船上計算機のための天体の E, d 計算式

進 士 晃* 仙 田 昭 夫*

Simple Expressions of E and d of Celestial Bodies
for Calculation by Small Computer on Board

Akira M. SINZI and Akio SENDA

Abstract

Calculation formulae of E (or GHA) and d of celestial bodies suitable for small computers on board were investigated. The following expressions were found to be the simplest:

For the sun: Combination of a polynomial and Fourier series,

For planets: Fourier series, without synodic periods,

For stars: Approximation of the Bessel-Suzuki formula; merely the principal term (moon's node, 18.6 yrs.) is adopted for nutation, and the earth's orbital velocity is substituted by the sun's mean anomaly to calculate aberration.

Mean errors of the empirical formulae for the sun and planets are within $\pm 0^s.3$ in E and $\pm 0'.04$ in d . By the approximation formulae for stars, errors are within $\pm 0^s.1$ in E (except for Polaris) and $\pm 0'.01$ in d .

1. は し が き

水路部では航海用として天測暦と天測略暦を刊行しているが最近多くの船舶に電子計算機が装備されるようになり天文航法のため暦によらずに天体の E と d を直接に計算し更に位置の線まで求めたいとの希望が多くなった。天測暦に掲げられている天体の E と d を各々 $\pm 1^s.0$, $\pm 0'.05$ 以内の精度で得られる簡単な形の計算式を求めることを試みた。

先に第36回、第37回の航海学会において広田実氏（神戸商船大学）が太陽・惑星・恒星のフーリエ級数とチエビシェフの近似式について報告されている。水路部では使えるデータが多い点に着目して簡単な最小自乗法によって更に精度を上げた式を求めることを目的とした。

2. 天体の E と d の計算

惑星の E と d の計算の流れ図を Fig. 1 に示した。3体以上の運動を厳密に解くことが出来ないことは解析数学の教えるところである。したがって惑星の n 体運動を近似的に計算するには惑星と太陽の2体運動についてケプラーの法則にしたがって解き、その結果に摂動項(他の惑星、月からの力の作用)を加える。各惑星について容易に日心黄道球面座標

Fig. 1 Flow chart of nautical almanac calculation

* 正会員，水路部（東京都中央区築地5-3-1）

を計算できるように原表と名づける計算補助表が前世紀の終りから今世紀の始めにかけて Newcomb 等により作られている。例えば金星については Newcomb が作成した “Tables of the heliocentric motion of Venus”⁽¹⁾がある。この表には27種類の表を掲げている。多くは2引数の表で表値は0".01の単位である。

最近では電子計算機によって n 体運動方程式

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots\dots(1)$$

$$U = f \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_j m_k / r_{jk}$$

($\mathbf{r}_i$ は天体の位置ベクトル, m_j, m_k は各天体の質量, r_{jk} は天体間の距離, f は万有引力の常数)

を数値積分で解く方法もある。外惑星・小惑星については、この方法で計算された値が使用されている⁽²⁾。日心黄道球面座標から視赤経、視赤緯を求めて行く過程は運動学の取扱いで行列の計算が主なるものとなる。

太陽と惑星の E と d について天測暦の精度に止めるならば上のような厳密な計算の項数を大幅に減少できる。しかし複雑な計算過程を考えると記憶容量の小さい電子計算機で各天体について計算することは容易でない。天測暦のために計算された E と d を使って求めた経験式を用いて近似計算した方が遙かに得策である。

恒星については太陽・惑星と違って運動学の取扱いだけであり、それにはベッセル・鈴木⁽³⁾の厳密な計算式⁽³⁾から項数を落した近似式を使えば容易に天測暦と同程度の精度で E と d が求められる。恒星についても太陽・惑星と同じく経験式を作ることは容易であるが、恒星の数が多いので個々の恒星について経験式を用いることは良い方法とはいえない。

3. E と d の経験式作成の経過

原始データはすべて天体位置表から採った。その精度は赤経で0".01~0".001, 赤緯0".1~0".01である。

(1) 金 星

天測暦に掲げてある天体の中で月を除けば最も運動の複雑な金星について最初に計算した。金星の E の1974, 1975年の2年間の変化を Fig. 2 に示した。金星の会合周期は 583.90 日であるが、この周期を単位として経験式を作らず暦年を単位とし会合周期については経験式の中に、その項を含ませるようにした。

