95%確率円方式による船位誤差界について—II.

平 岩 節*

On the Error Boundary of a Ship's Position by the 95% Probability Circle System — II.

Takashi HIRAIWA

Abstract

For a circular contour, which is one of the methods for indicating an error boundary, the author has studied the conditions for the probability of a ship's position fixed by two position lines lying within a 95% circle by probability integrations. In this case, the coefficient in the equation to indicate the radius is a function of an intersecting angle and an accuracy ratio between two position lines. The author has examined several accuracy ratios¹⁾ and applied the system to the error boundary of a ship's position fixed by two unequally accurate position lines²⁾ and by three equally accurate position lines³⁾.

Furthermore, it is shown that the accuracy contour for a fix is an ellipse, whether the accuracies of the position lines are the same or not, and a method is developed to replace an error ellipse for two position lines of unequal accuracy with an ellipse formed by two equal accuracy position lines. The method is extended to three position lines of unequal accuracy. It then becomes possible to indicate an error boundary by a 95% probability circle⁴⁾.

In this paper the author described the results with which he applied the system to several concrete examples.

1. 緒 言

測定船位の誤差界を表示する方法の一つである円方式について、位置の線が2本の場合円内に収まる確率が95%となるような条件を数値計算によって求め先に報告した¹⁾。その場合円半径表示式の係数は、位置の線の精度比と交角の関数であるので、いくつかの代表的な精度比の場合について計算し、中間値に対しては図式的に補間する方法を提示した。しかし補間は位置の線の精度比と交角の両者について行なわなければならない関係上幾分煩雑であった。

次にその方式を交差方位法、三点両角法およびロラン位置の線による測定船位の誤差界に適用し、結果を図示した²⁾。

また3本の位置の線による場合については、特殊な例ではあるが位置の線が等精度であるときの誤差界を表示した³⁾。

さらにまた位置の線の精度比のいかに拘わらず測定船位に関する等精度曲線は楕円になることより、2本および3本の異精度の位置の線による確率楕円を、等精度の2本の位置の線による確率楕円に置き換える方法について論述した⁴⁾。

本報においては、異精度の位置の線による測定船位の誤差界を、具体例について示すことを企図したのであるが、その展開上必要な個所については前報と重複する部分のあることをお断りしておく。

2. 2本の位置の線による場合の95%確率円

2. 1 確率円の半径

* 正会員 北海道大学水産学部 (函館市港町3-1-1)

異精度の2本の位置の線の交角を φ , 標準偏差をそれぞれ σ_1, σ_2 とし, 等精度の2本の位置の線の交角を φ_0 , 標準偏差を σ_0 とすれば, 両者による測定船位の等確率楕円が合致するためには, 長半径, 短半径がそれぞれ等しくなければならない。したがって次の連立方程式が成立する。

$$\sigma_0 \operatorname{cosec} \frac{\varphi_0}{2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 - 4\sigma_1^2 \sigma_2^2 \sin^2 \varphi}} \operatorname{cosec} \varphi$$

$$\sigma_0 \sec \frac{\varphi_0}{2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 - 4\sigma_1^2 \sigma_2^2 \sin^2 \varphi}} \operatorname{cosec} \varphi$$

これを解くと

$$\sin \varphi_0 = \frac{2\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \sin \varphi, \quad \sigma_0 = \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\frac{2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

が得られる。

ゆえに95%確率円の半径(R)は

$$R = K \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_0^2} \operatorname{cosec} \varphi_0 = K \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \operatorname{cosec} \varphi$$

で表わされ, Kは $\sin^{-1}\{2\sigma_1 \sigma_2 \sin \varphi / (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\}$ に対する比例常数であって, 角度別のKは先に報告したが再掲すると Fig. 1 のごとくである。なおこの曲線は近似的に次の実験式で示される。

$$K = 1.9600 + 0.0611 \theta - 1.0924 \theta^2 + 1.5119 \theta^3 - 1.6021 \theta^4 + 0.9333 \theta^5$$

ただし $\theta = \varphi_0^\circ / 100^\circ$

Fig. 1. 95% probability circle, coefficient against angle of cut.

