最短時間航法と各種航法との比較 I

—岸に平行な水流の横断—

広田 実*・永野 重隆**

Comparison between Time Optimal Routing and Other Traditional Methods—I

Crossing over Currents Parallel to the Shore Line

Minoru HIROTA and Shigetaka NAGANO

Abstract

Is the optimal routing always best? Its course usually is given as a function of time, therefore, if the currents and winds differ from their forecast conditions, we have no idea how to correct the given course. Secondly, the running time across the currents by the time optimal routing is not always considerably shorter than by traditional navigation methods. What is the best way depends on the circumstances. The authors discuss the points, and give graphs comparing the crossing time over currents between the time optimal routing and other methods.

1. は し が き

電子計算機の発達に伴い、省エネルギーに関する最適航法の報告が多数なされ^{(1)~(8)}、大洋航海では時間短縮が数%であっても利益が大きいのでよく利用されている。

しかしながら、沿岸航法を主とするとき、いわゆる最適航法を用いていないことも事実である。それは在来航法の便利さと、最適航法より得られる利益とのバランスに立って判断を下しているのであろう。そこで筆者らはこの判断の資料となるデータを得る目的で、各種の水流パターンにおける航海時間を理論計算して比較してみることにした。状況は複雑であるから、風浪を無視して水流に限ってある。水流分布の形は複雑であろうが、これらを主な特徴に注目して分類し、流速も弱より強に変えて比較を行なう。

各種航法としては、最適航法のうち最もよく研究されている最短時間航法をとってある。在来航法としては直行航路（直線）と直視航法（残航程最小）および固定針路である。

大まかに言って、航路にほぼ直角の流れのある場合、すなわち海峡や河川を横断するとき、平均流速が船速の1/4以下ならば、在来航法による航海時間が最短時間航法のそれより5%以上延長されることは殆どない。したがって、これをめどに安心して在来航法の便利さをとればよいと考える。（渦状の流れや、湧き出し口のある場合も興味があるが、今回は触れない。）

2. 各種航法の特徴

各種航法の特徴をまとめて表1に示す。

平面上に水流のある場合を考える。図1に示すように、航海術の慣行により方位は北より時計まわりに測るも

* 正会員 神戸商船大学（神戸市東灘区深江南町 5-1-1）

** 正会員 鳥羽商船高等専門学校（三重県鳥羽市池上町 1-1）

表 1 最短時間航法と各種航法の比較

記号	名 称	特 徴	水流情報	難 点	長 所
A	最 短 時 間 航 法	出力一定で時間最小	既 知	針路は時間の関数予想外の水流に対し針路修正法が不明	時間最短 燃料節約
B	固定針路	針 路 一 定	既 知	"	最も操船が簡単 時間のロスが少ない
C	直行航路	航 跡 直 線	未 知	逆流が強すぎると航路を外れてしまう	普通の航法で、水流を測定して針路を修正 障害物を避航するのに便利
D	直視航法	たえず目標に船首を向ける	未 知	目標近傍の水流が船速を越えたと到達不能	ヨットなど小人数で未知の水流を横断するのに有利

図 1 水流と船の運動

のとする。一定速力 V の機船が針路 θ で航走中に、 x 方向（東）に $u(x, y)$, y 方向（北）に $v(x, y)$ の水流を受けているとき、地表に対する船位 x, y の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= V \sin \theta + u(x, y) \\ \dot{y} &= V \cos \theta + v(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

通常、船は針路を変えつつ点 $O(x_0, y_0)$ より点 $P(x_P, y_P)$ に航行している。

〔A〕最短時間航法〔付 1, 2, 3〕航海時間 T を最小にする航法では、式 (1) と (2) を組み合わせ、連立微分方程式を解いて、針路 θ を時間の関数として得る。

$$\dot{\theta} = (\partial u / \partial y) \sin^2 \theta + \{(\partial v / \partial y) - (\partial u / \partial x)\} \sin \theta \cos \theta - (\partial v / \partial x) \cos^2 \theta \quad (2)$$

この場合点 O を発し点 P を通るよう繰返し計算で逐次近似を行なう。

この過程からわかるように、最短時間航法は出港前に水流分布が予測できることを前提としている。なお、また針路 θ は時間の関数として与えられているので、水流分布が予想と異なっているとき、どのように変針すればよいか判断できないことが大きな欠点である。勿論、この時点でそれ以後の航路周辺の水分布が予測できれば、改めて、現位置以後の最適航路を再計算すればよい。この場合、全体としてみると最適航路から若干のズレを起してしまう。

