非定常船体動揺データの時系列解析について－Ⅱ－ －多変量時系列データの瞬間クロススペクトル解析－

井関 俊夫*

Time Series Analysis of Non-stationary Ship Motion Data－Ⅱ－ －Instantaneous Cross-spectral Analysis of Vector-valued Time-history Data－

Toshio ISEKI

Abstract

The time-varying coefficient vector autoregressive (TVVAR) modeling is applied to the cross-spectral analysis of non-stationary ship motion data. The modeling can be recognized as an extension of the Time-varying coefficient autoregressive (TVAR) modeling examined in the previous report⁽¹⁾. In this paper, the procedure of TVVAR model is described by contrast with the TVAR modeling. Introducing the instantaneous response, a vector autoregressive model can be reduced to simple autoregressive models for each ship motion and the required CPU time is effectively reduced. The TVVAR model and stochastic perturbed difference equations are transformed into a state space model. The vector-valued unknown coefficients can be evaluated and the instantaneous cross-spectra of ship motions can be calculated at every moment. The results showed good agreements with one of the TVAR modeling and also with the stationary autoregressive (SAR) modeling analysis under stationary conditions. Optimum order of the model and Akaike's information criterion were also examined for several changes of parameters. Moreover, it is confirmed that the TVVAR modeling can estimate the instantaneous cross-spectra of ship motions even under non-stationary conditions.

Keywords : Ship motion data, TVVAR modeling, Non-stationary stochastic process, Instantaneous cross-spectra
キーワード: 船体動揺データ、TVVAR モデル、非定常確率過程、瞬間クロススペクトル

1. 緒言

定常確率過程とみなせる不規則波浪海面上において、変針・増減速などの操船を行った場合、船体動揺は非定常確率過程になると考えられる。前報⁽¹⁾では、北川らによって示された時変係数自己回帰 (Time-varying coefficient AutoRegressive : TVAR) モデル⁽²⁾を用いて、1 変量の非定常船体動揺時系列データに対して瞬間スペクトル解析を行い、各パラメータ変化が解析結果に与える影響を詳細に調べるとともに、定常自己回帰 (Stationary AutoRegressive : SAR) モデルによるスペクトル解析結果との比較を行った。その結果、

- ・トレンドモデルと時変分散モデルを用いた非定常時系列の正規化は有効である。

- ・船体動揺データの瞬間スペクトルを求めることにより、スペクトルの形状やピーク周波数が連続的に移動する様子を知ることができる。
- ・船体動揺データの解析においては、確率差分方程式の次数によって最適次数は異なるが、AIC⁽³⁾ (Akaike's Information Criterion : 赤池の情報量規準) は大きく変化しない。

などの結論が得られ、非定常船体動揺時系列の解析に対して TVAR を用いた瞬間スペクトル解析が非常に有効であることがわかった。

そこで対象を船体横揺れ、縦揺れ、上下加速度などの同時計測された多変量時系列データに拡張し、時変係数多変量自己回帰 (Time-varying coefficient

* 正会員 東京海洋大学海洋工学部 (〒135-8533 東京都江東区越中島 2-1-6) iseki@e.kaiyodai.ac.jp

vector AutoRegressive : TVVAR) モデルを用いた瞬間クロススペクトル解析法⁽⁴⁾を非定常船体動揺データに適用した。本報告では、種々のパラメータを変化させた場合のモデルの最適次数やAICの変化を詳細に調べた結果を示すとともに、TVAR モデルならびに SAR モデルによる解析結果と比較しつつ考察を加え、得られたいくつかの知見について報告する。

2. TVVAR モデルを用いた非定常時系列データの瞬間クロススペクトル解析

ここでは、定常時系列解析に用いられる多変量定常自己回帰 (Stationary Vector AutoRegressive : SVAR) モデルと対比しながら TVVAR モデルを用いた瞬間クロススペクトル解析法について述べる。

まず、 $\mathbf{y}(n) = \{y_1(n), y_2(n), \dots, y_p(n)\}^T$ ($n=1, \dots, N$) で表される定常の p 変量多次元時系列の解析に用いられる SVAR モデルは次のように表される。

$$\mathbf{y}(n) = \sum_{l=1}^m \mathbf{A}_l \mathbf{y}(n-l) + \mathbf{w}(n) \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{A}_l$ はラグ l における $p \times p$ の自己回帰係数行列であり、 $\mathbf{w}(n)$ は平均値 0、分散共分散行列 $\Sigma(n)$ の p 変量正規分布に従う白色雑音を表す。このモデルの未知数は $p \times p \times m$ 個の AR 係数であり、 N 個の多変量時系列データを用いて最尤法や最小二乗法あるいは Levinson-Durbin 法によって効率的に決定される。また、最適なモデルの次数 m は AIC を最小化することによって得られる。

