、具体的に計算法を示し、提案した方法が有効であることを示す。

2. 部品交換の概要

ここでR.Barlow²⁾らによって提案された交換方式、すなわち、故障交換、個別交換、一斉交換とそれらにワイブル分布をあてはめた場合の結果についてまとめておく。

なお、本文で用いる記号は以下のようである。

記 号

F	故障交換における単位時間当りの交換コスト
$A(x_a)$	個別交換における交換間隔 x_a の場合の単位時間当りの交換コスト
$B(x_b)$	一斉交換における交換間隔 x_b の場合の単位時間当りの交換コスト
t_a	x_a/η , 個別交換における正規化された時間
t_b	x_b/η , 一斉交換における正規化された時間

C_1	故障交換における平均交換コスト
C_2	定期交換における平均交換コスト
C_3	一斉交換における平均交換コスト
p	$C_2/C_1 < 1$, 個別交換におけるコスト比
q	$C_3/C_1 < 1$, 一斉交換におけるコスト比
$F(\cdot)$	故障分布関数
$f(\cdot)$	故障確率密度関数
$R(\cdot)$	信頼度関数
$\lambda(\cdot)$	故障率
$M(\cdot)$	再生関数
$m(\cdot)$	$dM(t)/dt$, 再生密度関数
β	ワイブル分布の形状パラメータ, $\beta > 1$
η	ワイブル分布の尺度パラメータ
$\Gamma(\cdot)$	ガンマ関数
μ	ワイブル分布の平均値, あるいは部品のMTBF

各交換方式における理論計算式は、表1にまとめて示す。なお、表中*のついたものは、最適値を表わす。また、ワイブル分布の関係式は表2で与える。また、表1の各交換方式に表2の関係式をあてはめた場合については文献1)を参照されたい。表3は、個別交換における最適交換間隔 t_a^* とコスト比 p の計算結果を示す。また、表4は一斉交換における最適交換時間 t_b^* とコスト比 q の計算結果を示す。なお、表3, 4で正規化された時間 t が0.1から1.0まで与えてあるが、 $t=1.0$ は表2の第2式を用いれば、実時間は約MTBFに相当するから、これらの数表は部品のMTBFまでの p と q とが与えられていることになる。このように、表3, 4で $t=1.0$ まで与

* 原稿受付 昭和57年8月24日

昭和57年春季学術講演(昭和57年5月26日)

** 正会員 東京商船大学(東京都江東区越中島2-1-6)

表1 各交換方式における交換コスト、交換間隔の計算式¹⁾

交換方式	単位時間当りの交換コスト	最適交換間隔
故障交換	$F=C_1/\mu$	
個別交換	$A^*(x_a^*)=(C_1-C_2)\lambda(x_a^*)$	$\lambda(x_a^*)\int_0^{x_a^*}R(u)du$ $-F(x_a^*)=C_2/(C_1-C_2)$
一斉交換	$B^*(x_b^*)=C_1m(x_b^*)$	$x_b^*m(x_b^*)-M(x_b^*)$ $=C_3/C_1$

表2 ワイブル分布の関係式¹⁾

分 布	$R(x)=\exp\{-(x/\eta)^\beta\}$
平 均	$\mu=\eta\Gamma(1/\beta+1)$
変換式	$t=x/\eta=x\Gamma(1/\beta+1)/\mu$

表3 個別交換における β と t_a^* の変化による p の数値

β t_a^*	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
.10	.0123	.0155	.0148	.0125	.0099	.0075	.0055	.0040	.0028	.0020
.15	.0197	.0269	.0278	.0255	.0219	.0181	.0145	.0114	.0088	.0067
.20	.0273	.0395	.0431	.0419	.0382	.0335	.0285	.0237	.0195	.0157
.25	.0351	.0528	.0601	.0610	.0583	.0534	.0476	.0416	.0357	.0302
.30	.0428	.0666	.0784	.0824	.0814	.0775	.0717	.0650	.0580	.0511
.35	.0506	.0807	.0975	.1053	.1072	.1050	.1002	.0938	.0864	.0786
.40	.0583	.0949	.1171	.1294	.1348	.1354	.1325	.1273	.1205	.1127
.45	.0659	.1091	.1360	.1542	.1638	.1679	.1678	.1648	.1595	.1527
.50	.0734	.1232	.1570	.1794	.1936	.2017	.2052	.2051	.2024	.1975
.55	.0807	.1371	.1768	.2046	.2237	.2362	.2437	.2473	.2478	.2459
.60	.0879	.1508	.1964	.2296	.2536	.2708	.2827	.2903	.2946	.2962
.65	.0950	.1642	.2156	.2541	.2832	.3051	.3214	.3332	.3416	.3470
.70	.1019	.1774	.2344	.2781	.3120	.3385	.3592	.3753	.3876	.3970
.75	.1086	.1902	.2527	.3014	.3400	.3708	.3957	.4158	.4321	.4452
.80	.1152	.2026	.2704	.3239	.3669	.4019	.4306	.4544	.4743	.4909
.85	.1216	.2147	.2875	.3456	.3927	.4314	.4637	.4908	.5139	.5336
.90	.1279	.2265	.3041	.3664	.4173	.4594	.4948	.5249	.5506	.5729
.95	.1340	.2379	.3201	.3863	.4406	.4859	.5240	.5565	.5846	.6089
1.0	.1400	.2489	.3354	.4053	.4628	.5107	.5512	.5858	.6156	.6416