Fig. 3. Relation between observation point and two objects.

Fig. 2. Radius of 95% probability circle corresponding to any σ_2/σ_1 and angle of cut.

以上の過程を経て半径は算出されるが, その概要を示すため, σ_1, σ_2 の内小なる方を σ_1 として σ_2/σ_1 を1から10まで0.5刻みにとり半径を計算・図示したのがFig. 2である。これによれば概略な値ではあるが σ_1 を単位として容易に円半径を求めることができる。

2. 2 方位線による測定船位

2. 2. 1 2 定点の回りにおける半径等価線図

Fig. 3 において, A, Bを物標, 基線ABと方位線とのなす角を α, β , 測定船位をOとし, 海図上に記入された羅針方位線の標準偏差を 1° とすれば, 95%確率円の半径は

$$R = 0.01745(AB)K \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta} \operatorname{cosec}^2(\alpha + \beta)$$

にて表わされ、 K は $\sin^{-1}\{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)/(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\}$ に対する比例定数である。

これより任意の α, β に対する R は計算されるが、半径が2点間の距離 AB の3, 4……10%となる α と β の組み合わせを求めて等価線図の形で示したのが Fig. 4 である。

2. 2. 2 一直線上に物標が存在する場合

測位の対象となる物標の配置は無数に考えられるが、ここではその一例として、一直線上に存在する場合について吟味した。Fig. 5において、測点を O (定点)、定直線 LL' 上に無数に物標が存在するものとし、 O より LL' に至る垂直距離を ℓ (定長)、 LL' 上に任意に2物標 A, B をとる。

方位線の標準偏差を 1° 、 $\angle OAB$ を α 、 $\angle OBA$ を β とすれば、 O における95%確率円の半径は

Fig. 5. Relation between observation point and two objects.

$$R = 0.01745 \ell K \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \beta} \operatorname{cosec}(\alpha + \beta)$$

で表わされ、 K は $\sin^{-1}\{2\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta\sin(\alpha+\beta)/(\operatorname{cosec}^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\beta)\}$ に対する比例定数である。そしてこの関係において任意に α と β を与え、半径を計算・図示したのが Fig. 6 である。

3. 3本の位置の線による場合の95%確率円

3. 1 確率円の半径

異精度の3本の位置の線の標準偏差をそれぞれ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 、おのおのの辺に対する角を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とし、等精度の2本の位置の線の標準偏差を σ_0 、交角を φ_0 とする。この両者による測定船位の等確率楕円が合致するための条件は、長半径、短半径がそれぞれ等しいことである。したがって次の連立方程式が成立する。すなわち

$$\sigma_0 \operatorname{cosec} \frac{\varphi_0}{2} = \frac{2\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_2^2\sigma_3^2 + \sigma_3^2\sigma_1^2} - \sqrt{(\sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_2^2\sigma_3^2 + \sigma_3^2\sigma_1^2)^2 - 4\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2(\sigma_1^2\sin^2\theta_1 + \sigma_2^2\sin^2\theta_2 + \sigma_3^2\sin^2\theta_3)}}$$

$$\sigma_0 \sec \frac{\varphi_0}{2} = \frac{2\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_2^2\sigma_3^2 + \sigma_3^2\sigma_1^2} + \sqrt{(\sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_2^2\sigma_3^2 + \sigma_3^2\sigma_1^2)^2 - 4\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2(\sigma_1^2\sin^2\theta_1 + \sigma_2^2\sin^2\theta_2 + \sigma_3^2\sin^2\theta_3)}}$$

これを解くと

$$\sin \varphi_0 = \frac{2\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sqrt{\sigma_1^2\sin^2\theta_1 + \sigma_2^2\sin^2\theta_2 + \sigma_3^2\sin^2\theta_3}}{\sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_2^2\sigma_3^2 + \sigma_3^2\sigma_1^2}$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_2^2\sigma_3^2 + \sigma_3^2\sigma_1^2}}$$

Fig. 4. Accuracy contour for two compass bearings. (unit: AB)

Fig. 6. Radius of 95% probability circle corresponding to any α and β .

