オイルダンパー内粘性力の振動数依存性について*

葉山 眞治**

Frequency-Dependent Damping Forces
in an Oil Damper

by Shinji Hayama

It is usually assumed that damping forces in a torsional oil damper are proportional to the relative velocity between the inner and outer rings. This is valid only when the frequencies of the relative velocity are sufficiently low. To express the damping forces correctly at high frequencies, an additional term proportional to the relative acceleration or the relative displacement is necessary, because the phase lag occurs in the responses of velocity distribution in the narrow passage of the damper. In this paper the frequency-dependent viscous forces between the two parallel plates are analyzed, assuming that the one of them oscillates harmonically with a small amplitude in the parallel direction, keeping a small, constant gap, and the added mass and pseudo-stiffness terms are determined.

1. ま え が き

オイルダンパー内流体の粘性力は壁面の相対速度に比例した減衰力として取扱うのが普通である。ところが、相対速度の振動数が高くなると、速度に比例した成分の他に、変位に比例した成分も生じてくることが実験的に知られている¹⁾²⁾³⁾。これは、振動数が高くなると流速分布の応答に遅れが生じ、壁面せん断力には逆に位相進みが生じるためである。言替えると、壁面せん断力には速度に比例した成分の他に、加速度に比例した成分、あるいは変位に比例した成分が生じるためである。

本報では、平板が粘性流体中で正弦振動を行うとき、この平板に働く壁面せん断力の振動数依存性について考察し、付加質量項あるいは見掛けのばね項が生じることを示す。

2. 無限流体中で正弦振動をする平板の壁面せん断力

現象の物理的意味を明かにするために、始めに無限に広がった非圧縮性、粘性流体中で平板がその面内で正弦振動を行うとき、その片面に働く壁面せん断力について

考える。図1に示すように、静止壁面上に x 軸、壁面に垂直方向に y 軸をとり、流れは x 軸に平行な層流と仮定すると、基礎式は次のように表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

ここで、 $u(y, t)$ は流体の x 方向速度成分、 ν (= 粘度 μ / 密度 ρ) は動粘度、 t は時間である。壁面は振幅 X_0 、角振動 ω で、 x 軸に平行に、

$$X = X_0 \sin \omega t = \operatorname{Re}(-i X_0 e^{i\omega t}) \quad (2)$$

なる正弦振動を行っているとする、境界条件は、流速振幅 U ($= X_0 \omega$) として、次のように表される。

図1 座標系と境界条件

* 原稿受付 昭和61年10月9日

月例講演会 (昭和58年9月2日)

** 正会員 東京大学工学部 (東京都文京区本郷7-3-1)

$$\left. \begin{aligned} y=0, u=\dot{X}=U \cos \omega t=R_e[U e^{i\omega t}] \\ y \rightarrow \infty, u=0 \end{aligned} \right\} (3)$$

この問題は Stokes の第 2 の問題として知られているもので⁴⁾,

$$k=\sqrt{\omega/2\nu} \quad (4)$$

とくと、式 (1) の定常解は、複素表示を用いると、

$$u(y, t)=U e^{-ky} e^{i(\omega t-ky)} \quad (5)$$

と表される。式 (5) の実数部が実際の現象を表すものでこの速度分布を図 2 に示す^{*1)}。

図 2 壁面近傍の速度分布

さて、流体が壁面に与える、単位面積当りのせん断力を τ_w とすると、 $\tau_w = \mu (\partial u / \partial y)|_{y=0}$ より

$$\begin{aligned} \tau_w &= -(\mu/l^*) (1+i) kl^* U e^{i\omega t} \\ &= -(\mu/l^*) (\sqrt{2} kl^*) U e^{i(\omega t + \pi/4)} \end{aligned} \quad (6)$$