〔B〕固定針路 針路 θ を一定とし、点 O を発する航路を多数描き、そのうち点 P を通るものを探して、固定針路 θ_0 が得られる。

この航法も事前に水流情報が明らかである必要がある。また予測と異なったときの針路修正法も不明である。

当直航海士にとって最も簡単な航法である。今回比較の場に選んだ岸に平行な水流が時間的に不変のとき、航海時間は最短時間航法とあまり変わらない。したがって同一水路を多数回往復する船にとっては有利な方法であろう。

〔C〕直行航路〔付 4〕これは常用航法といってよい。海図上で最短通路を設定し、これにのせて航行する。幾何学的な最短通路を選ぶことが多いので、大洋航海では大圏で、沿岸航海では直線である。

式 (1) の中の針路 θ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \alpha + \sin^{-1} [(v/V) \sin \alpha - (u/V) \cos \alpha] \\ \alpha &= \tan^{-1} [(x_P - x) / (y_P - y)] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

船位決定の結果から Lee Way を求め、たえず針路を補正する。すなわち、航路付近の外乱の影響をたえず測定し、航海士の判断で航路設定ができる。この航法は浅瀬、危険物、他船の航路、強い水流をあらかじめ避けるのに有効である。

〔D〕直視航法〔付 5〕たえず残航程が最小になるよう針路をきめる。式 (1) の中の針路を次式で与える。平面のとき、

$$\theta = \tan^{-1}[(x_P - x)/(y_P - y)] \quad (4)$$

これは目標が視認できるとき、船位決定の必要もなく、ただ目標に船首を向けるだけでよいので、仮りに直視航法と名付けた。(もちろん大洋航海では大圏航路になる。)

水流や風浪があっても、目標方向への対地速力が 0 または負にならない限り必ず目標に達することができる。航行中の外乱の影響を最も簡単な方法で補正して針路をきめ得るから水流や風浪が不明のとき便利である。レジャーボートの航法も殆ど全部これであろうし、大型船も入港時や海峡通過のとき用いている。水流や風浪がなければ勿論最短時間航法に一致する。これらの便利さから、この航法の航路を解析した例が報告されている^{(4),(5)}。

以上述べた各種航法の特徴を表 1 にまとめて示す。これらの優劣の比較は数量化することは困難で、質的な差と言わねばならない。つぎに、岸に平行な水流を横断する時間の数量的比較を考えてみる。以下では連立微分方程式をルンゲ・クッタ法で解き、理論解の得られる場合はこれと比較し、誤差が微小なことを確かめた。解の正確さを重視するため、D.P. は使わない。

3. 岸に平行な水流の横断時間の比較

3.1 無次元化

比較を行なう水流の場を、一定幅の河川で岸に平行な流れがあり、 $u=u(y)$ で表わされる場合に限定する。また比較を容易にするため無次元化を行なう。

図 1 において、出発点 O から最も近い対岸の点を Q とし、 OQ 間の距離を D とする。水流速さを船速 V との比 u/V で表わす。距離の単位を D とすると、時間の単位は D/V となる。この結果、船速 1 の船が河幅 1 の河川を流れの無いとき時間 1 で横断する。到達点が異なり、水流があれば、航行時間は必ず 1 より大きくなる。

無次元化により、例えば最短時間航法の計算式 (1), (2) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \sin \theta + u(y) \\ \dot{y} &= \cos \theta \\ \dot{\theta} &= (\partial u / \partial y) \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに $\partial u / \partial y$ も無次元化されている。この式からわかるように流れの勾配 $\partial u / \partial y = 0$ のとき、即ち一定の流速あるいは流れのないとき、 θ

は一定である。また $\theta = 0^\circ$ で流れに直角に航行するときも針路は一定である。

3.2 水流のパターン

あらゆる形の流速分布で航海時間を比較することはできないから、大きな特徴をもつ数種類に分類し、代表的な流速分布をとり上げる。分類には (i) 流速に不連続があるかどうか (ii) 一方向のみか、左右の流れがあるかに注目する。こうして分類した水流パターンを表 2 に示す。

