鏡像法による Slip 内波高分布の数値計算手法

榎木 亨*・久保 雅義**

Computations of Wave Height Distribution in
a Slip by Mirror Image Method

Toru SAWARAGI and Masayoshi KUBO

Abstract

It is well-known that a computer with a very large memory size is required to calculate wave height distributions in a slip in case of short-period waves. So, even if it is basically possible to calculate the wave height distributions in the slip, it is occurred to be practically impossible to calculate them. In this paper, the necessary memory size of the computer are decreased by the use of the mirror image method and a few problems of this method are also discussed.

1. 緒 言

Slip 内に係留した船の短周期船体運動を計算する場合には散乱波の速度ポテンシャルも求めなくてはならないためにその計算機容量は非常に大きくなり、このために理論的には計算可能であっても実質的には計算不可能となる場合が生じる。このために必要な計算容量を低減化することも実用上重要な問題となる。著者らは先に Slip 内の浮体運動に鏡像法を用いて解析することにより計算容量を減少することを提案したが⁽¹⁾、本論でも同様に鏡像法を用いて Slip 内の波高分布を求める手法を提案し、従来からある Lee の方法⁽²⁾と計算容量および計算時間の面より比較しここで提案する鏡像法による波高分布計算手法の有意性について報告する。

2. 鏡像法による理論解析

2.1 理論の概要

Slip 内での波高分布を求めるに当たって領域を図1のように Slip の外の領域 I と、Slip 内の領域 II に分割する。それぞれの領域における速度ポテンシャル Φ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_I &= \frac{g\zeta_0}{\sigma} \{f_0(x, y) + f_1(x, y)\} \cdot \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \\ \Phi_{II} &= \frac{g\zeta_0}{\sigma} \cdot f_2(x, y) \cdot \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに f_0 は入射波と反射波の合成されたものであるが、入射波を次式で与えるとき、

$$\zeta = \zeta_0 \exp \{-i(kx \cos \omega + ky \sin \omega + \sigma t)\} \quad (2)$$

f_0 は式 (3) のように表わされる。

$$f_0(x, y) = -2i \cos(ky \sin \omega) \exp(-ikx \cos \omega) \quad (3)$$

ここに k は波数、 g は重力加速度、 ω は図1で定義される波

図1 Slipの領域分割と各境界の分割個数

* 正会員 大阪大学工学部 (吹田市大字山田上)

** 正会員 神戸商船大学 (神戸市東灘区深江南町5丁目1の1)

の入射角, σ は波の角周波数, h は水深を表わす。 f_1 および f_2 はグリーンの公式より次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &= -\varepsilon \sum_{j=1}^{M_1} \{ \bar{A}_{xj} f_1(j) - A_{xj} \bar{f}_1(j) \} \\ f_2(x, y) &= -\varepsilon \sum_{j=1}^N \{ \bar{A}_{xj} f_2(j) - A_{xj} \bar{f}_2(j) \} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに M_1 は Slip の入口の分割個数を, N は Slip の全境界の分割個数を示す。さらに ε は計算点 (x, y) が領域の内部にある時には $1/2$ となり, 境界上にある時には 1 となる記号である。今グリーン関数として次式の関係を満足するものを選ぶ。

$$\bar{A}_{ij} = 0 \quad \text{on } C_2, C_3, C_4 \quad (5)$$

ここに C_{2-4} は Slip の入口 (これを C_1 とする) を除く Slip の境界を示している。この時, 岸壁での境界条件より次式が成立する。

$$\bar{f}_2(j) = 0 \quad \text{on } C_2, C_3, C_4 \quad (6)$$

以上の2式を式(4)に代入すると f_2 に関する積分領域は $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ から C_1 のみへと減少し次式に書き改められる。

$$f_2(x, y) = -\varepsilon \sum_{j=1}^{M_1} \{ \bar{A}_{xj} f_2(j) - A_{xj} \bar{f}_2(j) \} \quad (7)$$