これに対し、非定常な時系列 $\mathbf{y}(n)$ に対する TVVAR モデルは次のように定義される。

$$\mathbf{y}(n) = \sum_{l=1}^m \mathbf{A}_l(n) \mathbf{y}(n-l) + \mathbf{w}(n) \quad (2)$$

(1) 式と比較して、自己回帰係数行列 $\mathbf{A}_l(n)$ が時刻 n において定義されている点が異なっており、時々刻々のモデルの当てはめにおいては膨大な演算量と記憶容量が必要となる。この問題に対し、Akaike et al.⁽⁵⁾ならびに Kitagawa と Akaike⁽⁶⁾ は同時応答を含む表示形を導入して計算の効率化を図っている。本研究においても同時刻の応答を含む TVVAR モデルを導入することになると (2) 式は次式の形に変形できる。

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{D}(n) \mathbf{y}(n) + \sum_{l=1}^m \mathbf{B}_l(n) \mathbf{y}(n-l) + \mathbf{u}(n) \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{D}(n)$ と $\mathbf{B}_l(n)$ はそれぞれ時刻 n での同時応答行列と係数行列で、

$$\mathbf{D}(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{210}(n) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p10}(n) & \cdots & b_{p(p-1)0}(n) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_l(n) = \begin{pmatrix} b_{11l}(n) & b_{12l}(n) & \cdots & b_{1pl}(n) \\ b_{21l}(n) & b_{22l}(n) & \cdots & b_{2pl}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1l}(n) & b_{p2l}(n) & \cdots & b_{ppl}(n) \end{pmatrix}$$

の形で表される。また、 $\mathbf{u}(n)$ は平均値 0、分散共分散行列 $\mathbf{V}$ の p 変量正規分布に従う白色雑音であり、

$$\mathbf{u}(n) = \{u_1(n), u_2(n), \dots, u_p(n)\}^T$$

$$\mathbf{V} = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_p^2)$$

で表される。(2) 式と (3) 式における TVVAR 係数行列および分散共分散行列の間には、

$$\mathbf{A}_l(n) = (\mathbf{I} - \mathbf{D}(n))^{-1} \mathbf{B}_l(n), \quad (l=1, 2, \dots, p),$$

$$\Sigma(n) = (\mathbf{I} - \mathbf{D}(n))^{-1} \mathbf{V} (\mathbf{I} - \mathbf{D}(n))^{-T}$$

の関係があるので、一旦どちらかのモデルの推定ができればもう一方のモデルも自然に得られることになる。

さらに、 $u_i(n)$ と $u_j(n)$, ($i \neq j$) が互いに独立であると仮定すると、(3) 式で表されるモデルは $b_{ij0}(n) = 0$, ($i \leq j$) とすれば、

$$y_i(n) = \sum_{j=1}^p \sum_{l=0}^m b_{ijl}(n) y_j(n-l) + u_i(n), \quad (4)$$

$$(i=1, 2, \dots, p)$$

のように p 個の独立したモデルに分解することが可能となり、計算効率の飛躍的な向上が望めることになる。この同時応答を含む TVVAR モデルを用いる点が多変量時系列に対する TVAR モデルの単なる拡張ではなくなる点でもある。

ここで、 $b_{ijl}(n)$ は不規則な確率変数と考えることができ、単純に最小二乗法を適用しても有意な結果を得ることはできない。そこで、パラメータの時間変化にベイズ型平滑化事前分布^{(2),(7)}を適用し、モデルの推定を安定的に行う。ベイズ型平滑化事前分布は $b_{ijl}(n)$ が滑らかに変化するという仮定を設けるもので、各時間ステップにおける $b_{ijl}(n)$ の k 階差分が平均値 0、未知分散 τ_{ijl}^2 の正規白色雑音 $v_{ijl}(n)$ に等しいとおくもので、具体的には次の確率差分方程式を考

慮することによって実現できる。

$$\Delta^k b_{ijl}(n) = v_{ijl}(n), \quad (5)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, p, l = 1, 2, \dots, m)$$

ここで、 Δ は差分オペレータを表し、

$$\Delta b_{ijl}(n) = b_{ijl}(n) - b_{ijl}(n-1), \quad (6)$$

$$\Delta^k b_{ijl}(n) = \Delta^{k-1}(\Delta b_{ijl}(n))$$

の演算を意味する。したがって、未知分散 τ_{ijl}^2 はモデルの適合度と係数の滑らかさのトレードオフをコントロールするハイパーパラメータと考えることができる。