河の流れを最も単純化したのが (a) 型の一様な流れである。(b) 型は岸からの距離に比例して水流が強くなり、対岸で最大になる極

表 2 水流パターンの分類 (水流の強さは絶対値平均 $|\bar{u}|$ で分類)

	不連続	連続		
不平衡型		$u = \bar{u}$ (a)	$u = 6\bar{u}y(1-y)$ (c)	$u = \begin{cases} 4\bar{u}(1-y) \\ 4\bar{u}y \end{cases}$ (d)
混合型	$u = \begin{cases} 2\bar{u} \\ 0 \end{cases}$ (e)	$u = 2\bar{u}y$ (b)
平衡型	$u = \begin{cases} \bar{u} \\ - \bar{u} \end{cases}$ (e)			$u = \bar{u} \frac{\pi}{2} \times \sin(2\pi y)$ (f)

水流の式を 2 つ与えてあるときは、上段が $(0.5 < y \leq 1)$ 下段が $(0 \leq y \leq 0.5)$ に適用される。

端な例である。(c) (d) 型は河川の実情に近いものとする。型 (e) (f) は途中で流向が逆転するものである。

3.3 平均流速

針路 $\theta=0^\circ$ で河川を横断する船に働く流速の絶対値を全航行時間で平均して平均流速と名付ける。平均流速が 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1 などについて航行時間を比較する。

水流が平行であるから、水流が一方向のとき、平均流速は $\theta=0^\circ$ で流れを横断した船の流下距離に等しい。そこで平均流速 $\bar{u}$ を入れて、流速分布の式を作っている。例えば表 2 の中にある二次式の流速分布の式は

$$u(y)=6\bar{u}y(1-y) \quad (6)$$

となっている。式 (5) より得る

$$\dot{y}=1, \quad \dot{x}=u(y)$$

を用いて計算すれば

$$\text{平均流速} = \int_0^1 \dot{x} dt = \int_0^1 u(y) dy = 6\bar{u} \int_0^1 y(1-y) dy = \bar{u} \quad (7)$$

左右に流れ、平均して 0 となるときを平衡型と名付けたが、この場合、流速絶対値の平均をとると $|\bar{u}|$ が得られるよう流速分布の式を作っている。

3.4 固定針路による河川の横断

固定針路の場合、横断時間 T と到達点 P の x_P が簡単に計算できるので比較対照の基準にとる。式 (5) において θ を一定とすれば

$$y_P=1=\int_0^T \cos \theta dt = T \cos \theta \quad \therefore T = \sec \theta \quad (8)$$

$$x_P = \int_0^T (\sin \theta + u(y)) dt = \tan \theta + \bar{u} \sec \theta \quad (9)$$

水流を横断する時間 T と到達点の x 座標 x_P とを図 2 に示す。水流パターンが平衡型では、左右の流れは

図 2 固定針路による横断時間 T と到達点の x 座標

消し合うから、同図 (i) に示すように水流の強さに無関係である。平衡型以外では一方向に流されるので、 x_P と T の関係は流速の影響を受ける。同図 (ii) は $\bar{u}=0.25$ である。同図 (iii) は $\bar{u}=1.0$ のときで、正面に到達する時間は無限大で、上流 (左側) には到達できないことを示している。

4. 水流パターンごとの各種航法の比較

4.1 横断時間の比較

水流のない場合はどの航法によっても横断時間は変わらないから図 2 (i) で示される。これ以外の場合を、表 1 の各種航法 A, B, C, D, 表 2 の水流パターン a, b, c, d, e, f および絶対値平均流速 $|\bar{u}|$ によって分類したのが図 3 である。

同図 (a) は一定流速のときで、 $\bar{u}=0.25$ と 0.5 の場合を示す。いずれの場合も直視航法 D 以外は重なってしまう。

同図 (b) 以下の水流パターンでは最短時間航法 A (点線) の左右が示されていないが、これは出発針路を 10° きざみにしたため、計算してない部分で、到達不能域があるわけではない。つぎに直行航路 C では水流が強くなると予定した直線の航路にのせることができないため、到達時間が得られない部分ができる。

図 3 各種航法による横断時間 T と到達点の x 座標

A: 最短時間航法, B: 固定針路, C: 直行航路, D: 直視航法

全体を通観すると、航行時間は最短時間航法 A が最短である。固定針路 B がこれについて短い場合が大部分である。つぎに平衡型的水流 (e) (f) では直視航法 D が直行航路 C より航行時間が短い。これ以外の不平衡型的水流 (a) (b) (c) (d) では逆に C が D より短時間の場合が大部分である。例外は (c) (d) で途中で強い水流がある場合で、特に (d) で $\bar{u}=0.5$ では最大流速が船速に一致し上流 (左方) に行けなくなる。