となる。ここで l^* は境界層厚さで、図 2 の速度分布から

$$kl^* \sim 4 \text{ と見れば}$$

$$l^* \sim k/4 \quad (7)$$

である。式 (6) を間隔が l^* の 2 平行平面の片方が速度 $U \times e^{i\omega t}$ でゆっくり変動する場合の壁面せん断力と比較すると、実効粘度が μ より $\mu\sqrt{2} kl^* \sim 4\sqrt{2}\mu$ となり、位相が $\pi/4$ だけ進んでいることが分る。位相が進むのは図 2 の速度分布から分るように、壁面における速度勾配が $\omega t = 0$ の場合よりも、 $\pi/4$ 前の $\omega t = -\pi/4$ ときの方が大きくなっているためである。

式 (6) は次のように 3 通りに表現することができる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_w &= -(\mu_\infty^*/l^*) \dot{X} & (i) \\ &= -(\mu_\tau^*/l^*) \dot{X} - m_\infty^* \ddot{X} & (ii) \\ &= -(\mu_\tau^*/l^*) \dot{X} + \tau_\infty^* X & (iii) \end{aligned} \right\} (8)$$

ここで各係数は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \mu_\infty^* &= \mu(1+i) kl^*, \quad \mu_\tau^* = \mu kl^* \\ m_\infty^* &= \rho l^*/2 (kl^*) \\ \tau_\infty^* &= 2\rho (\nu/l^*)^2 (kl^*)^3/l^* \end{aligned} \right\} (9)$$

式 (8-i) は複素粘度 μ_∞^* を用いて表すものである。式 (8-ii), (8-iii) は位相進みを加速度, あるいは速度に比例する成分を用いて表すもので、 m_∞^* は壁面の単位面積当りの付加質量、 τ_∞^* は同じく単位面積当りの見掛けのばね定数である。これらはいずれも振動数に依存する値である。

3. 平行 2 平面の片方が正弦振動をする場合の壁面せん断力

正弦振動をする壁面から l だけ離れた所に静止壁面がある場合の境界条件は、式 (3) において、 $y \rightarrow \infty$ の代わりに、 $y=l$ で $u=0$ とすればよい。この場合の解も容易に求められ、流速分布は次のように表される。

$$u(y, t) = \frac{\sinh\{(1+i)k(l-y)\}}{\sinh\{(1+i)kl\}} U e^{i\omega t} \quad (10)$$

よって、壁面せん断力は次のようになる。

$$\tau_w = -\frac{\mu}{l} (1+i) kl \coth\{(1+i)kl\} U e^{i\omega t} \quad (11)$$

ここで、壁面せん断力 τ_w を理解し易い形に書き改めるために、無次元振動数 kl の関数 $H(kl)$, $F(kl)$, $G(kl)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} H(kl) &= (1+i) kl \coth\{(1+i)kl\} \\ &= F(kl) + iG(kl) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} F(kl) &= \frac{kl\{\sinh(2kl) + \sin(2kl)\}}{\cosh(2kl) - \cos(2kl)} \\ G(kl) &= \frac{kl\{\sinh(2kl) - \sin(2kl)\}}{\cosh(2kl) - \cos(2kl)} \end{aligned} \right\} (13)$$

このとき、式 (11) は次のように表すことができる。

$$\tau_w = -(\mu/l) |H(kl)| U e^{i(\omega t + \phi)} \quad (14)$$

ここで、位相角 ϕ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \phi &= \tan^{-1}\{G(kl)/F(kl)\} \\ &= \tan^{-1}\left\{\frac{\sinh(2kl) - \sin(2kl)}{\sinh(2kl) + \sin(2kl)}\right\} \end{aligned} \quad (15)$$

すなわち、式 (14) は実効粘度が $\mu |H(kl)|$ となり、壁面せん断力は壁面の速度よりも ϕ だけ位相が進むことを示している。

関数 $H(kl)$ を、 kl をパラメータとして複素平面上にプロットすると、図 3 のようになる。また、代表的な値を表 1 に示す。

関数 $F(kl)$, $G(kl)$, $H(kl)$ の特徴を知るために、 kl が小さい場合の級数展開と kl が大きい場合の漸近展開を求めると次のようになる。