なお、実際の計算では、 k は 1 または 2 であるとしており、また、 $\tau_{ijl}^2 \sim \sigma_i^2$ と考えられることから $\tau_{ijl}^2 = \tau_i^2, (i = 1, 2, \dots, p)$ とし、 p 種類のハイパーパラメータのみを考えている。

実際の解法は、(5)式をシステムモデル、(4)式を観測モデルとした次のような状態空間表現を用いて行われる。

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{F}\mathbf{x}(n-1) + \mathbf{G}\mathbf{v}(n) \quad (7)$$

$$y_i(n) = \mathbf{H}(n)\mathbf{x}(n) + w_i(n), \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

ここで、

$$\mathbf{x}(n) = (b_{i10}(n), \dots, b_{i(i-1)0}(n), b_{i11}(n), \dots, \\ b_{i1m}(n), \dots, b_{ip1}(n), \dots, b_{ipm}(n))^T \quad (8)$$

$$\mathbf{H}(n) = (y_1(n), \dots, y_{i-1}(n), y_1(n-1), \dots, \\ y_1(n-m), \dots, y_p(n-1), \dots, y_p(n-m))^T$$

であり、 $k=1$ のときは $\mathbf{I}_L$ を $L \times L$ の単位行列として、

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} = \mathbf{I}_L$$

$k=2$ のときは

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{I}_L & -\mathbf{I}_L \\ \mathbf{I}_L & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_L \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (9)$$

で表される。ただし、 L は次式で決定される整数である。

$$L = m \times p + i - 1 \quad (10)$$

このように状態空間モデルが構成されれば、カルマンフィルタのアルゴリズムを用いて TVVAR 係数を時々刻々推定することができる。

なお、このモデルには推定すべきパラメータとして観測ノイズの分散 σ_i^2 とシステムノイズの分散 τ_i^2 が含まれており、最尤法によって最適な値を求める

ことができる。しかし、 σ_i^2 が一定であるとみなせる場合には、トレードオフパラメータ $\lambda_i^2 (= \tau_i^2 / \sigma_i^2)$ を導入すれば、 σ_i^2 の値は自動的に決定される⁽²⁾。

トレードオフパラメータを決定するための対数尤度関数 $l(\lambda_i)$ は次式で計算される。

$$l(\lambda_i) = -\frac{1}{2} \{ N \log 2\pi + \sum_{n=1}^N \log v^2(n) \\ + \sum_{n=1}^N \frac{1}{v^2(n)} \{ y_i(n) - \mathbf{H}(n)\mathbf{x}(n|n-1) \}^2 \} \quad (11)$$

ここで、 $v^2(n)$ は時刻 n の予測誤差の分散を表し、

$$v^2(n) = \mathbf{H}(n)\mathbf{V}(n|n-1)\mathbf{H}(n)^T + \sigma_i^2 \quad (12)$$

で求められる。また、 $\mathbf{x}(n|n-1)$, $\mathbf{V}(n|n-1)$ はカルマンフィルタによって 1 期先を予測された時刻 $n-1$ の状態ベクトルと分散共分散行列を表す。

したがって、最適なトレードオフパラメータは (11) 式の最大化、すなわち最尤法で推定される。

また、TVVAR 次数 m および確率差分方程式の次数 k は次に示される AIC を最小にするものを求めれば良い。

$$AIC(i) = -2l(\lambda_i) + 2(\text{dimension of } \lambda_i) \quad (13)$$

$$AIC = \sum_{i=1}^p AIC(i)$$

3. 瞬間クロススペクトルの推定

TVVAR 係数行列を推定することができれば、定常 SVAR モデルとほぼ同様の計算で瞬間クロススペクトルを推定することができる。時刻 n における瞬間スペクトル行列 $\mathbf{P}(f, n)$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{P}(f, n) = \mathbf{A}(f, n)^{-1} \Sigma \mathbf{A}^*(f, n)^{-T} \quad (14)$$

$$= \mathbf{B}(f, n)^{-1} \mathbf{V} \mathbf{B}^*(f, n)^{-T}$$

ただし、 $\mathbf{A}(f, n)$, $\mathbf{B}(f, n)$ は $\mathbf{A}_i(n)$, $\mathbf{B}_i(n)$ のフーリエ変換であり、 $\mathbf{A}_0(n) = -\mathbf{I}$, $\mathbf{B}_0(n) = \mathbf{D}(n) - \mathbf{I}$ として、