表4 一斉交換における β と t_b^* の変化による q の数値

β t_b^*	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
.10	.0078	.0094	.0084	.0067	.0050	.0035	.0025	.0017	.0011	.0007
.15	.0155	.0118	.0201	.0178	.0148	.0117	.0091	.0066	.0051	.0037
.20	.0230	.0322	.0344	.0327	.0291	.0248	.0206	.0167	.0133	.0104
.25	.0310	.0453	.0507	.0507	.0476	.0428	.0374	.0319	.0268	.0222
.30	.0392	.0590	.0685	.0713	.0697	.0655	.0597	.0532	.0466	.0403
.35	.0475	.0733	.0874	.0939	.0950	.0924	.0873	.0807	.0733	.0656
.40	.0557	.0878	.1072	.1180	.1228	.1230	.1198	.1142	.1071	.0989
.45	.0638	.1025	.1275	.1433	.1525	.1565	.1565	.1533	.1477	.1403
.50	.0715	.1172	.1481	.1693	.1835	.1924	.1967	.1972	.1947	.1896
.55	.0789	.1318	.1689	.1957	.2154	.2296	.2392	.2448	.2468	.2457
.60	.0856	.1461	.1896	.2222	.2475	.2675	.2831	.2947	.3027	.3072
.65	.0916	.1600	.2101	.2486	.2795	.3053	.3270	.3455	.3604	.3720
.70	.0968	.1733	.2302	.2745	.3110	.3425	.3705	.3956	.4180	.4375
.75	.1010	.1858	.2498	.2999	.3417	.3784	.4121	.4437	.4734	.5011
.80	.1040	.1973	.2685	.3341	.3713	.4127	.4513	.4883	.5245	.5599
.85	.1057	.2077	.2862	.3483	.3997	.4451	.4874	.5286	.5697	.6112
.90	.1060	.2167	.3028	.3708	.4267	.4753	.5202	.5639	.6078	.6529
.95	.1064	.2239	.3178	.3920	.4522	.5034	.5497	.5939	.6382	.6837
1.0	.1067	.2296	.3310	.4114	.4759	.5293	.5758	.6188	.6608	.7036

えた理由としては、おもにフィールドデータから判断して、部品の使用時間がMTBFに致るまに交換することが極めて多いこと^{3,4)}、また、理論的にもMTBF以前に交換した方が有利になることも知られているからである⁵⁾。したがって、実用上 $t=1.0$ までであれば、充分であると考えられる。

3. 各交換方式における交換コストの計算法

三つの交換方式から最適な交換方式を決定するには、二つの方法がある。一つは図式による方法であり、これについては文献1)ですでに検討した。もう一つは直接計算する方法であり、この方法によれば厳密な解が得られ、とくに各交換方式における最適交換間隔の値も同時に得られる。計算手順を具体的に示すために、表5のようなフィールドデータを用いて検討する。

表5 部品交換データの例

$\beta=2.0$
$\mu=MTBF=1500$
$C_1=210000$ 円
$C_2=90000$ 円
$C_3=60000$ 円

3.1 故障交換の場合 故障交換のとき、部品は故障時に交換することになるから、故障交換コスト C_1 は表5より210,000[円]をMTBFの $\mu=1500$ [時間]で割ればよい。すなわち、表1の故障交換の式を用いて、このときの単位時間当りの交換コスト F は、

$$F=\frac{C_1}{\mu}=\frac{210,000}{1500}=140 \text{ (円/時間)} \quad (1)$$

となる。ただし、この場合、最適交換間隔は存在しない。

3.2 個別交換の場合 このとき、単位時間当りの最適交換コスト $A^*(x_a^*)$ は、表1の個別交換の式から得られる。すなわち、

$$A^*(x_a^*)=(C_1-C_2)\lambda(x_a^*) \quad (2)$$

である。上式で C_1 、 C_2 のデータは、表5で与えられているから、故障率 $\lambda(x_a^*)$ が得られれば、 $A^*(x_a^*)$ は求まる。