Fig. 2 E of Venus

天体の運動は周期関数で表わされるから三角関数による近似が最も簡単と考えられる。

経験式を作る方法としては E と d の毎日値 UT 0^h の値を前年12月30日~翌年1月3日まで用いて最小自乗法により計算した。

$$E(\text{又は } d) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \sin k_i x + \sum_{i=1}^n b_i \cos k_i x \quad \dots\dots(2)$$

$$x = (2\pi \times t) / 365$$

$$t = 1 \text{ 月 1 日 UT } 0^h \text{ からの経過時間 (日単位)}$$

この形の経験式では1975年については、 $k_i = 0.625, 1, 2, \dots, 13$ が最も精度が良かったが、平均2乗誤差が E で $\pm 0^s.8$, d で $\pm 0^s.06$ 以下にならなかった。

次に経験式の適用区間を1年とせず分割して作る方法を採用した。Fig. 2 からみて1年を2分割しても周年と大差ないので3分割することにし、経験式も使うに便利な多項式を用うることとした。

$$E(\text{又は } d) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \dots\dots(3)$$

$$x = 2 \times (t - \text{期間の中央の } t) / \text{期間日数}$$

即ち x は期間内では ± 1.0 以内の値をとるようにした。

(2) 太 陽

金星に用いた(2)式と同一の形の経験式を求めた。しかし(2)と多項式を併用した

$$E \text{ (又は } d) = \sum_{i=1}^n a_i x^i + \sum_{j=1}^m b_j \sin jx + \sum_{j=1}^m c_j \cos jx \quad \dots\dots(4)$$

$$x = 2\pi(t - 182.5)/365$$

の形が最も精度が良かった。

多項式のみの(3)の形についても計算したが1975年の場合には(4)に勝る精度の式は得られなかった。

(3) 火星, 木星, 土星

金星に用いた(3)の多項式による経験式を求めた。 $x = 2(t - 182.5)/365$ とした。

火星については太陽に用いた(4)の形について計算したが多項式の精度より不良であった。

(4) 恒星

天体位置表^③の表の説明に掲げてある恒星視位の計算式から次の1975年における恒星の E と d の近似式を作成した。

$$\tau = t/365^d.25$$

$$M = 6^h.60239 + 86401^s.84 \tau - 1^s.06 \sin (248^\circ.6 - 19^\circ.3 \tau)$$

恒星日数

$$A = 20''.04 \tau - 6''.86 \sin (248^\circ.6 - 19^\circ.3 \tau), \quad B = 9''.21 \cos (248^\circ.6 - 19^\circ.3 \tau),$$

$$C = -18''.80 \cos (279^\circ.0 + 360^\circ \tau), \quad D = -20''.50 \sin (279^\circ.0 + 360^\circ \tau)$$

恒星常数

$$a = (2.3 + \sin \alpha_0 \tan \delta_0)/15, \quad a' = \cos \alpha_0,$$

$$b = \cos \alpha_0 \tan \delta_0/15, \quad b' = -\sin \alpha_0,$$

$$c = \cos \alpha_0 \sec \delta_0/15, \quad c' = 0.434 \cos \delta_0 - \sin \alpha_0 \sin \delta_0,$$

$$d = \sin \alpha_0 \sec \delta_0/15, \quad d' = \cos \alpha_0 \sin \delta_0$$

α_0, δ_0 : 年初の平均位置, 各恒星について与える

$$\alpha = \alpha_0 + Aa + Bb + Cc + Dd$$

$$\delta = \delta_0 + Aa' + Bb' + Cc' + Dd'$$

$$E = M - \alpha, \quad d = \delta$$

M は平均太陽の赤経で右辺第3項は章動であり, ここでは, その第1項(周期18.6年)だけを採った。恒星日数 A, B は歳差・章動に関する項であって, ここでも章動については上と同様第1項だけを採った。 C, D は光行差に関し, 地球の軌道速度を近似的に太陽の平均近点離角を使って表わした。

4. 経験式の係数, 適用期間と誤差

1975年の経験式の係数を Table 1 に掲げた。この係数を用いて計算した結果は弧度で表わされる。

Table 1 の係数を用いて適用期間の毎日 UT 0^h の値を計算した。その誤差の度数分布は, Table 2 に示した。

恒星の近似式を用いたときの誤差は北極星を除けば, $\pm 0^s.1(E)$, $\pm 0'.01(d)$ 以上の誤差はなかった。北極星の赤緯はほとんど $+90^\circ$ であるから上の近似式を使っても E における誤差は船位決定には影響しない。

