定期保全間隔に乱れが存在する場合の MTBF等の特性について*

大 木 健 史** 土 井 浩 治***
石 毛 謙 三**** 堀 籠 教 夫****

Characteristics of MTBF under Periodic Maintenance with Random Interval in Weibull Distribution

By Takeshi Oki, Koji Doi, Kenzo Ishige, Michio Horigome

The periodic maintenance method is well known as one of the best methods in the preventive maintenance. Its properties in the strictly periodic maintenance have been studied theoretically, but the case where there is randomness in the periodic maintenance interval has never been investigated so far. On the other hand, the field maintenance data have suggested us difficulties of keeping the interval of periodic maintenance strictly.

Therefore, this paper deals with the characteristics of the MTBF (Mean Time Between Failures) under the periodic maintenance with random interval. First we choose a Weibull distribution as the reliability function of the items and next set up the maintenance model which exists the random interval in the periodic maintenance. Under these conditions, we investigate how the randomness of the maintenance interval effects on the MTBF of the items from the theoretical viewpoints. Finally, we show the usefulness on the basis of results obtained here.

1. ま え が き

船舶において定期保全技術は予防保全の中でも優れた保全手法として定着してきたが、特に定期検査、中間検査に代表される定期保全手法には多くの実績があることは言うまでもない。しかし、船舶システムの保全現場では、いろいろな経済的事情や条件、さらに工学的な理由等から定期保全間隔を厳守することは極めて容易でないことは、現場データからも十分に伺い知ることができる。ここでは、定期保全が厳密に実施されない場合を「定期保全の乱れ」とよび、この乱れが保全特性、特にMTBFに与える影響等を理論的に考察する。この場合、システムの信頼度関数としてワイブル

分布を取り上げて考察する。その理由は故障や保全に関するデータ解析等において広く使用されているからである。さらに、ワイブル分布の形状パラメータ β は1より大きいという条件のもとで検討する。それは $\beta > 1$ の場合のみ予防保全の効果が存在することが、理論的にも証明されているからである¹⁾²⁾。最後に、ここで得られた理論的結果に基づいて定期保全の乱れがMTBF等に与える影響等を中心に考察する。

2. 船用機関システムで定期保全に乱れが存在する背景

船舶システムにおける保全現場で、定期予防保全間隔を厳守することが極めて困難な理由は多種多様である。その中で最も代表的と思われる理由には次のようなものがある。

一般に保全現場では当然のことであるが、機器やシステムの正常運転確保という責任を乗組員は

*原稿受付 平成10年6月12日

**正会員 三井造船システム技研株式会社 (千葉市美浜区中瀬1-3)

***住友化学株式会社 (大分市大字鶴崎2200)

****正会員 東京商船大学 (江東区越中島2-1-6)

常に負わされていると言う事実がある。特にこのような傾向は、推進機関システムに強く現れている。従って、機関システムの現在の状況判断によって定期保全間隔が変化することは当然予想されることである。その具体的事例としては、機関システムそれ自身が極めて運転良好であり、しかもその状態が継続可能である場合、その間隔が伸びる傾向を示す。一方、システムの運転状況あるいは稼働状況が悪くなければ、定期保全時間を経過する前に保全が実施される傾向となる。このような状況事例は一例に過ぎず、現場では多くの情報や状況等を十分考慮し、さらにメーカの設計等によって決定された機器の定期保全間隔等を有機的に結合して適切に判断し保全間隔を決定しているのが実状と推測される。また、現場では、保全実施時に予防保全か事後保全かと考えながら保全を実施するという認識の希薄さなどから、いずれの保全か区別できない、あるいは明確でないことも現実には存在する。

図1はその事実を示す1つの事例で、ワイブル確率紙にディーゼル主機関の燃料弁に関する2つのグループの保全データをプロットしたものであり、それぞれに直線を当てはめたところ、各データに

つき2つの直線で近似出来ることを示す。特に、いずれのデータにおいても図の左側の直線の勾配は大きくないが、右側での勾配は大きい。このことから、予定使用時間が経過すると、燃料弁の故障や正常に関係なく定期保全が実施されることを示唆している。もし、定期保全が厳守されているならば、右側の直線は垂直になるはずであるが、実際は図のように傾斜を持つため、定期保全もある分布に従うことが分かる。このことは定期保全に乱れが存在することを表している。このような事実は船用機関システムを構成するいずれの部品の保全や故障のデータにもよく観測される特徴である。こうして、定期保全の乱れが存在すると、その乱れがどんな影響をシステムに与えるか理論的に考察することが大切であることがわかる。すなわち、定期保全間隔の乱れによって部品やシステムのMTBFがいかなる影響を受けるか理論的に明確にすることが本論文の目的である。