ワイブル分布の故障率は表2の第1式より、

$$\lambda(x_a^*)=\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x_a^*}{\eta}\right)^{\beta-1}=\frac{\beta}{\eta}t_a^{*\beta-1} \quad (3)$$

となるから、 $\lambda(x_a^*)$ を求める場合、実時間の最適交換間隔 x_a^* を直接必要としないことに注意する。また、上式における η の値は表2の第2式から、

$$\eta=\frac{\mu}{\Gamma(1/\beta+1)}=\frac{1500}{\Gamma(1/2+1)}=1692.6 \quad (4)$$

である。さらに、 t_a^* は表3に $\beta=2$ 、 $p=C_2$

$/C_1=0.4286$ をあてはめると、補間法を用いて

$$t_a^*=0.9242$$

となる。したがって、故障率 $\lambda(x_a^*)$ は、

$$\lambda(x_a^*) = \frac{2.0}{1692.6} \times 0.9242^{2-1} = 1.092 \times 10^{-3}$$

と求まる。

こうして、最適交換コスト $A^*(x_a^*)$ は (2) 式に $C_1 = 210,000$, $C_2 = 90,000$, $\lambda(x_a^*) = 1.092 \times 10^{-3}$ を代入して

$$A^*(x_a^*) = (210,000 - 90,000) \times 1.092 \times 10^{-3} = 131.0 \text{ [円/時間]}$$

となる。

なお、正規化された最適交換間隔 t_a^* を実時間 x_a^* に変換するには、表 2 の第 2 式と第 3 式を使って

$$x_a^* = \eta t_a^* = 1692.6 \times 0.9242 = 1564.3 \text{ [時間]}$$

となる。

こうして、個別交換の場合、最適な部品交換間隔 x_a^* は、1564 [時間] であり、そのときの単位時間当りの最小交換コストは 131.0 [円] となる。

この結果を故障交換の場合と比較すると、個別交換の場合の方が約 9 [円/時間] 少ないことが分かる。

3.3 一斉交換の場合 一斉交換のとき、単位時間当りの最小交換コストは、表 1 の一斉交換方式から、

$$B^*(x_b^*) = C_1 m(x_b^*) \quad (5)$$

であり、上式で $m(x_b^*)$ は再生密度関数であり、これは表 6 の再生関数表を用いて求める。すなわち、 $m(x_b^*)$ は $M(x)$ を実時間 x で微分し、 $x = x_b^*$ における値を示している。

$$m(x_b^*) = \left. \frac{dM(x)}{dx} \right|_{x=x_b^*}$$

上式を差分の形で表現すれば、

$$m(x_b^*) \approx \left. \frac{\Delta M(x)}{\Delta x} \right|_{x=x_b^*}$$

表 6 再生関数 $M(t)$ に関する数表

β t	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
.10	.0620	.0393	.0249	.0158	.0099	.0063	.0040	.0025	.0016	.0010
.15	.1008	.0691	.0474	.0325	.0223	.0153	.0105	.0072	.0049	.0034
.20	.1420	.1029	.0747	.0543	.0395	.0287	.0208	.0151	.0110	.0080
.25	.1853	.1400	.1061	.0805	.0612	.0466	.0354	.0269	.0204	.0155
.30	.2302	.1798	.1410	.1109	.0874	.0680	.0544	.0429	.0338	.0267
.35	.2765	.2219	.1790	.1450	.1178	.0958	.0780	.0635	.0517	.0421
.40	.3239	.2662	.2199	.1826	.1522	.1271	.1063	.0889	.0744	.0622
.45	.3724	.3122	.2634	.2234	.1903	.1626	.1391	.1192	.1021	.0875
.50	.4217	.3600	.3091	.2670	.2318	.2020	.1764	.1544	.1351	.1183
.55	.4718	.4091	.3569	.3133	.2765	.2452	.2180	.1943	.1733	.1547
.60	.5224	.4596	.4066	.3620	.3242	.2918	.2636	.2387	.2166	.1967
.65	.5736	.5113	.4579	.4128	.3745	.3415	.3128	.2874	.2647	.2441
.70	.6252	.5630	.5109	.4657	.4272	.3941	.3653	.3399	.3172	.2965
.75	.6770	.6175	.5652	.5204	.4821	.4493	.4210	.3959	.3736	.3535
.80	.7291	.6718	.6208	.5767	.5390	.5067	.4790	.4549	.4335	.4144
.85	.7813	.7268	.6775	.6345	.5977	.5663	.5394	.5163	.4962	.4784
.90	.8335	.7822	.7352	.6937	.6580	.6276	.6018	.5799	.5611	.5450
.95	.8856	.8381	.7937	.7540	.7196	.6904	.6657	.6451	.6278	.6133
1.0	.9376	.8943	.8528	.8153	.7826	.7546	.7311	.7116	.6956	.6826