5. む す び

月についても同じように経験式によって計算できよう。

船上の計算機の記憶容量, 機能等を考慮して最小限の入力データによって船舶の位置が得られるような天文航法システムができることが望ましい。そのためには最小の記憶容量と最も機能の低いコンパイラ, 例えば FORTRAN II によって成立つ処理系が開発されれば, 計算機が違っていても, このシステムを使用できる。今後はこの方向に沿って更にもっと使い易い経験式, 近似式が作られることが望ましい。

Table 1. Coefficients of empirical formulae for 1975

$$(1) \quad \text{Sun } E \text{ (or } d) = \sum_{i=0}^2 a_i x^i + \sum_{j=1}^7 b_j \sin jx + \sum_{j=1}^7 c_j \cos jx$$

	E	d		E	d
a_0	$+3.14158 \times 10^0$	$+7.40264 \times 10^{-3}$			
a_1	$+6.97304 \times 10^{-5}$	-4.17258×10^{-5}			
a_2	$+4.60362 \times 10^{-6}$	-1.53853×10^{-4}			
b_1	$+3.18387 \times 10^{-2}$	-6.29104×10^{-2}	c_1	-2.69815×10^{-3}	$+4.00387 \times 10^{-1}$
b_2	-4.12205×10^{-2}	$+5.50335 \times 10^{-4}$	c_2	-1.31325×10^{-2}	-6.64851×10^{-3}
b_3	$+1.37517 \times 10^{-3}$	-1.30145×10^{-4}	c_3	$+3.23409 \times 10^{-4}$	$+2.69538 \times 10^{-3}$
b_4	-7.97389×10^{-1}	-5.59145×10^{-5}	c_4	-5.51104×10^{-4}	-1.35642×10^{-4}
b_5	$+5.83394 \times 10^{-5}$	-4.20394×10^{-5}	c_5	$+3.49253 \times 10^{-5}$	$+4.54514 \times 10^{-5}$
b_6	-2.16089×10^{-5}	$+4.05830 \times 10^{-6}$	c_6	-2.45459×10^{-5}	-4.17721×10^{-6}
b_7	$+4.05540 \times 10^{-5}$	-2.19690×10^{-6}	c_7	-2.78241×10^{-6}	$+1.14416 \times 10^{-6}$

$$(2) \quad \text{Venus } E \text{ (or } d) = \sum_{i=0}^{12} a_i x^i$$

	Jan.~Apr.		May~Aug.		Sep.~Dec.	
	E	d	E	d	E	d
a_0	$+2.63982 \times 10^0$	$+5.19109 \times 10^{-2}$	$+2.31712 \times 10^0$	$+2.46429 \times 10^{-1}$	$+3.97017 \times 10^0$	$+5.56837 \times 10^{-2}$
a_1	-1.40842×10^{-1}	$+5.62354 \times 10^{-1}$	$+2.41538 \times 10^{-1}$	-4.12124×10^{-1}	$+6.45497 \times 10^{-2}$	-3.13959×10^{-1}
a_2	-5.62534×10^{-3}	$+3.24547 \times 10^{-2}$	$+5.30187 \times 10^{-1}$	-5.43799×10^{-2}	-2.26128×10^{-1}	-2.27746×10^{-1}
a_3	-1.19548×10^{-1}	-1.39975×10^{-1}	$+2.33280 \times 10^{-1}$	$+2.07921 \times 10^{-1}$	$+1.82061 \times 10^{-1}$	$+1.52362 \times 10^{-1}$
a_4	$+1.94945 \times 10^{-2}$	-1.19849×10^{-3}	$+2.02070 \times 10^{-1}$	$+5.99967 \times 10^{-2}$	-1.98449×10^{-1}	$+1.37134 \times 10^{-2}$
a_5	$+3.78473 \times 10^{-2}$	-9.02808×10^{-3}	$+1.49477 \times 10^{-1}$	$+2.33786 \times 10^{-2}$	$+3.06908 \times 10^{-2}$	-2.95759×10^{-2}
a_6	-2.25066×10^{-2}	$+1.37620 \times 10^{-2}$	-6.46511×10^{-2}	$+5.61851 \times 10^{-2}$	$+2.52140 \times 10^{-2}$	$+2.78780 \times 10^{-2}$
a_7	-2.53709×10^{-2}	$+1.38769 \times 10^{-2}$	-4.51588×10^{-2}	$+9.91056 \times 10^{-1}$	$+1.46430 \times 10^{-1}$	$+4.75527 \times 10^{-2}$
a_8	$+4.15105 \times 10^{-2}$	-2.03253×10^{-2}	$+4.69744 \times 10^{-3}$	$+1.19539 \times 10^{-1}$	-9.17959×10^{-2}	-4.75248×10^{-2}
a_9	$+2.99666 \times 10^{-2}$	-8.83937×10^{-3}	-2.19776×10^{-1}	-1.56795×10^{-1}	-1.91363×10^{-1}	-6.91261×10^{-2}
a_{10}	-3.35373×10^{-2}	$+1.65684 \times 10^{-2}$	-1.83767×10^{-1}	-1.85284×10^{-1}	$+1.41179 \times 10^{-1}$	$+6.56108 \times 10^{-2}$
a_{11}	-1.16684×10^{-2}	$+2.89832 \times 10^{-3}$	$+1.14680 \times 10^{-1}$	$+5.37058 \times 10^{-2}$	$+5.84915 \times 10^{-2}$	$+2.40965 \times 10^{-2}$
a_{12}	$+9.76177 \times 10^{-3}$	-5.18344×10^{-3}	$+1.07038 \times 10^{-1}$	$+7.08248 \times 10^{-2}$	-4.74654×10^{-2}	-2.47503×10^{-2}