3. 理論的背景

この章では、予防保全に関する関係式とそれを用いて得られる定期保全間隔時のMTBFを求める

図1 ワイブル紙にプロットされたディーゼル主機関燃料弁の保全データ定期保全事例³⁾

理論式を導き、次章における定期保全間隔に乱れが存在する理論的解析のための準備を行う。

3.1 予防保全の一般式と定期保全の理論式
システムに対して一般的な予防保全を実施した場合のMTBFの理論式は次式で与えられることが知られている。

$$\mu = \frac{\int_0^{\infty} R(t) \overline{G}(t) dt}{1 - \int_0^{\infty} R(t) g(t) dt} \quad (1)$$

ただし、 $R(t)$ ：システム自身の信頼度関数

$\overline{G}(t)$ ：保全関数

$\overline{G}(t)$ ： $1-G(t)$ ，保全しない場合の分布関数

$g(t)$ ： $dG(t)/dt$ ，保全に関する確率密度関数

次に、上式を用いて厳密な定期予防保全下におけるMTBFを μ_T とし、これを求める。この場合、図2に示すように、 $\overline{G}(t)=1$ ， $g(t)=\delta(t-T)$ とおく。ここで T は定期保全の時間間隔であり、また、 $\delta(\cdot)$ はディラクの関数である。これらを(1)式に代入してまとめると、

図2 定期保全間隔厳守モデル²⁾

$$\begin{aligned} \mu_T &= \frac{\int_0^T R(t) dt}{1 - \int_0^T R(t) \delta(t-T) dt} \\ &= \frac{\int_0^T R(t) dt}{F(T)} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで $F(t)$ はシステム自身の故障分布関数である。

上式が定期保全間隔が厳守された場合のMTBFであり、すでにR.Barlow and F.Proshanによって与えられた式である¹⁾。

3.2 システムの信頼度関数 システムの信頼度関数としてワイブル分布を取り上げるが、この分布は次式で与えられる。

$$R(t) = \exp\{-(t/\eta)^\beta\} \quad (3)$$

ここで、 β と η はそれぞれ形状パラメータと尺度パラメータである。また、この分布の平均と分散は

$$\begin{aligned} \text{平均} \quad \mu &= \eta \Gamma(1/\beta + 1) \\ \text{分散} \quad \sigma^2 &= \eta^2 \{\Gamma(2/\beta + 1) - \Gamma^2(1/\beta + 1)\} \end{aligned} \quad (4)$$

であり、ここで $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。

本論文では、既述のように $\beta > 1$ の場合を想定するが、その理由はこの条件の場合のみ故障率 $\lambda(t)$ が時間と共に増加する故障率増加型(IRF)となり、予防保全の効果が期待出来るからである¹⁾²⁾。

4. 定期保全に乱れが存在する場合のMTBF

ここでは、まず定期保全間隔に乱れやばらつきが存在する場合のモデルを設定する。次にこのモデルとワイブル分布を既に求めた一般予防保全の(1)式に代入して、保全時間間隔に乱れが存在する場合の理論的関係を求める。

4.1 乱れが存在する定期保全モデル 定期保全に乱れが存在する場合、いろいろなモデルが考えられることは言うまでもない。特に定期保全間隔に乱れが存在するモデルとして、例えば正規分布が適当であろうと思われる。しかし、正規分布を使用すると、乱れによるMTBFへの影響を明確かつ解析的に表現することが容易でなくなるという短所がある。そこで、ここでは図3のようなモデルを想定するが、このモデルはすでに川崎らによって考察されたものである⁴⁾⁵⁾。図3(b)は保全に関する密度関数 $g(t)$ であり、実線は平均保全間隔時間が T で、その前後にばらつき a が発生していることを表している。すなわち、この保全密度関数は $T-a$ から $T+a$ まで、同じ密度 $1/2a$ をもつようなモデルである。従って、もし図3(b)の一点鎖線で