*1) 文献 4) の 76 頁 Fig. 5.8. に同じ図があるが、 ky 軸のスケールが間違っているので注意されたい。

$kl \ll 1$ のとき

$$\left. \begin{aligned} F(kl) &= 1 + (4/45)(kl)^4 \dots \\ G(kl) &= (2/3)(kl)^2 \dots \\ H(kl) &= \sqrt{1 + (28/45)(kl)^4} \approx 1 \\ \phi &= \tan^{-1} \{ (2/3)(kl)^2 \} \approx (2/3)(kl)^2 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$kl \gg 1$ のとき

$$\left. \begin{aligned} F(kl) &= G(kl) = kl \\ |H(kl)| &= \sqrt{2} kl \\ \phi &= \pi/4 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

すなわち、図3および表1から分るように、 $kl \ll 0.5$ であれば $H \approx 1$ であり、位相進みも小さく定常なクエツト

図3 複素関数 $H(kl) = F(kl) + iG(kl)$

kl	$F(kl)$	$G(kl)$	$ H(kl) $	ϕ°
0.0	1.00000	0.00000	1.00000	0.0
0.1	1.00001	0.00667	1.00003	0.38
0.2	1.00014	0.02667	1.00050	1.53
0.3	1.00072	0.05999	1.00252	3.43
0.4	1.00227	0.10660	1.00793	6.07
0.5	1.00554	0.16640	1.01922	9.40
0.6	1.01146	0.23921	1.03937	13.31
0.7	1.02115	0.32469	1.07153	17.64
0.8	1.03585	0.42230	1.11863	22.18
0.9	1.05690	0.53123	1.18290	26.69
1.0	1.08564	0.65039	1.26555	30.93
1.2	1.17090	0.91335	1.48499	37.96
1.4	1.29829	1.19628	1.76540	42.66
1.6	1.46783	1.48189	2.08579	45.27
1.8	1.67195	1.75488	2.42384	46.39
2.0	1.89781	2.00607	2.76152	46.59
2.5	2.47694	2.54179	3.54908	45.74
3.0	3.01014	3.01849	4.26289	45.08
3.5	3.50901	3.50061	4.95656	44.93
4.0	4.00226	3.99695	5.65630	44.96
4.5	4.49945	4.49853	6.36253	44.99
5.0	4.99937	4.99987	7.07053	45.00

表1 関数 $F(kl)$ 、 $G(kl)$ 、 $|H(kl)|$
および位相角 ϕ

ト流れの解と一致する。一方、 $kl \gg 3$ 程度になると、 $H = (1+i)kl$ となり、無限流体中の場合と一致し、位相進みは 45° となる。 kl が2前後で 45° よりわずかに大きな位相進みが現れる。 kl が大きいくとき、 H が kl に比例して大きくなるのは、境界層厚さが壁面間隔より小さくなって、壁面と共に振動する流体は非常に狭い範囲に閉じこめられているのと同じ結果になるためである。

以上のように、振動数が大きくなるにつれて壁面せん断力は準定常なクエツト流れの場合よりも、その絶対値が大きくなり、かつ位相進みが生じることが分る。これを準定常なクエツト流れとのアナロジーで、速度に比例する流体力として表現すると複素粘度を用いる必要がある。ただし、複素粘度といっても物性値である粘度 μ そのものが複素数になるのではなく、振動数の関数として壁面せん断力に位相進みが生じること複素数を用いて表現したもので、流体力の一つの表現法である。

よって、この場合も壁面せん断力は次のように3通りに表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_w &= -(\mu^*/l)\dot{X} & (i) \\ &= -(\mu_r/l)\dot{X} - m_a\ddot{X} & (ii) \\ &= -(\mu_r/l)\dot{X} + \tau_0 X & (iii) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここで、記号は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \mu^* &= \mu \{ F(kl) + iG(kl) \} \\ \mu_r &= \mu F(kl) \\ m_a &= \rho l G(kl)/2(kl)^2 \\ \tau_0 &= 2\rho(\nu/l)^2(kl)^2 G(kl)/l \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで、 m_a は壁面の単位面積当りの付加質量であり、 τ_0 は同じく単位面積当りの見掛けのばね定数である。見掛けという意味は、ここで考えている平行壁面間の流れにおいては、もともと変位に比例する流体力は発生しないのに、これを変位に比例する流体力として表現したために、見掛け上現れてきたということである。