4.2 総合的比較

流速が強くなるにつれて各種航法の差が大きくなり、水流パターンごとに優劣も入れ替わる。これらの結果から、航法選択の指針を得るとすれば、つぎのことが言えよう。

- (i) 絶対値平均流速が 0.25 (船速の 1/4) 以下のとき、(b) (f) を除いて横断時間が 5% を越える在来航法は殆どない。河川や海峡の実情に近い (c) (d) では特に出発点正面付近で時間の延長は小さい。例外的な (b) は到達点で水流が最大であり、(f) は水流が途中で反転するばかりでなく、最大流速が大きい特殊な例である。
- (ii) 最短時間航法 A は当然のことながら横断時間が最も小さい。次に固定針路 B の時間延長が意外に小さい。このことは河川または海峡を多数回横断する船は、経験的に固定針路を見出すと大きな利益を生む可能性を意味する。平均流速がわかれば式 (9) から固定針路 θ_0 を求めることができる。
- (iii) 直行航路 C は全体の時間延長が大きくないので有効な航法である。水流分布が未知のとき、これを測定しながら針路を定めていく。船の航路を初めに設定しているから、危険区域を回避するのに最も有効である。目標の逆方向の水流が船速より大きいときは予定航路を保つことはできないので、事前に分っていればこの海域を迂回すればよい。
- (iv) 直視航法 D は平衡型水流のとき時間ロスが小さいが、不平衡型のときは他の航法に比べ最も時間ロスが大きい。とくに目標近傍の水流が船速を越えると致命傷になる。この航法は水流が未知でも船速が大きければ目標に達し得るので、レジャーボートや航洋船でも出入港その他に有効な方法である。

5. 結 論

岸に平行な水流を横断する時間を各種航法について比較した。水流のパターンと平均流速の組み合わせが多数あり、各種航法も 4 種類あるので統一的な結論は狭い範囲になる。(水流パターン (b) は対岸で流速が最大となるので、実情と合わないので除く。)

一般に絶対値の平均流速より船速が 4 倍以上大きければ、在来の航法で正面の対岸に達する横断時間は、最短時間航法に比べ 5% 以上延長することは少ない。極端な水流分布を除くと左右 45° 以内に望む対岸への横断時間の延長は 2~3% 以下である。

5% 程度の時間延長が重きをなさないならば直行航路や直視航法によって航海士が適宜の処置をとり得ることを利用すべきである。また固定針路で横断することも操縦の容易さから良い方法と思われる。

以上のことは定性的にわかっていても、定量化されることは少なかった。

参 考 文 献

- (1) Mark, W. et al.: An Automated System for Optimum Ship Routing, TSNAME, Vol. 76 (1968), p. 22
- (2) 雁野昌明ほか: 理論的限界速度を用いた最適航路計算, 関西造船協会誌, 147 号 (昭 48 年 3 月), pp. 75~82; その 2, 154 号 (昭 49 年 9 月), pp. 3~10; その 3, 156 号 (昭 50 年 3 月), pp. 1~9; その 4, 159 号 (昭 50 年 12 月), pp. 11~18
- (3) 萩原秀樹ほか: 最適航路に関する考察, 日本航海学会論文集, 62 号, 1980
- (4) 谷 初蔵: 流れを横切る船の航跡について, 日本航海学会誌, 4・5 号, 昭 26 年 9 月, pp. 39~48
- (5) 本田啓之輔ほか: 標柱間速力試験における一つの誤差について, Nautical Review, Vol. 1, No. 1, (1949) pp. 6~11
- (6) E. Bryson, Y. C. Ho: Applied Optimal Control, p. 77, p. 105, Ginn and Company, 1969
- (7) 近藤次郎: 数学モデル, p. 413, p. 424, 丸善, 昭 51

〔付録 1〕

最短時間航法の計算式の導出^{(6),(7)}

船は針路 θ を変えつつ、点 O より点 P まで最短時間で航海している。評価関数 J として航海時間 T を選ぶと

$$J = \int_0^T dt = T \rightarrow \text{minimum} \quad (1.1)$$

最大原理により、補助変数 λ_x, λ_y を導入し、ハミルトニアン H を定義する。式 (1) を参照して

$$H = 1 + \lambda_x(V \sin \theta + u) + \lambda_y(V \cos \theta + v) \quad (1.2)$$