図3 定期保全間隔T一定で、乱れaが変動する場合のモデル^{4) 5)}

示すように、乱れaが増加するにつれてg(t)の頂きが低くなる理由は、密度関数を全部加えて1になるという分布関数の定義から生ずる。一方、乱れaが極度に小さくなると、丁度図2(b)のg(t)のようになり、保全間隔Tで保全を実施していることと等価なことは明らかである。こうして、定期保全の乱れの大小はパラメータaの大小によって表現される。なお、図3(a)の実線は $\bar{G}(t)$ の分布関数であり、0からT-aまで $\bar{G}(t)=1$ とはこの時間間隔で保全を実施しない確率は1、換言すれば保全を実施する確率G(t)は0であることを示す。そして、T-aからT+aまでは、 $\bar{G}(t)=(T+a-t)/2a$ という関数に従って保全が少しずつ実施され、ついにT+a以上では $\bar{G}(t)=0$ 、つまり、この領域では確実に保全が実行されることを示している。以上のような考察から、図3で与えた乱れを有する保全モデルを数式で表現すると次のようになる。

$$\bar{G}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T-a \\ (T+a-t)/2a & T-a \leq t < T+a \\ 0 & T+a \leq t \end{cases} \quad (5)$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T-a \\ 1/2a & T-a \leq t < T+a \\ 0 & T+a \leq t \end{cases}$$

4.2 乱れを伴う定期保全間隔における2つの場合

次に、図3で与えたモデルに基づいて現場の保全状態等を考慮すると、図4のような場合も考えられるから、ここでは図3と図4という2つの保全状態について考察する。

図4 定期保全間隔Tが変動し、乱れa一定のモデル^{4) 5)}

1)一つは、図3(a)のように予防保全間隔Tが一定であり乱れaが変動する場合、つまり、平均保全間隔Tは固定されているが、乱れの変化は平均周りの分散に大小が生ずる場合を示している。

2) もう一つは、図4のように予防保全間隔T自身が緩慢に変動するが、乱れは一定の場合、すなわち、この時平均保全間隔Tが緩慢に変化するが、平均周りの分散は常に一定で変動しないことを示す。

上記の2つは、保全データや経験等から推測される保全状況である。

4.2 乱れaをもつ定期保全のMTBF

次に、今まで考察してきた乱れaをもつ定期保全間隔モデルを用いてMTBFを求める。これはTとaという2つの変数を持つから $\mu(a, T)$ とおく。こうして、

$$\mu(a, T) = \frac{\int_0^{T-a} R(t) dt + \int_{T-a}^{T+a} R(t) \frac{(T+a-t)}{2a} dt}{1 - \int_{T-a}^{T+a} R(t) \frac{1}{2a} dt} \quad (6)$$

また、ここではワイブル分布を想定したから、(3)式を上式に代入すると次のようになる。

$$\mu(a, T) = \frac{\int_0^{T-a} e^{-(t/\eta)^\beta} dt + \int_{T-a}^{T+a} e^{-(t/\eta)^\beta} \frac{(T+a-t)}{2a} dt}{1 - \int_{T-a}^{T+a} e^{-(t/\eta)^\beta} \frac{1}{2a} dt} \quad (7)$$

そこで、上式の分子と分母の計算結果はそれぞれ付録に示すようになるから、それらをまとめて上式に代入すれば、

$$\mu(a, T) = \frac{\eta \left\{ (a+T) \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \bar{A}\right) + (a-T) \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \underline{A}\right) \right\}}{2a\beta - \eta \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \bar{A}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \underline{A}\right) \right\}} - \frac{\eta^2 \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\beta}, \bar{A}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{\beta}, \underline{A}\right) \right\}}{2a\beta - \eta \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \bar{A}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \underline{A}\right) \right\}} \quad (8)$$

なお、上式で $\Gamma(\cdot, \cdot)$ は不完全ガンマ関数であり、 $\bar{A} = \left(\frac{T+a}{\eta}\right)^\beta$ 、また $\underline{A} = \left(\frac{T-a}{\eta}\right)^\beta$ である。

上式は、定期保全間隔 T に乱れ a が存在する場合のMTBFであり、以下における考察における最も基本的な役割を持つ関係式である。

5. 数値解析における条件等

次に、(7)式から理論的な数値結果を求めるが、その関係式にはワイブル分布のパラメータ β と η が混在する。そのため結果や計算に対する見通しを良くするために、ここでは次のような処理を行う。