が得られる。

ゆえに95%確率円の半径(R)は

$$R = K \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_0^2} \operatorname{cosec} \varphi_0 = K \sqrt{\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2 + \sigma_3^2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 \sin^2 \theta_1 + \sigma_2^2 \sin^2 \theta_2 + \sigma_3^2 \sin^2 \theta_3}}$$

で表わされる。ただしKは $\sin^{-1} \{2\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sqrt{\sigma_1^2 \sin^2 \theta_1 + \sigma_2^2 \sin^2 \theta_2 + \sigma_3^2 \sin^2 \theta_3} / (\sigma_1^2 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2 + \sigma_3^2 \sigma_1^2)\}$ に対する比例定数にして、Fig. 1 あるいは前記の実験式により求められる。

この場合円半径は3本の位置の線の精度と交角によってきまるが、それらの諸要素はいずれも可変量であるため無数の組み合わせが生じる。したがってその概要についても論及することは望まれないので、一例として3つの交角をいずれも 60° とした場合、精度比の組み合わせに対応する円半径の表示と精度比の変動が半径に及ぼす影響について吟味することとした。

$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 60^\circ$ とすれば95%確率円の半径は

$$R = 1.1547 K \sqrt{\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2 + \sigma_3^2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}}$$

で表わされ、Kは $\sin^{-1} \{1.7321 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} / (\sigma_1^2 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2 + \sigma_3^2 \sigma_1^2)\}$ に対する係数である。いま $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の内最も小なるものを σ_1 とすれば、 σ_2, σ_3 の σ_1 に対する比率は1以上であり、また上限はきめられないが異常に低精度の位置の線は選択されないであろうということと図のふくそうを避けるため5と抑えてそれぞれの半径を算出し図示したのが Fig. 7 である。それによれば、

Fig. 7. Radius of 95% probability circle corresponding to any σ_2 and σ_3 , here: $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 60^\circ$, $\sigma_1 = 1$

$$R = 0.01745 K \sqrt{\frac{d_1^2 d_2^2 + d_2^2 d_3^2 + d_3^2 d_1^2}{d_1^2 \sin^2 \theta_1 + d_2^2 \sin^2 \theta_2 + d_3^2 \sin^2 \theta_3}}$$

で表わされ、Kは $\sin^{-1} \{2d_1 d_2 d_3 \sqrt{d_1^2 \sin^2 \theta_1 + d_2^2 \sin^2 \theta_2 + d_3^2 \sin^2 \theta_3} / (d_1^2 d_2^2 + d_2^2 d_3^2 + d_3^2 d_1^2)\}$ に対する比例定数である。ここに各要素間に次の関係が存在する。すなわち

$$d_1 = \frac{\sqrt{\sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \cos \alpha \sin(\alpha + \beta)}}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$d_2 = \sin \beta \operatorname{cosec}(\alpha + \beta), \quad d_3 = \sin \alpha \operatorname{cosec}(\alpha + \beta)$$

$$\theta_1 = 180^\circ - (\alpha + \beta), \quad \theta_2 = \beta + \tan^{-1} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \beta \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta)}$$

$$\theta_3 = \alpha - \tan^{-1} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \beta \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta)}$$

2本の位置の線の精度が良くて他の1本が悪い場合、悪い1本が円半径に与える影響は少ないが、2本が悪い場合は良い1本の効力は無視された格好となる。

3. 2 方位線による測定船位

3. 2. 1 3 定点の回りにおける半径等価線図

3物標の配置は無数に考えられるが、代表例として、Fig. 8 に示すように3点が一直線上にあり、かつ $AB = AC$ なる場合について吟味した。 $d_1, d_2, d_3, \alpha, \beta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ を図のように測り、 $AB = AC = 1$ とおき、方位線の標準偏差を 1° とすれば、95%確率円の半径は

Fig. 8. Relation between observation point and three objects.