針路 θ によって H を最適化すれば

$$\partial H / \partial \theta = 0 = \lambda_x V \cos \theta - \lambda_y V \sin \theta \quad \therefore \lambda_x / \lambda_y = \tan \theta \quad (1.3)$$

補助変数の微分方程式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}_x &= -\partial H / \partial x = -\lambda_x(\partial u / \partial x) - \lambda_y(\partial v / \partial x) \\ \dot{\lambda}_y &= -\partial H / \partial y = -\lambda_x(\partial u / \partial y) - \lambda_y(\partial v / \partial y) \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

式 (1.3) を t で微分して式 (1.4) を代入すると

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \cos^2 \theta (\dot{\lambda}_x - \lambda_x \dot{\lambda}_y / \lambda_y) / \lambda_y \\ \therefore \dot{\theta} &= (\partial u / \partial y) \sin^2 \theta + \{(\partial v / \partial y) - (\partial u / \partial x)\} \sin \theta \cos \theta - (\partial v / \partial x) \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (1.5)$$

式 (1) と (1.5) を連立させて点 $O(x_0, y_0)$ を出発し点 $P(x_p, y_p)$ を通る微分方程式の解を得ればよい。得られた $\theta(t)$ が求める針路の変化である。本文で与えた航海時間は電算機による数値解で、以下に示す理論解と照合し、数値解の精度を確かめるのに使用した。

〔付録 2〕

 $u=u(y)$ の場合の最短時間航法

この場合針路は $\theta(t)$ のみならず $\theta(y)$ として与えられるので、水流に直角に進んだ距離 y によって針路が定まる利点がある。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= V \sin \theta + u(y) \\ \dot{y} &= V \cos \theta \\ \dot{\theta} &= (du/dy) \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

式 (2.1) の第 2, 第 3 式より

$$\begin{aligned} d\theta/dy &= \dot{\theta}/\dot{y} = (du/dy) \sin^2 \theta / (\cos \theta \cdot V) \\ \therefore \int V \cot \theta \operatorname{cosec} \theta d\theta &= \int (du/dy) dy \\ \therefore -V(\operatorname{cosec} \theta - \operatorname{cosec} \theta_0) &= u(y) - u(0) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\therefore \operatorname{cosec} \theta = \{u(0) - u(y)\} / V + \operatorname{cosec} \theta_0 \quad (2.3)$$

式 (2.3) は簡単な式であるから、 $u(y)$ が与えられると、電卓を用いて $\theta(y)$ を計算できる。

〔付録 3〕

簡単な水流の場の最短時間航法の解

水流が一定であるか 0 のとき針路一定になることは本文で述べた。境界をはさんで流速の異なる水流の場があれば、この境界で針路は折れ曲る。針路変化は式 (2.3) で計算できる。

(i) 一定勾配をもって水流速度が変化する場、即ち

$$u(y) = ay \quad (3.1)$$

を考えよう。式 (2.1) に $du/dy = a$ を入れ、式 (2.2) より

$$ay = V(\operatorname{cosec} \theta_0 - \operatorname{cosec} \theta) \quad (3.2)$$

また式 (2.1) の第 3 式より

$$\int \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta = a \int dt \quad \therefore \cot \theta = \cot \theta_0 - at$$

式 (2.1) の第1式より

$$\begin{aligned} dx &= (V \sin \theta + ay) dt = V(\sin \theta + \operatorname{cosec} \theta_0 - \operatorname{cosec} \theta) dt \\ &= V\{\operatorname{cosec} \theta_0 \pm 1/\sqrt{(\cot \theta_0 - at)^2 + 1} \mp \sqrt{(\cot \theta_0 - at)^2 + 1}\} dt \end{aligned} \quad (3.3)$$