そこで次に入口以外で $\bar{A}_{ij} = 0$ を満足するようなグリーン関数 A_{ij} を鏡像法により求めることにする。境界 C_1 の鏡像を求めると, 図2のように向い合う岸壁が存在するために鏡像は無限個となる。そこでこの時のグリーン関数は次式で与えられることになる。

$$\left. \begin{aligned} A_{xj} &= \lim_{q \rightarrow \infty} \int_{\Delta S_j} -\frac{ik}{2} \sum_{m=-q}^q \sum_{p=1}^4 H_0^{(1)}(kr_{pm}) dS \\ \bar{A}_{xj} &= \lim_{q \rightarrow \infty} \int_{\Delta S_j} \frac{ik}{2} \sum_{m=-q}^q \sum_{p=1}^4 H_1^{(1)}(kr_{pm}) \frac{\partial r_{pm}}{\partial n} dS \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに $\bar{A}_{xj}$ の bar は法線方向の微分を表わし, $H_0^{(1)}$ および $H_1^{(1)}$ はハンケル関数, r_{pm} は計算点と境界上の点との距離, n は法線方向を表わす。グリーン関数を4種類 ($p=1 \sim 4$) の鏡像に分けたのは, 図2で示した鏡像が類別化できるためである。そこで次に4種類の鏡像に関連する記号の説明を行なう。

$p=1$ の鏡像群

$$\left. \begin{aligned} x_{1m} &= x_j + 2ml_s, & y_{1m} &= y_j \\ r_{1m} &= \sqrt{(x_{1m} - x)^2 + (y_{1m} - y)^2} \\ \frac{\partial r_{1m}}{\partial n} &= -\frac{y_{1m} - y}{r_{1m}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$p=2$ の鏡像群

$$\left. \begin{aligned} x_{2m} &= -x_j + 2ml_s - l_s, & y_{2m} &= y_j \\ r_{2m} &= \sqrt{(x_{2m} - x)^2 + (y_{2m} - y)^2} \\ \frac{\partial r_{2m}}{\partial n} &= -\frac{y_{2m} - y}{r_{2m}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$p=3$ の鏡像群

$$\left. \begin{aligned} x_{3m} &= -x_j + 2ml_s - l_s, & y_{3m} &= -2d_s - y_j \\ r_{3m} &= \sqrt{(x_{3m} - x)^2 + (y_{3m} - y)^2} \\ \frac{\partial r_{3m}}{\partial n} &= \frac{y_{3m} - y}{r_{3m}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

図2 Slip 内のすべての岸壁に鏡像法を適用した場合の鏡像とその類別化

$p=4$ の鏡像群

$$\left. \begin{aligned} x_{4m} &= x_j + 2ml_s, & y_{4m} &= -2d_s - y_j \\ r_{4m} &= \sqrt{(x_{4m} - x)^2 + (y_{4m} - y)^2} \\ \frac{\partial r_{4m}}{\partial n} &= \frac{y_{4m} - y}{r_{4m}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここに l_s は Slip の半幅, d_s は Slip の長さを表わしている。式 (8) から式 (12) で与えられるグリーン関数が、先に述べた式 (5) の条件を満足することは式 (7) の $f_2(x, y)$ を Slip の境界 $C_2 \sim C_4$ 上で法線方向に微分することにより容易に確認することができる。

つぎに港口での境界条件として圧力および流速の連続性より次式が与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_I &= \Phi_{II} \\ \frac{\partial \Phi_I}{\partial n} &= \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial n} \end{aligned} \right\} \quad \text{on } C_1 \quad (13)$$

上式に式 (1) を代入すると、式 (13) は次式のように書き改められる。

$$\left. \begin{aligned} f_0 + f_1 &= f_2 \\ \frac{\partial(f_0 + f_1)}{\partial n} &= \frac{\partial f_2}{\partial n} \end{aligned} \right\} \quad \text{on } C_1 \quad (14)$$