$$\mathbf{A}(f, n) = \sum_{l=0}^p \mathbf{A}_l(n) e^{-2\pi j f l} \quad (15)$$

$$\mathbf{B}(f, n) = \sum_{l=0}^p \mathbf{B}_l(n) e^{-2\pi j f l} \quad (16)$$

で計算される。

なお、TVVAR モデルの推定の前に時変分散モデルによる正規化⁽¹⁾を行っている場合の瞬間スペクトル

ル $\hat{\mathbf{P}}(f, n)$ の要素 $\hat{p}_{ij}(f, n)$ は時変分散 $\hat{\sigma}_i^2(n), \hat{\sigma}_j^2(n)$ を用いて次式で求められる。

$$\hat{p}_{ij}(f, n) = \sqrt{\hat{\sigma}_i^2(n) \hat{\sigma}_j^2(n)} \cdot p_{ij}(f, n) \quad (17)$$

4. 実船実験ならびに解析結果

実船実験データは前報⁽¹⁾と同じく、平成 13 年 3 月 7 日、東京海洋大学（実験当時東京商船大学）附属練習船汐路丸の実験航海において収録されたものを使用した。波との出会い角による船体動揺の変化を計測するために、変針と直進を繰り返して計測した。計測条件を Table 1 に、実験時の航跡図を Fig.1 に示す。なお、詳細な海象条件、計測条件等は前報⁽¹⁾に示されたものと同じである。

Fig.2 に実験時に計測された時系列データの一部を示す。図は上から横揺れ角、縦揺れ角、上下加速度を示しており、1 時間にわたる連続データを圧縮して示している。Fig.1 の航跡図と比較すると、各変針時において大きな横揺れが発生しており、1800 秒と 3150 秒の変針後の追い波状態において縦揺れおよび上下加速度の振幅が小さくなっていることがわかる。

Fig.3 に TVVAR モデルによる瞬間クロススペクトル解析の結果を示す。図は横軸に周波数、図面奥行き方向に時刻をとっており、1000 秒から 3500 秒の縦揺れ角、横揺れ角、上下加速度の瞬間オートスペクトルを鳥瞰図で示している。この解析におけるモデルの次数は 9 次であり、確率差分方程式の次数は 1 次としている。また、クロススペクトル解析に先立って前報⁽¹⁾で述べたトレンドモデル⁽²⁾、時変分散モデル⁽²⁾を用いた非定常時系列データの正規化を行っている。図中には Fig.1 に示される変針時刻が破線で示されており、Fig.2 と同様に、変針時に大きな横揺れが生じていることが分かる。また、縦揺れの瞬間スペクトルを見ると、 $t=1800$ までの向い波状態と $t=2500$ から $t=3150$ までの向かい波状態においては 0.22Hz 周辺にスペクトルのピークが存在し、その間の $t=1800$ から $t=2500$ ではスペクトルのピークが低周波側に移動し、約 0.1Hz の規則波に近い鋭いピークを持ったスペクトル形状に変化していることがわかる。

Fig.1 Experimental area and trajectory

Fig.4 は前報⁽¹⁾で示した TVAR モデルによる瞬間クロススペクトル解析結果と TVVAR モデルによる瞬間クロススペクトル解析結果を比較したものである。TVVAR モデルに関しては Fig.3 に示す縦揺れのオートスペクトルと同じものであり、図は $t=2500$ からの 250 秒間を拡大して示している。図中左から TVAR モデル、TVVAR モデル（確率差分方程式の次数が 1 次の場合）、TVVAR モデル（確率差分方程式の次数が 2 次の場合）の結果を示しており、それぞれの解析でピークの現れ方に多少の差が見られるものの、ほぼ同様の結果が得られていることが分かる。

Fig.5 は TVVAR モデルと定常 AR モデルによって推定された縦揺れのスペクトルを比較した結果を示している。定常 AR モデルによって解析を行ったデータは、針路 270° で航走している 1300 秒から 1700 秒の間のものであり、定常時系列と十分にみな

Fig.2 Measured time histories of roll angle, pitch angle and vertical acceleration.

Table 1 Measurement conditions

Course (deg)	Speed (knots)	Wave direction	Wave height	Wave period
260	8.5	235°	1.3m	7s
270	8.5	235°	1.6m	7s
60	9.5	250°	1.3m	7s
220	7.0	220°	1.8m	7s
90	8.5	240°	1.3m	7s

Fig.3 Instantaneous power spectra of pitch angle, roll angle and vertical acceleration.

Fig.4 Comparison of instantaneous power spectra of pitch angle.