複号は $0^\circ < \theta_0 < 180^\circ$ のとき上側, $-180^\circ < \theta_0 < \theta^\circ$ のとき下側である。

$$\begin{aligned} \therefore x &= V \left[\pm \frac{1}{2a} \log \left| \frac{\sqrt{(\cot \theta_0 - at)^2 + 1} + at - \cot \theta_0}{\sqrt{\cot^2 \theta_0 + 1} - \cot \theta_0} \right| + \frac{t}{\sin \theta_0} \right. \\ &\quad \left. \mp \frac{at - \cot \theta_0}{2a} \sqrt{(\cot \theta_0 - at)^2 + 1} \mp \frac{\cot \theta_0}{2a} \sqrt{\cot^2 \theta_0 + 1} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

t を与えれば式 (3.3) より θ が求まり, これを式 (3.2) に入れると y が得られる。式 (3.4) で t を与えれば x を得るので航跡が求まる。

(ii) 横断時間 T を求めよう。 $t=T$ で $y=1$ とすると, 式 (3.2) より

$$a = V(\operatorname{cosec} \theta_0 - \operatorname{cosec} \theta) \quad (3.5)$$

これを (3.3) に代入すると

$$T = [\cot \theta_0 - \sqrt{(a^2/V^2 - 1) \sin^2 \theta_0 - 2a \sin \theta_0 / V + 1}] / a \quad (3.6)$$

図4 最短時間航法の航跡 (各種水流パターン) $\bar{u}=0.75$

この式で $T < 1$ になると題意に合わないから棄てる。また根号内が負になるときも棄てるが, この場合は船の航跡がもとの岸に戻ってしまう。

以上で最短時間航法の計算式は終る。参考として各水流パターンによる航跡図をプロッターで描かせて図4に示してある。平均流速は総て $|\bar{u}|=0.75$ である。図に添えた (a), (b) … (e) は表2に示した水流パターンに対応している。また図中で対岸に○の付いている航跡は出発針路 $\theta_0=0^\circ$ のもので, 他は 10° きざみに航跡を描いてある。また図中の矢印は時間0.2ごとに付けてあり, その時刻の針路を示している。この図により水流パターンの変化による航跡, 針路, 横断時間の変化を見ることができる。

図5は同じ水流パターンのとき, 平均流速が変化した場合の航跡の変化を示す。この水流パターンで遠い上流 (左方) の対岸に達するには, はじめ河岸に沿って航行し, 途中から最も右側にある航跡によって対岸に渡ればよい。

〔付録4〕

直行航路の針路修正式

原点より目標点 P に向かう方位を α , 船の対地速力を V' とすると

$$\begin{cases} \dot{x} = V \sin \theta + u = V' \sin \alpha \\ \dot{y} = V \cos \theta + v = V' \cos \alpha \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \alpha (V \cos \theta + v) \\ = \cos \alpha (V \sin \theta + u) \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = \alpha + \sin^{-1}(\sin \alpha \cdot v/V - \cos \alpha \cdot u/V) \quad (4.2)$$

() 内の値が ± 1 を超えると、直行航路を満足する針路がない。即ち水流が強すぎて予定航路から外れてしまう。

〔付録 5〕

直視航法の解の例

(i) 目標点を原点にとり、直視航法を行なうと

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= V \sin \theta + u(x, y) \\ \dot{y} &= V \cos \theta + v(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

$$\text{ただし } \theta = \tan^{-1}(x/y) + \pi$$

簡単な例として、水流のない場合を考えると、 $u=v=0$ 、式 (5.1) より

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \tan \theta = \frac{-x}{-y}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\therefore \log(x/x_0) = \log(y/y_0)$$

$$\therefore x/x_0 = y/y_0 \quad (5.2)$$

この場合、航跡は原点を通る直線で、針路は一定である。

(ii) 方向と強さが一定の水流の場合を考える。座標を回転すれば、 $u=k$ 、 $v=0$ と置いてよい。極座標を用いて

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \alpha \\ y &= r \cos \alpha \\ \theta &= \alpha + \pi \end{aligned} \right\}$$

$$\dot{x} = \dot{r} \sin \alpha + r \cos \alpha \dot{\alpha}, \quad \dot{y} = \dot{r} \cos \alpha - r \sin \alpha \dot{\alpha} \quad (5.4)$$

式 (5.4) を変形して式 (5.1) に代入すると

$$\dot{r} = \dot{x} \sin \alpha + \dot{y} \cos \alpha = -V + k \sin \alpha, \quad \dot{\alpha} = (\dot{x} \cos \alpha - \dot{y} \sin \alpha)/r = k \cos \alpha / r \quad (5.5)$$