$$(3) \text{ Mars } E \text{ (or } d) = \sum_{i=0}^{23} a_i x^i$$

	E	d		E	d
a_0	$+4.36568 \times 10^0$	$+1.74770 \times 10^{-1}$	a_{12}	$+3.02465 \times 10^{-1}$	-2.46569×10^{-2}
a_1	$+9.86104 \times 10^{-1}$	$+8.00063 \times 10^{-1}$	a_{13}	-9.15584×10^{-1}	-2.15939×10^{-1}
a_2	$+8.35235 \times 10^{-2}$	-5.56856×10^{-1}	a_{14}	$+2.43925 \times 10^0$	$+2.49462 \times 10^{-1}$
a_3	$+1.52066 \times 10^{-1}$	-6.15339×10^{-1}	a_{15}	-4.59465×10^{-1}	-3.86243×10^{-1}
a_4	$+9.10645 \times 10^{-1}$	$+4.83894 \times 10^{-1}$	a_{16}	-8.02459×10^0	-5.59104×10^{-1}
a_5	$+5.02223 \times 10^{-1}$	$+3.49598 \times 10^{-1}$	a_{17}	-2.83545×10^{-1}	-1.78890×10^0
a_6	-2.15050×10^{-1}	$+1.89077 \times 10^{-3}$	a_{18}	$+7.99923 \times 10^0$	$+7.47029 \times 10^{-1}$
a_7	$+1.15846 \times 10^{-1}$	$+1.37053 \times 10^{-1}$	a_{19}	$+3.26668 \times 10^{-3}$	-4.36156×10^0
a_8	$+2.26409 \times 10^{-1}$	$+2.26123 \times 10^{-1}$	a_{20}	-2.95786×10^0	-3.12339×10^{-1}
a_9	-4.81692×10^{-1}	-6.32433×10^{-1}	a_{21}	$+1.30228 \times 10^0$	-3.19824×10^0
a_{10}	-2.51958×10^{-1}	-4.05839×10^{-1}	a_{22}	$+2.58741 \times 10^{-1}$	$+4.17228 \times 10^{-3}$
a_{11}	$+1.33605 \times 10^0$	$+8.29455 \times 10^{-1}$	a_{23}	-7.18234×10^{-1}	$+7.84153 \times 10^{-1}$