いま、ワイブル分布の平均値は(4)式の第1式から $\mu = \eta \Gamma(1/\beta + 1)$ であり、これを1とおいて時間の正規化を行う。すなわち、 $\mu = 1$ から $\eta = 1/\Gamma(1/\beta + 1)$ となり、これを(8)式に代入すると、正規化された時間表現 $\mu^*(a^*, T^*)$ は次式で与えられる。なお、 a^* や T^* は保全間隔 T と乱れ a を時間で正規化したものである。

$$\mu^*(a^*, T^*) = \frac{(a^*+T^*) \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \bar{A}^*\right) + (a^*-T^*) \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \underline{A}^*\right)}{2a^*\beta \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right) - \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \bar{A}^*\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \underline{A}^*\right) \right\}} - \frac{\left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\beta}, \bar{A}^*\right) - \Gamma\left(\frac{2}{\beta}, \underline{A}^*\right) \right\} / \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)}{2a^*\beta \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right) - \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \bar{A}^*\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \underline{A}^*\right) \right\}} \quad (9)$$

ここで $\bar{A}^* = (T^*+a^*) \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^\beta$ 、また $\underline{A}^* = (T^*-a^*) \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^\beta$ である。

これらを含め、すでに考察した条件等を求めた関係式についてまとめる。

1) 予防保全を実施してシステムの故障間隔時間MTBFを増加させるためには、形状パラメータ β が1より大きいことが条件となる。現実的に表現すれば、故障率が時間と共に増加するということである。つまり、使用時間が増加すると、故障回数もますます増加することを表わしている。

2) 正当化された保全間隔時間 T^* が1であるということは、実時間で言えばワイブル分布の平均値そのものの時間間隔で保全を実施することを意味する。例えば、分布の平均値が1200時間であるとする。もしこの時 $T^*=1$ とすれば、定期保全間隔は1200時間であり、また、 $T^*=0.5$ であれば実時間間隔は600時間となることを示す。

3) 実時間の平均値が5000時間とする。例えば $T^*=1$ で乱れ a^* が $a^*=0.1$ とすれば、このときの実時間の乱れは、 $0.1 \times 5000 = 500$ 時間となる。すなわち、5000時間の前後に500時間の乱れ、もっと明確に言えば4500時間から5500時間という1000時間にわたってばらつきがあるということである。

4) 一方、 $T^*=0.5$ の場合、実時間で平均1000時間であるとすれば、乱れ a^* は0.5が最大であり、つまり500時間以上の値を取ることはあり得ないことを示す。

6. 結果と考察

4.2で既述した2つの場合について理論的結果を示し、定期保全間隔 T^* 、乱れ a^* とMTBFという3者の関係について考察する。

6.1 定期保全間隔 T^* 一定、乱れ a^* が変化する場合 表1は図3(a)の場合に当たる場合、つまり保全時間間隔 T^* を一定とし、その乱れ a^* が変動する場合のMTBFの結果である。なお、この時のMTBF $\mu^*(a^*)$ は(9)式の $\mu^*(a^*, T^*)$ で T^* が一定であるということに基づいている。また、図5は表1の数値をグラフで表したものである。これらの結果から得られる定期予防保全間隔の特性などに関する知見等は次のようになる。なお、図5の(a)は $T^*=1$ の場合であり、(b)は $T^*=0.5$ の場合で

図5 定期保全間隔 T^* が一定、乱れ a^* が変動する場合

表1 定期保全間隔一定 $T^*=1.0$ 、乱れ a^* が変化した場合のMTBF $\mu^*(a^*)$

β	1.5	2.0	2.5	3.0
a^*				
0.01	1.272	1.452	1.579	1.674
0.1	1.272	1.451	1.578	1.672
0.2	1.272	1.450	1.574	1.664
0.3	1.272	1.448	1.568	1.651
0.4	1.271	1.444	1.557	1.633
0.5	1.270	1.438	1.543	1.610
0.6	1.268	1.429	1.525	1.582
0.7	1.264	1.416	1.502	1.550
0.8	1.258	1.399	1.474	1.514
0.9	1.249	1.377	1.442	1.475
1.0	1.235	1.350	1.405	1.433

ある。

1) 同図から形状パラメータ $\beta=1.5$ の場合、乱れ a^* の大小によって MTBF $\mu^*(a^*)$ は大きく変動しないことが見られる。例えば、同図(a)の $\beta=1.5$ の曲線がこれに当たる。すなわち、保全間隔の平均値 T^* が一定であれば、少々 の乱れやばらつきが存在しても MTBF に大きな影響を与えないことを示している。しかし、 β が大きくなると、乱れ a^* が MTBF に与える影響は大きくなる。特に、 β が 3.0 では、 $a^*=0.4$ 付近から急速に減少する。こうして、