海岸線が直線の場合には次式が成立する。

$$\frac{\partial f_1}{\partial n} = \frac{\partial f_2}{\partial n} \quad \text{on } C_1 \quad \left(\because \frac{\partial f_0}{\partial n} = 0 \right) \quad (15)$$

式 (4), (14) および (15) の関係より、港口での $f_2(i)$ は次式で与えられる。

$$f_2(i) = f_0(i) + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{M_1} H_0^{(1)}(kr_{ij}) \cdot k \bar{f}_2(j) dS \quad i=1, \dots, M_1 \quad (16)$$

式 (7) と式 (16) とより境界 C_1 上での f_2 と $\bar{f}_2$ とが求められる。これらが与えられると、Slip 内部での波高は式 (7) で $\varepsilon=1/2$ として与えられる。

この場合の未知数の個数は港口の分割個数の2倍、すなわち $2M_1$ で、Lee の方法の場合には $2N$ であるので、必要な計算機容量はほぼ $(M_1/N)^2$ に減少するという利点がある。一例として Slip 長が Slip 幅の2倍の場合には、鏡像法で計算する場合に必要な計算機容量は $1/30$ 程度になる。

鏡像法にはこのような利点がある反面、 A_{ij} や $\bar{A}_{ij}$ が無限級数となるので、この点の扱いが問題となる。次にこの無限級数の取扱いについて検討を行なう。

2.2 無限級数で表わされるグリーン関数の取扱いについて

式 (8) で与えられるグリーン関数 A_{xj} および $\bar{A}_{xj}$ は無限級数で表わされる。そこで横軸に鏡像の個数 m を、縦軸に鏡像の個数が m 個の場合のグリーン関数 A_{xj}^m , $\bar{A}_{xj}^m$ を表わすと図3となる。これは I 点が1, J 点が1で、 $kd_s=18.33$ の場合の一例であるが、これより A_{ij}^m および $\bar{A}_{ij}^m$ は鏡像の個数 m をかなり多くとってもなかなか収束しないことが明らかになる。 $\bar{A}_{ij}^m$ は A_{ij}^m よりも早く収束するが、これは $\bar{A}_{ij}^m$ がハンケル関数以外に r^{-1} のオーダーをもつ $\partial r / \partial n$ の項を含むためである。実用的な観点からすると、最終状態まで収束させると計算時間がかかりすぎるので、ここでは便宜的に図3において第3ピークより第5ピークまでの A_{ij}^m および $\bar{A}_{ij}^m$ をそれぞれ平均することにより A_{ij} および $\bar{A}_{ij}$ を推定し、

図3 鏡像の個数とグリーン関数の関係

図 4 折衷法における鏡像と境界の分割個数

これらの推定値を用いて計算を行なっている。

3. 折 衷 法

以上からも明らかなように境界が平行に向い合っているとき、この2つの境界を積分領域から消去するために鏡像法を適用すると、鏡像の数が無限個となり、そのため計算時間が長くなって好ましくない。そこで平行に向い合う境界をつくらないために図4に示すように境界 C_2 と C_3 についてのみ鏡像法を適用すると、この時の鏡像は図4に示すように3個となる。これであれば、境界 C_2 , C_3 , C_4 に鏡像法を適用した場合より計算機容量は少し増加するけれども、鏡像の数が有限個であり、収束の問題もなくなる。この場合に必要な計算機容量は Lee による計算法の $1/4$ となる。この方法は Lee による方法と鏡像法 (Slip 内の岸壁にすべて鏡像を適用した場合を以下鏡像法と呼ぶ) とを折衷した方法であるという意味で著者らはこの方法を折衷法と名付け Slip の波高分布を計算する第2の方法として採用している。この計算法の場合には積分領域が C_1 から C_1+C_4 へ増加することと、鏡像が無限個から4個へ減少することとを除けば計算方法は2.で述べた方法と全く同様である。すなわち、折衷法の場合式(7)は次式で表わされる。

$$f_2(x, y) = -\varepsilon \sum_{j=1}^{M_1+M_4} \{ \bar{A}_{xj} f_2(j) - A_{xj} \bar{f}_2(j) \} \quad (17)$$