4. オイルダンパーへの応用の一例

粘性ねじりダンパーの内輪と外輪との間の隙間が内輪の直径に比べて十分小さければ、この隙間内の流れは上記の2平行平板間の流れにほぼ等しいと見ることが出来る。したがって、上記の結果は内外輪の相対速度を $\dot{X}$ 、半径隙間を l とすれば、外輪に対して内輪が角速度 ω で微小なねじり振動を行っている二次元流れのオイルダンパーに直ちに適用することができる。

いま、内輪の直径を D 、半径を R 、ねじり振動成分を θ とすると、

$$X = R\theta, \quad \dot{X} = R\dot{\theta}, \quad \ddot{X} = R\ddot{\theta} \quad (20)$$

であるから、内輪の端面の影響を無視し、幅 b の内輪に働く壁面せん断力の中心軸まわりのトルクを Q とすると $Q = (\pi D b \tau_w) R$ であるから、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} Q &= -C^* \ddot{\theta} & (i) \\ &= -C_r \dot{\theta} - I_a \ddot{\theta} & (ii) \\ &= -C_r \dot{\theta} + K_i \theta & (iii) \end{aligned} \right\} (21)$$

ここで、 C^* 、 C_r 、 I_a 、 K_i は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} C^* &= \frac{(\pi D b) R^2 \mu}{l} \{ F(kl) + i G(kl) \} \\ C_r &= \frac{(\pi D b) R^2 \mu}{l} F(kl) \\ I_a &= \frac{1}{2} \rho (\pi D b l) R^2 \frac{G(kl)}{(kl)^2} \\ K_i &= \frac{2 \rho (\pi D b) R^2}{l} \left(\frac{\nu}{l} \right)^2 (kl)^2 G(kl) \end{aligned} \right\} (22)$$

である。式(21-i)は複素減衰係数 C^* を用いるもの、式(21-ii)は付加慣性モーメント I_a を用いて表す方法、式(21-iii)は見掛けのばね定数 K_i を用いて流体力を表す方法である。

ねじり振動の解を複素数を用いて計算する場合には、どの方法を用いても結局は同じである。強制振動の場合はあらかじめ角振動数 ω が与えられるので、無次元振動数 kl の関数として C^* 、 C_r 、 I_a 、 K_i が定まるので特に問題は無いが、自由振動の固有振動数を求める場合は、角振動数があらかじめ定まっていないので、固有角振動数を仮定して繰返し計算を行う必要がある。

5. 結 言

平板が粘性流体中で微小な正弦振動を行う場合の壁面せん断力を求め、壁面せん断力の振動数依存性について考察した結果、次のことが分った。

- (1) 無限流体中での壁面せん断力は壁面の速度より 45° 位相が進んでいる。
- (2) 隙間 l を介して静止壁面が有るときの壁面せん断力は、無次元振動数 $kl (= \sqrt{\omega l / 2\nu})$ が0.5より小さいときには、準定常なクエット流れの場合と同じになり、また kl が3より大きくなると、無限流体中の壁面せん断力と同じになる。
- (3) 位相進みの効果を記述するには、複素粘度を用いる方法、付加質量を含む加速度に比例する項で表す方法、および見掛けのばね定数を含む変位に比例する項で表す方法がある。これらの係数は無次元振動数の関数として与えられる。

文 献

- 1) 岩本, Hartmann, R., 船機誌, 17-7 (昭57-7), 520.
- 2) 岩本, 船機誌, 18-10 (昭58-10), 795.
- 3) 岩本・ほか2名, 船機誌, 18-12 (昭58-12), 975.
- 4) Schlichting, H., Boundary Layer Theory, 4th Ed., P. 75, Trans. by J. Kestin, 1960, McGraw-Hill.