Table 2 Optimum order and AIC

k	Normalized		Trend-removed		Original	
	m	AIC	m	AIC	m	AIC
1	2	121168	2	120226	2	120404
2	2	121523	2	120377	2	120620

せるデータである。図中の”SAR”は定常 AR モデルによる結果を表し、”TVVAR_m”、”TVVAR+”ならびに”TVVAR-”は瞬間スペクトルの当該部分の「平均値」、「平均値+標準偏差」、「平均値-標準偏差」を表している。これらの結果を比較すると、定常 AR モデルの周辺で瞬間スペクトルが変動していることがわかるが、その変動の度合いは前報⁽¹⁾で示した TVAR モデルのものよりも大きくなっている。これは多変量で解析しているため、予測誤差の分散値が

Fig.5 Comparison of estimated pitching spectra.

相対的に大きくなったためであると考えられる。

Table 2 は確率差分方程式の次数 k の値によってモデルの最適次数 m と AIC がどのように異なるかを時系列の正規化の有無について調べた結果である。最小 AIC によって選ばれた最適次数はすべての場合について 2 次となっており、TVAR モデルと比較してはるかに低い次数となっている。原因の一部として、3 変量の解析であるため、実際の次数はこの 3 倍になることや、大きく変動する長時間の非線形時系列データを一度に解析していることなどが考えられる。この低次が最適となる傾向は、リアルタイムの瞬間スペクトル解析を考えた場合、CPU タイムの面で有利であるといえる。一方、確率差分方程式の次数については低次の場合に最小の AIC が得られているが、いずれもほぼ同じ値をとっていることから、非定常の船体動揺解析についてはどちらの次数を選んでも良いと判断できる。

5. 結言

本報告では、非定常な船体動揺時系列データに対して TVAR モデルによる瞬間クロススペクトル解析法を適用し、その有効性を詳細に検討した。得られた結果をまとめると次のようになる。

- ・ 同時応答を含む TVAR モデルを用いることにより、多変量非定常時系列を効果的に瞬間クロススペクトル解析できる。
- ・ 1 変量の TVAR モデルによる瞬間スペクトル解析結果と比較して、概ね良好な一致が得られる。
- ・ 定常時系列の瞬間スペクトル解析結果によれば、TVAR モデルと比較して、TVAR モデルの方が分散値の時間変動が大きい。
- ・ 確率差分方程式の次数は 1 次の方が AIC の値は小さい。
- ・ 最小 AIC 法による TVAR モデルの最適次数は低いので、リアルタイムの瞬間クロススペクトル解析は充分可能である。

今後、瞬間スペクトルを船舶耐航性の短期予測法に適用した場合の影響を明らかにする必要があると思われる。

謝辞

本研究成果の一部は文部科学省科学研究費補助金（基盤研究 C(2) 17560706）の援助によることを付記し、関係各位に深く感謝いたします。

参考文献

- (1) 井関俊夫：非定常船体動揺データの時系列解析について、日本航海学会論文集，第 112 号，pp.301-306, 2005.
- (2) 北川源四郎：Fortran77 時系列解析プログラミング，岩波コンピュータサイエンス，岩波書店，pp.301-316, pp.90-94, pp.245-263, pp.295-301, 1993.3
- (3) Akaike, H.: A new look at the statistical model identification, IEEE Trans. on Automatic Control, vol.AC-19, No.6, pp.716-723, 1974.
- (4) Jiang, X. Q. and G. Kitagawa : A time varying coefficient vector AR modeling of non-stationary covariance time series, Signal Processing, Vol.33, No.3, pp.315-331, 1993.
- (5) Akaike, H., Kitagawa, G., Arahata, E. and Tada, F. : TIMSAC-78, Computer Science Monographs, No.11, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo, Japan, 1979.
- (6) Kitagawa, G. and Akaike, G. : On TIMSAC-78, Applied Time Series Analysis II, Academic Press, pp.499-547, 1981.
- (7) Kitagawa, G. and W. Gersch : A smoothness priors time varying AR coefficient modeling of non-stationary covariance time series, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol.AC-30, No.1, January, pp.48-56, 1985.

質疑応答

南 清和（東京海洋大学）：

- 1) 最終的な研究の目的は、船体の状態が変化した場合でも、連続して波浪推定を行えることと理解してよろしいでしょうか。
- 2) 気象・海象の変化にも本手法は対応可能でしょうか。

井関俊夫：

- 1) はい、そのとおりです。定常確率過程として船体動揺を取り扱った場合、変針・増減速を行った後は 10 分から 20 分の定常状態が必要となりますが、本計算法を利用すれば連続的にスペクトル解析が可能です。
- 2) 気象・海象の変化による船体動揺の変化は操船によるものより緩やかであると考えられますので、十分に対応可能であると思います。