ここに M_4 は境界 C_4 の分割個数である。さらに式(8)は次式のように簡単な式で表わすことが可能となる。

$$\left. \begin{aligned} A_{xj} &= \int_{AS_j} -\frac{ik}{2} \sum_{p=1}^4 H_0^{(1)}(kr_p) dS \\ \bar{A}_{xj} &= \int_{AS_j} \frac{ik}{2} \sum_{p=1}^4 H_1^{(1)}(kr_p) \frac{\partial r_p}{\partial n} dS \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

以上2つの式の変更を除けば折衷法の計算は2.の場合と全く同様である。

4. Lee による計算方法との比較

著者らは前報⁽³⁾において Slip 内の波高分布に関して実験を行ない、その実験結果と Lee の手法による数値計算結果との比較を行なった。そこで前報における実験および数値計算結果と今回新たに提案した鏡像法および折衷法による数値計算結果を比較し、各種計算手法の持つ利点と欠点を明らかにしてみよう。

図5は波が $\omega=45^\circ$ で Slip に侵入してくる場合の Slip 内の波高分布を示している。座標系は図1の定義に従っているので、例えば図5で $X=87\text{ cm}$ の場合は岸壁に沿っての波高分布を示している。図の縦軸は計測点での波高を入射波高で無次元化した値を示している。図中の黒丸は実験値を、 $\oplus$ 印は鏡像法を、 $\circ$ 印は折衷法を、実線は Lee による方法を用いて計算した結果である。まず3つの数値計算結果を比較すると、折衷法と Lee の方法はほとんど一致するが、鏡像法はこれら2つの方法とは少しずれることがわかる。これは無限級数の形で表わされるグリーン関数の決定精度と関連しているものと考えられる。つぎに実験値と計算値とを比較すると、実験値の方が計算値よりも若干大きい、その増幅傾向などにおいて両者はほぼ一致していると判断してさしつかえない。

図6は入射角 ω が 90° の場合の Slip 内の代表点における波高の周期応答特性を示したものである。図中横軸は波の周期を、縦軸は波高の振幅増幅率を示している。図中の記号は図5と全く同様である。図5の場合と同様に3つの数値計算結果はほぼ一致するのがわかる。

前報において著者らは Lee の方法で Slip 内の波高分布を求める場合、岸壁近傍で誤差を生じるために誤差修正を行なわなくてはならないことを指摘した。そこで今回提案した鏡像法や折衷法についても岸壁近傍での計算波高について検討を加えてみる。

図5 波の入射角 $\omega=45^\circ$ の場合における Slip 内波高分布の実験値 (●), Lee の計算法 (実線), 鏡像法 (○) および折衷法 (○) による計算値の相互比較

図7の点線は同図中に示した長さ d_s , 幅 $2l_s$ のスリップにおいて $X=0$ の測線で Y を $-0.95d_s$ から $-d_s$ まで変化させた時の Lee による内部点としての計算波高 H と $X=0, Y=-d_s$ の周辺上の波高 H_b との比を示したものである。このように内部点における計算波高は内部点が境界 ($Y/d_s=-1$) に近づくにつれて急激に増大し、周辺上の波高 H に収束しないことは既に前報において指摘した通りである。実線は Lee の方法に誤差修正を加えた場合の計算結果である。さらに一点鎖線は今回提案した鏡像法および折衷法による

図6 Slip 内の代表点における波高の振幅増幅率の実験値 (●), Lee の計算法 (実線), 鏡像法 (○) および折衷法 (○) による計算値の相互比較

示したものである。このように内部点における計算波高は内部点が境界 ($Y/d_s=-1$) に近づくにつれて急激に増大し、周辺上の波高 H に収束しないことは既に前報において指摘した通りである。実線は Lee の方法に誤差修正を加えた場合の計算結果である。さらに一点鎖線は今回提案した鏡像法および折衷法による