Fig. 11. Radius of 95% probability circle for fixed position by three compass bearings corresponding to every case.

Fig. 9. Accuracy contour for three compass bearings.
($AB=AC=1$)

したがって α と β を与えれば半径は計算されるが、その結果を等価線図として図示したのが Fig. 9 である。

3. 2. 2 一直線上に物標が存在する場合

Fig. 10 において、測点を O (定点), 定直線 LL' 上

Fig. 10. Relation between observation point and three objects.

に無数に物標が存在するものとし、O より LL' に至る垂直距離を ℓ (定長), LL' 上に任意に 3 物標 A, B, C をとる。

$d_1, d_2, d_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \epsilon$ を図のように測り, ℓ を単位にとって 1 とおき, 方位線の標準偏差を 1° とすれば, 95% 確率円の半径は

$$R = 0.01745K \sqrt{\frac{\sec^2(\theta_3 - \epsilon) \sec^2 \epsilon + \sec^2(\theta_1 + \epsilon) \sec^2 \epsilon + \sec^2(\theta_1 + \epsilon) \sec^2(\theta_3 - \epsilon)}{\sec^2(\theta_3 - \epsilon) \sin^2 \theta_1 + \sec^2 \epsilon \sin^2 \theta_2 + \sec^2(\theta_1 + \epsilon) \sin^2 \theta_3}}$$

で表わされ, K は

$$\sin^{-1} \frac{2 \sec(\theta_3 - \epsilon) \sec \epsilon \sec(\theta_1 + \epsilon) \sqrt{\sec^2(\theta_3 - \epsilon) \sin^2 \theta_1 + \sec^2 \epsilon \sin^2 \theta_2 + \sec^2(\theta_1 + \epsilon) \sin^2 \theta_3}}{\sec^2(\theta_3 - \epsilon) \sec^2 \epsilon + \sec^2(\theta_1 + \epsilon) \sec^2 \epsilon + \sec^2(\theta_1 + \epsilon) \sec^2(\theta_3 - \epsilon)}$$

に対する比例定数である。ここに測点を定点と扱っているので, $\theta_1, \theta_3, \epsilon$ を与えれば半径は計算される。その場合 θ_1, ϵ は可変量であるので無数にとり得るが, 概括的に捉える立場から 10° 間隔とした。そしてその結果を示したのが Fig. 11 である。

4. 結 言

2 本または 3 本の異精度の位置の線による 確率楕円を 2 本の等精度の位置の線による 確立楕円に置き換えることにより, 比較的容易に 95% 確率円の半径を計算することができた。

異精度の位置の線による測定船位の誤差界を考える場合, 楕円の長半径, 短半径を計算しても, 作図のためには更に軸方向の計算を行わなければならない煩雑さが残る。

これに対して確率円を描くには半径を求めればよいのであるから比較的簡単である。また誤差界を単一量で表示するので, 楕円の 3 要素に比べれば概念的に捉えやすい利点をもつ。したがって理論的には楕円方式による表示法が優れているが, 実用的な観点よりすれば円方式による表示はその簡便さが評価されるものと考えられる。

参 考 文 献

- 1) 平岩 節, 測定船位に関する 95% 確率円について, 日航海誌 35, 13—17, 1966.
- 2) 平岩 節, 95% 確率円方式による船位誤差界について, 同誌 36, 119—125, 1967.
- 3) 平岩 節, 三本の位置の線による船位誤差界の実用解, 同誌 19, 11—17, 1958.
- 4) Hiraiwa, T., On the 95 per cent probability circle of a vessel's position—II, J. Inst. Navig., 33, 223—226, 1980.