この付近から MTBF に大きな悪影響を及ぼし始めることが分かる。

2) 同図(b)では、保全間隔 $T^*=0.5$ の場合だから、 a^* の最大値は 0.5 となる。従って、 a^* は 0.5 までと言う制限があることに注意する。このとき $T^*=0.5$ だから、アイテム自身の MTBF の 2 分の 1 の間隔で予防保全を実施していることに相当する。そして、 a^* が大きいほど、かつ β が大きくなるほど、MTBF に与える影響が大きくなる。例えば、 $\beta=3.0$ でしかも $a^*=0.1$ では MTBF は 5.7 となるが、 $a^*=0.5$ では約 3.2 まで減少している。

6.2 乱れ a^* 一定、定期保全間隔 T^* が変化する場合 この時の MTBF を $\mu^*(T^*)$ と表し、図6はこの結果である。なお、MTBF の表示 $\mu^*(T^*)$ は 6.1 と同様、(9) 式の $\mu^*(a^*, T^*)$ で a^* 一定に基づいている。この図で (a) は乱れ a^* の大きさが 0.1、すなわち、定期保全間隔 $T^*=1$ を中心にしてその前後に $a^*=0.1$ のばらつきが存在する場合の結果である。そして、図6(b)は $a^*=0.2$ の結果であり、この図において T^* は 0.2 から始まることに注意する。この場合の特徴は次のようになる。

- 1) 形状パラメータ β が大きくなるほど、MTBF $\mu^*(T^*)$ も増加する。
- 2) 定期保全間隔 T^* が大きくなるほど、MTBF は減少する。

図6 定期保全間隔 T^* が変化, 乱れ a^* が一定の場合

3) 乱れ a^* が大きいほど, MTBFは減少する. 例えば, 形状パラメータ $\beta=3.0$ でかつ $T^*=0.2$ の条件では, $a^*=0.1$ で約28であるが, $a^*=0.2$ で約18となり, 著しく減少することが明らかになる.

6.3 全体の特徴

1) 図5から a^* が増加するとMTBFは減少するが, その傾向は上に凸状になる特徴がある. 従って, T^* が一定で a^* が比較的小さい場合, MTBFの減少の仕方は緩やかである. 一方, 図6から a^* が一定の時, 曲線は下に凸となるから, T^* がわずかに増加してもMTBFは急激に減少することを示している. こうして, 定期保全間隔 T^* の変動の方が, 保全の乱れ a^* の変動より著しくMTBFに影響を与えることが分かる.

2) 形状パラメータ β が比較的1に近い場合, 定期保全間隔 T^* とその乱れ a^* の変動があっても, MTBFには大きな影響はない. しかし, β が大きいとMTBFは T^* の変動による影響の方が, a^* の変動より大きい. 従って, T^* を一定にする, つまり保全間隔の厳守が極めて大切であり, この場合特に β の大小には充分に注意する必要がある.

7. あとがき

本研究では, アイテムの故障がワイブル分布に支配される場合, 定期保全間隔における乱れの存

在が, MTBFへ与える影響について, 乱れをもつ定期保全間隔についての簡単なモデルを用いて理論的に考察した. この結果から, 乱れ a の変動よりも定期保全間隔 T の変動の方がMTBFに大きな影響を与えること, 出来るだけ保全間隔が一定となるように実施すべきことを示した. 今後さらに検討する課題として, 保全コストを考慮した場合等が考えられる. また, 本研究で取り扱ったモデルよりさらに一般的にするため, 乱れを正規分布で想定した場合による理論的解析も重要であろう. いずれにしても, 今後もこの領域に関する研究を進め, 機会があれば発表する予定である.

参考文献

- 1) R.Barlow and F.Proshan; Mathematical Theory of Reliability, John Wiley & Sons (1965) .pp.84-87.
- 2) M.Horigome,Y.Kawasaki and Q.Q.Chen; IEICE Trans.Vol.E77-A, No.1 (1994) .pp.240-243.
- 3) 堀籠, 大河原; 舶機誌, 17-12 (昭57) pp.983-990.
- 4) 川崎, 堀籠; 電子通信学会信学技報, R74-7 (1974) , pp.19-26.
- 5) 川崎, 堀籠; 東京商船大学研究報告 (自然科学), 26号 (1975) pp.165-180.
- 6) 大木, 土井, 堀籠; 第26回日科技連信頼性・安全性シンポジウム (平成8年) pp.195-200.