図7 内部点が境界に近づいた時の Lee 法 (点線), 修正 Lee 法 (実線), 鏡像法 (一点鎖線), 折衷法 (一点鎖線) による計算結果の相互比較

計算結果（両者はほとんど一致する）であるが、これによれば誤差修正を行わなくても内部点は境界上の値に滑らかに収束していることが判明する。これは鏡像法や折衷法の場合、たとえ計算点が岸壁近傍にあっても、図 2 および図 4 より明らかなように計算点は鏡像としての境界からはかなり離れるために、各 mesh を見込む角は充分小さくなり誤差が生じないものと考えられる。

図 8 の点線は内部点を岸壁に沿って $X = -0.99l_s$ の沿線で Y を $-0.55d_s$ から $-0.11d_s$ まで変化させた時

図 8 内部点が岸壁に沿って移動した時の Lee 法（点線），修正 Lee 法（実線），鏡像法（実線），折衷法（一点鎖線）による計算結果の相互比較

の Lee による計算波高 H と $X = -l_s$, $Y = -d_s/12$ の境界上の波高 H_0 との比を示したものである。この場合も図 7 の場合と同様に Lee の方法ではかなり大きな誤差を生じている。実線は Lee の方法に誤差修正を行なった場合，および鏡像法による計算結果で，一点鎖線は折衷法による計算結果である。

以上図 7 と図 8 より岸壁近傍での計算精度は Lee の方法より鏡像法および折衷法の方がすぐれていることがわかる。

5. 結 論

以上鏡像法および折衷法による Slip 内の波高分布に関する数値計算手法について検討を加えてきた。得られた結果を要約すれば次のとおりである。

- (1) 港口の分割個数を M_1 , Slip 全体の分割個数を N とすれば，鏡像法を用いて計算を行なう時に必要な計算機容量は Lee の方法で必要な容

量の約 $(M_1/N)^2$ となる。

- (2) 鏡像法は計算機容量の低減化に関しては非常に有利であるが，グリーン関数が無限級数となるために計算時間が長くなる欠点がある。
- (3) 鏡像法を適用するに当たって向合う境界には鏡像法を適用しない場合を著者らは折衷法と名付けたがこの場合の計算容量および計算時間はそれぞれ $1/4$ および $1/3$ となることが判明した。
- (4) Lee の方法では岸壁の近くでの波高を計算する場合かなり大きな誤差が生じ，そのための修正を行わなくてはならなかったが，鏡像法および折衷法ではこのような問題は生じなかった。

最後に本研究を行なうに当り御援助いただいた大阪大学院生青木伸一君に感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- (1) 榎木 亨・久保雅義：荷役限界からみた港内静穏度に関する研究—直線岸壁および Slip 内係留船の運動特性—第 27 回 海岸工学講演会論文集，pp. 307-311, 1980
- (2) Lee, Jinn-Jen: Wave induced oscillation in harbors of arbitrary shape, Calif. of Tech., 1970
- (3) 榎木 亨・久保雅義：Slip 内の波高分布に関する二，三の考察，日本航海学会論文集，pp. 97-106, 1980

質 疑 応 答

井上篤次郎：境界で発散する Lee の方法より格段に改善されていますが，比較された実測値はどのように測られたものか。

久保 雅義：図 5 の実測は沖波の周期と波高を一定にしておき，図 9 に示すように Slip の左半分には 5 本の波高計を 22 cm 間隔で set し，まず ① の位置において波高の計測を行ないました。次に造波機の動きを止め，5 本の波高計を ① より $d_s/20$ (≈ 17 cm) 離れた ② に set し，波が静まってから，沖波を起し，第 2 回目の計測を行なっています。以下このような繰り返しにより Slip 内の波高分布を求めました。この場合波高計の

図 9 Slip 内波高分布の測定場所と測定方法

図 10 Slip 内の代表点における波高の周波数応答の測定場所

間隔は 22 cm となりますが、波高計間の相互干渉がないことを事前に調べました。

図 6 の実測は図 10 のように波高計を設置し沖波の周期を変えて計測を行ないました。