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{\dot{r}}{\dot{\alpha}} = \frac{-V + k \sin \alpha}{k \cos \alpha / r} \quad \therefore \int \frac{dr}{r} = \int \left(\tan \alpha - \frac{V}{k} \sec \alpha \right) d\alpha$$

$$\therefore r \cos \alpha [\tan(\alpha/2 + \pi/4)]^{V/k} = r_0 \cos \alpha_0 [\tan(\alpha_0/2 + \pi/4)]^{V/k} = c_0 \quad (5.6)$$

式 (5.6) は航跡を表わす。もし $t=0$ で $\alpha_0=0$ とすれば $c_0=r_0$ となる。 $V/k=n$ と置いて式 (5.6) に式 (5.7) を代入すると、航跡の式 (5.8) を得る。

$$\cos \alpha = \sin(\alpha + \pi/2) = 2 \sin(\alpha/2 + \pi/4) \cos(\alpha/2 + \pi/4) \quad (5.7)$$

$$r \sin^{(n+1)}(\alpha/2 + \pi/4) \cos^{(1-n)}(\alpha/2 + \pi/4) = c_0/2 \quad (5.8)$$

目標点に達すれば $r=0$ になる筈である。このとき、式 (5.6) より

$$\cos \alpha \tan^{(n)}(\alpha/2 + \pi/4) = c_0/r = \infty \quad (5.9)$$

もし $n > 1$ ならば $\alpha = \pi/2$ で目標に達し得る。もし $n \leq 1$ ならば式 (5.9) を満足する α はない。即ち水流が船速に等しいかまたはこれより大きいときは目標に到達せず流されてしまう。もし $n=1$ なら $\alpha = \pi/2$ を式 (5.8) に代入して $r=c_0/2$ を得る。つまり $\alpha=0^\circ$ のときの距離 r_0 の半分の位置で水流に抗して静止する。

(iii) 船位の時間的変化を求めてみる。式 (5.5) の第2式に式 (5.6)、(5.7) を代入すると

図 5 最短時間航法の航跡 (水流強さの変化)

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{4k}{r_0} \sin^{(2+n)}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos^{(2-n)}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \int \frac{2k}{r_0} dt = \int \sin^{(n-2)}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos^{(n-2)}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \frac{d\alpha}{2} \quad (5.10)$$

図 6 直視航法の航跡

$n=1$ のとき

$$2kt/r_0 = -(1/2) \sin^{(-2)}(\alpha/2 + \pi/4) + \log \tan(\alpha/2 + \pi/4) + c_1$$

ただし $c_1=1$ で、 $\alpha=\pi/2$ のとき $t=\infty$ となる。

$n=2$ のとき

$$2kt/r_0 = -\cot(\alpha/2 + \pi/4) - (1/3) \cot^3(\alpha/2 + \pi/4) + c_2$$

ただし $c_2=4/3$ で、 $\alpha=\pi/2$ のとき $t=4r_0/3V$

$n=3$ のとき

$$2kt/r_0 = -(1/4) \sin^{(-4)}(\alpha/2 + \pi/4) + c_3$$

ただし $c_3=1$ で、 $\alpha=\pi/2$ のとき $t=8r_0/8V$

以下順次解いてゆくことができる。 n が整数以外の場合は数値計算による。

参考のため、直視航法による航跡を図 6 に示す。水流が強くなってゆき、目標点付近で船速に一致すれば航行時間が無限大になることが示されている。異なった水流パ

ターンの航跡も求めたが繁雑であるから省略する。

直行航路は航跡が直線であり、固定針路では船は水流に流されるだけであるから、航跡図は省略する。

質 疑 応 答

井上篤次郎： 通常の流速の定義とずいぶん異なるように思うが、そのように定義された理由は何ですか。

広田 実： 各位置の瞬時の流速をもって流速と呼んでいます。ここで表示されているのは平均流速（絶対値の平均）で分類してあります。そのほうがいろいろの流速分布のパターンを一括して分類するのに便利であるからです。

杉崎昭生： 一般にいう最適航法の内容とは、発表された最適航法とは若干ずれているのではないのでしょうか。どちらかといえば最適操縦の内容に近いのではないのでしょうか。

広田 実： ここに最適航法と名付けたものは、速力一定で、平行な水流を横断する時間を最小とするもので、通常最適航法または最短時間航法と呼ばれているものです。著者達は現在、評価関数に入っていない操縦の容易さなどを考えて、良い航法を探そうとしているものです。