付 録

1. (7)式の分母の計算

$$\text{分母} = 1 - \frac{1}{2a} \int_{T-a}^{T+a} e^{-(t/\eta)^\beta} dt$$

ここで $(t/\eta)^\beta = z$ とおくと, $t = \eta z^{\frac{1}{\beta}}$ さらに $dt = \frac{\eta}{\beta} z^{\frac{1}{\beta}-1} dz$ となる.

$$\text{分母} = 1 - \frac{1}{2a} \int_{(\frac{T-a}{\eta})^\beta}^{(\frac{T+a}{\eta})^\beta} e^{-z} \frac{\eta}{\beta} z^{\frac{1}{\beta}-1} dz = 1 - \frac{\eta}{2a\beta} \int_{\underline{A}}^{\bar{A}} e^{-z} z^{\frac{1}{\beta}-1} dz$$

$$= 1 - \frac{\eta}{2a\beta} \left[\int_0^{\bar{A}} e^{-z} z^{\frac{1}{\beta}-1} dz - \int_0^{\underline{A}} e^{-z} z^{\frac{1}{\beta}-1} dz \right]$$

ここで不完全ガンマ関数の定義より, $\int_0^{\bar{A}} e^{-z} z^{\frac{1}{\beta}-1} dz = \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \bar{A}\right)$ 等となるから,

$$\text{分母} = 1 - \frac{\eta}{2a\beta} \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \bar{A}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \underline{A}\right) \right\}$$

なお, $\bar{A} = \left(\frac{T+a}{\eta}\right)^\beta$, $\underline{A} = \left(\frac{T-a}{\eta}\right)^\beta$ を用いた.

2. (7)式の分子の計算

$$\text{分子} = \int_0^{T-a} e^{-(t/\eta)^\beta} dt + \int_{T-a}^{T+a} e^{-(t/\eta)^\beta} \frac{(T+a-t)}{2a} dt$$

分母と同様に, $(t/\eta)^\beta = z$ とおくと, 分子で用いた記号が利用できるから,

$$\text{分子} = \int_0^{\underline{A}} e^{-z} \frac{\eta}{\beta} z^{\frac{1}{\beta}-1} dz + \int_{\underline{A}}^{\bar{A}} e^{-z} \frac{(T+a-t)}{2a} \frac{\eta}{\beta} z^{\frac{1}{\beta}-1} dz$$

$$= \frac{\eta}{\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \underline{A}\right) + \frac{\eta}{2a\beta} \left\{ (T+a) \int_{\underline{A}}^{\bar{A}} e^{-z} z^{\frac{1}{\beta}-1} dz - \int_{\underline{A}}^{\bar{A}} e^{-z} tz^{\frac{1}{\beta}-1} dz \right\}$$

ここで $\{ \}$ は次のようになる.

$$\{ \} \text{ の第1項} = (T+a) \int_{\underline{A}}^{\bar{A}} e^{-z} z^{\frac{1}{\beta}-1} dz = (T+a) \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \bar{A}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \underline{A}\right) \right\}$$

$$\{ \} \text{ の第2項} = \int_{\underline{A}}^{\bar{A}} e^{-z} tz^{\frac{1}{\beta}-1} dz = \int_{\underline{A}}^{\bar{A}} e^{-z} \eta z^{\frac{1}{\beta}} z^{\frac{1}{\beta}-1} dz$$

$$= \eta \int_{\underline{A}}^{\bar{A}} e^{-z} z^{\frac{2}{\beta}-1} dz = \eta \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\beta}, \bar{A}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{\beta}, \underline{A}\right) \right\}$$

こうして,

$$\text{分子} = \frac{\eta}{\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \underline{A}\right) + \frac{\eta}{2a\beta} \left[(T+a) \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \bar{A}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \underline{A}\right) \right\} - \eta \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\beta}, \bar{A}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{\beta}, \underline{A}\right) \right\} \right]$$

$$= \frac{\eta}{2a\beta} \left[(a+T) \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \bar{A}\right) + (a-T) \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \underline{A}\right) - \eta \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\beta}, \bar{A}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{\beta}, \underline{A}\right) \right\} \right]$$