となる。

こうして、最適交換間隔 x_b^* が必要となるが、これはつぎのようにして求める。

まず、表 5 の C_1 , C_3 を用いて q を求める。

$$q = C_3 / C_1 = 6 / 21 = 0.2857$$

いま求めた q と $\beta = 2.0$ を表 4 にあてはめると、正規化された最適交換時間 t_b^* は、0.6598 となる。こうして表 2 の第 3 式を用いて、そのときの实時間 x_b^* は

$$x_b^* = \frac{0.6598 \times 1500}{\Gamma(1/2 + 1)} = 1116.8 \text{ [時間]}$$

となる。

一方、 $\beta = 2$ で $t_b^* = 0.6598$ に相当する $M(t)$ の値は表 6 を用いて、0.3848 となる。表 7 は、 $t = 0.6598$ 近傍の t とそれに対応する $M(t)$ と実時間に変換した値 x_b をまとめたものである。

そこで、 $t = 0.6598$ の近傍として $t = 0.65$ をとれば、そのときの $m(x_b^*)$ はつぎようになる。

$$m(x_b^*) = \frac{0.3848 - 0.3745}{1116.8 - 1100.2} = 6.205 \times 10^{-4}$$

なお、 $t = 0.6598$ の近傍を 0.65 と 0.7 で代表させて、 $m(x_b^*)$ の値を求めると 6.228×10^{-4} となり、両者にはそれほど差が認められない。したがって、得られた t_b^* を表 6 にあてはめたときに t_b^* を含む区間領域で t_b^* の近傍を代表させても実用上十分であるといえる。

こうして、 $B^*(x_b^*)$ の値は、(5) 式に $C_1 = 210,000$, $m(x_b^*) = 6.205 \times 10^{-4}$ を代入して

$$B^*(x_b^*) = 210,000 \times 6.205 \times 10^{-4} = 130.3 \text{ [円/時間]}$$

を得る。なお、 $B^*(x_b^*)$ を $m(t_b^*) = 6.228 \times 10^{-4}$ で計算すれば、130.8 [円/時間] となる。

こうして、一斉交換の場合、最適交換間隔 x_b^* は 1117 [時間] であり、そのときの単位時間当りの最小交換コストは、130.3 [円] となる。

以上の計算から、故障交換、個別交換、一斉交換についての単位時間当りの最小交換コストとそのときの最適交換間隔が得られた。したがって、表 5 の例では、一斉交換におけるコストが 130.3 [円/時間] で最小だから、一斉

表 7 x_b^* における $m(x)$ を求めるための数表

t	$M(t)$	x_b
.6500	.3745	1100.2
.6598	.3848	1116.8
.7000	.4272	1184.8

*) この場合の計算はつぎのようである。

$$m(x_b^*) = \frac{0.4272 - 0.3745}{1184.8 - 1100.2} = 6.228 \times 10^{-4}$$

交換が最も有利な方式であることがわかる。

4. あとがき

本資料では、前報で得られた結果に基づいて、故障交換、個別交換、一斉交換における単位時間当りの最小コストとそれに対応する最適交換間隔の計算手順を明らかにした。とくに、得られた解は、厳密な解であり、各交換方式間の優劣を単位時間当りの交換コストで評価する場合に極めて有利である。したがって、今後、船用機関をはじめとするいろいろなシステムの部品の寿命をワイブル分布で近似し、各部品の寿命分布と交換方式、交換

コストの関係を実証的に検討していきたい。

最後に、いつも有益な助言と励ましを頂いております東京電機大学の川崎教授に心からお礼申し上げます。

文 献

- 1) 堀籠, 舶機誌, 15-12(昭55-12), 923.
- 2) Barlow, R. and Proschan, F.; *Mathematical Theory of Reliability* (1965), 84, John Wiley & Sons, Inc.
- 3) 堀籠, 中村, 舶機誌, 14-3(昭54-3), 295.
- 4) 川崎, 堀籠, 舶機誌, 16-2(昭56-2), 85.
- 5) 川崎, 堀籠, 信学技報, R74-7(昭49-6), 19.