$$(4) \text{ Jupiter, Saturn } E \text{ (or } d) = \sum_{i=0}^{13} a_i x^i$$

	Jupiter		Saturn	
	E	d	E	d
a_0	$+4.51023 \times 10^0$	$+1.26748 \times 10^{-1}$	$+9.19034 \times 10^0$	$+3.80346 \times 10^{-1}$
a_1	$+2.74870 \times 10^0$	$+1.42817 \times 10^{-1}$	$+2.71470 \times 10^0$	-5.70684×10^{-2}
a_2	$+6.28996 \times 10^{-1}$	-2.74493×10^{-1}	-6.46859×10^{-2}	-4.39652×10^{-2}
a_3	$+4.94286 \times 10^{-1}$	-1.45852×10^{-1}	$+3.27800 \times 10^{-1}$	$+3.91098 \times 10^{-2}$
a_4	$+6.77371 \times 10^{-2}$	$+6.86352 \times 10^{-3}$	-3.21466×10^{-2}	$+4.75877 \times 10^{-2}$
a_5	-3.42933×10^{-1}	$+6.25089 \times 10^{-2}$	$+6.20337 \times 10^{-2}$	$+7.29981 \times 10^{-3}$
a_6	-9.13258×10^{-1}	$+3.10663 \times 10^{-1}$	$+6.42915 \times 10^{-2}$	-8.28207×10^{-3}
a_7	-7.04658×10^{-1}	$+3.55479 \times 10^{-1}$	-1.75792×10^{-1}	-9.18642×10^{-4}
a_8	$+8.83403 \times 10^{-1}$	-2.72676×10^{-1}	$+4.19099 \times 10^{-2}$	-1.77649×10^{-2}
a_9	$+1.40065 \times 10^0$	-5.97856×10^{-2}	$+1.68207 \times 10^{-1}$	-4.67798×10^{-3}
a_{10}	-3.49583×10^{-1}	$+7.72553 \times 10^{-2}$	$+4.14408 \times 10^{-2}$	$+1.45859 \times 10^{-2}$
a_{11}	-9.64130×10^{-1}	$+3.88459 \times 10^{-2}$	-1.34395×10^{-1}	-3.09217×10^{-3}
a_{12}	$+4.34220 \times 10^{-2}$	$+1.04043 \times 10^{-3}$	-1.91059×10^{-2}	-3.85637×10^{-3}
a_{13}	$+2.47324 \times 10^{-1}$	-9.57511×10^{-2}	$+4.59310 \times 10^{-2}$	$+2.48584 \times 10^{-3}$

Table 2. Error distribution of empirical formulae for 1975

	Sun	Venus			Mars	Jupiter	Saturn
Period	through the year	Jan.~Apr.	May~Aug.	Sep.~Dec.	through the year	through the year	through the year
No. of terms	17	13	13	13	24	14	14
Error	<i>E</i> <i>d</i>	<i>E</i> <i>d</i>	<i>E</i> <i>d</i>	<i>E</i> <i>d</i>	<i>E</i> <i>d</i>	<i>E</i> <i>d</i>	<i>E</i> <i>d</i>
— 7					4 14		
— 6					4 11	1	
— 5	9		5 19		13 22	3 11	1
— 4	56 16		15 12	2	24 28	9 38	3
— 3	40 30		17 11	10 18	40 45	41 50	12
— 2	32 42	1	8 8	26 15	33 23	60 37	81
— 1	29 56	38 34	13 7	17 17	42 25	50 36	67 23
0	29 68	38 55	10 9	15 17	40 19	44 27	46 323
+ 1	29 64	43 32	8 9	19 22	36 41	46 32	58 19
2	33 38		12 6	29 16	43 30	52 31	85
3	39 36		14 11	6 15	41 27	52 41	8
4	65 15		15 12		27 18	7 53	4
5	4		7 18		9 23	9	
6			1		9 28		
7			1		8		
+ 8					3		

Errors are given in the units of 0^s.1 for *E* and 0'.01 for *d*

参 考 文 献

- (1) Newcomb, S. 1895 : Tables of the heliocentric motion of Venus, Astr. Pap. U. S. Nav. Obs. vol. V, part III
- (2) Eckert, W. J., Brouwer, D., & Clemence, G. M., 1951 : Coordinates of the five outer planets, 1653~2060, Astr. Pap. U. S. Nav. Obs. vol. XII
- (3) 水路部 : 天体位置表 1975年版

質 疑 応 答

川本 文彦 : 惑星については暦年でなく会合周期を基準とした方がよくはありませんか。

仙田 昭夫 : 金星について会合周期をとって計算しましたが長期間にわたるため項数も多くなり精度も悪くなりました。

樽美 幸雄 : 経験式の係数は毎年変化すると考えてよいのですか。

仙田 昭夫 : 係数は毎年変化します。恒星に関しても恒星日日数の三角関数内の常数は変化します。