一様な流れの中に置かれた錨鎖の形状と 張力に関する研究—Ⅲ.

—近似計算法について—

佐藤 要*・高 清 廉**
小池 孝 知*・宮崎 芳 夫*

Study of Tension and Forms a Chain Cable Takes on in Uniform Water Flow—Ⅲ.

—A Method of Approximation—

Kaname SATO, GAO Qing Lian, Takatomo KOIKE
and Yoshio MIYAZAKI

Abstract

It is very difficult to analyze strictly the configuration and tension along the chain cable to which the water flow is acting in the three dimensional space, even if the computer is used for its analysis. In this paper for practical use, a method of approximation to solve such three dimensional problems is developed by making use of the loop functions of the basic catenary τ' , σ' , ξ' , η' .

The formulae are as follows :

$$\begin{aligned}\tau' &= |\operatorname{cosec} \theta| = \eta' + 1 \\ \sigma' &= |\cot \theta| = \sinh \xi' \\ \pm \xi' &= \ln \left| \cot \frac{\theta}{2} \right| \\ \eta' &= |\operatorname{cosec} \theta| - 1 = \cosh \xi' - 1\end{aligned}$$

一様な流れのある海域に停泊している船舶の錨鎖や、一定の速度で物体を曳航しているときの鎖の形状と張力の関係を示す釣合の方程式は、第Ⅱ報⁽¹⁾ および文献(6)において、索状物体の一般運動方程式、

$$M \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{T}_E}{\partial S} \dots \dots \dots (1)$$

から導びかれる釣合の方程式、

$$\mathbf{F} + \frac{d\mathbf{T}_E}{dS} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

(M : 単位長さの索の質量、流体中の場合は見掛質量=質量+附加質量、 S : 鎖の長さ、 $\mathbf{F}$: 外力の合ベクトル、 $\mathbf{T}_E$: 張力のベクトル。

によって与えられることを説明した。

x 軸の正の方向から負の方向に向う一様な流れの中に、図1に示すように、鉛直上方を正とする y 軸と、流れに直角、水平方向に z 軸をもつ右手系の直交座標 $x y z$ を設ける。この流れの中に、三次元的釣合状態にある錨鎖の描く曲線上の一点 P における曲率半径を r 、主法線を X 軸、陪法線を Y 軸、接線を Z 軸とする動座標を考

* 正会員 東京水産大学 (東京都港区港南 4-5-7)

** 正会員 山東海洋学院 (中国山東省青島市)

図1 三次元運動中の錨鎖の座標系

S : 曲線の長さ, θ : 接線とある基準線との交角

え, x, y, z 軸に対する X, Y, Z 軸の方向余弦,

	X	Y	Z
x	l_n	l_b	l_t
y	m_n	m_b	m_t
z	n_n	n_b	n_t

とすると, 釣合の方程式は,

$$\left. \begin{aligned} t/r + N - w \cdot m_n &= 0 \\ B - w \cdot m_b &= 0 \\ dt/ds + T - w \cdot m_t &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

と表わすことができる。(式中の記号は第II報⁽¹⁾と同様なので説明は省略した。)

また, これらの解は,

$$\left. \begin{aligned} \ln \frac{t}{t_0} &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{T - w \cdot m_t}{N - w \cdot m_n} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{T/D_0 - \mu \cdot m_t}{N/D_0 - \mu \cdot m_n} d\theta = \ln \tau \\ S &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau \cdot t_0}{N - w \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau}{N/D_0 - \mu \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \cdot \sigma \\ x &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau \cdot t_0 \cdot l_t}{N - w \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau \cdot l_t}{N/D_0 - \mu \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \cdot \xi \\ y &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau \cdot t_0 \cdot m_t}{N - w \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau \cdot m_t}{N/D_0 - \mu \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \cdot \eta \\ z &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau \cdot t_0 \cdot n_t}{N - w \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tau \cdot n_t}{N/D_0 - \mu \cdot m_n} d\theta = \frac{t_0}{D_0} \cdot \zeta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

で与えられている。ここで θ_0 は, 錨鎖上の一定点 p_0 における接線とある基準線との交角, t_0 は p_0 点における張力, D_0 は流れに直角に置かれた単位長さの錨鎖に作用する抗力, $\tau, \sigma, \xi, \eta, \zeta$ は錨鎖の形状と張力を与える無次元の関数である。(文献(3)~(7)ではこれらを loop functions と称えたので, ここでもこの名称を用いる。)

第II報⁽¹⁾においては, これらの釣合の方程式の数値解析の結果が, 模型錨鎖を用いた色々な曳航状態の回流水槽実験と一致することを確め, (3)式及び(4)式が, 二次元及び三次元状態の錨鎖の形状と張力を与える釣合の方程式として適切なものであることを確認した。

したがって, 海上における錨鎖による船舶の停泊や曳航の場合も, 適当な条件を与えてこれらの式による数値解を求めるか, あるいは Pode⁽²⁾, 川上⁽⁶⁾ などがおこなったように, それぞれの材料についての $\tau, \sigma, \xi, \eta, \zeta$ の無次元の関数表を予め作製しておけば, 一樣な流れの中に置かれた任意の状態の錨鎖の形状と張力を計算することが出来る筈であるが, コンピューターが発達している今日においても, この方法で実際の個々の場合を計算することは, 可成り煩雑で余り実用的でない。本報においては共同研究者の一人, 宮崎がかつて曳航時における wire rope, fiber rope, 網地等の形状と張力の計算に適用した近似計算法^{(3)~(7)}をこの錨鎖にも適用できる可能性を見出したので, その概要を報告する。

1 近似算法の概要

図1に示すような x 軸の正の方向から負の方向に向う一樣な流れの中に, 任意の状態で置かれた錨鎖の形状と張力は, 基礎方程式(2)式から導かれた(3), (4)式によって与えられることは, 文献(6), (7)や第II報⁽¹⁾においても説明したが, これらの式が与える曲面の基本的性質を調べるために, 文献(6)においては, 図2に示すように, この場合の鎖の単位長さ当りの抗力 $-D_0$ に等しい抵抗をもった小球を抵抗のない糸で等間隔に連結した仮想材料(a) (ここでは球鎖と呼ぶ)を考え, これに作用する流体力の X, Y, Z 成分

図2 三次元運動中の球鎖の単位素片に働く外力
 D_0 : 抗力, W : 水中重量, F : 外力の合力,
 n : 主法線単位ベクトル, b : 陪法線単位ベクトル, t : 接線単位ベクトル

写真 1

$$N = -D_0 \cdot l_n, \quad B = -D_0 \cdot l_b, \quad T = -D_0 \cdot l_t$$

を(4)式に代入して、この球鎖が x 軸に沿う一様な流れの中に置かれた場合の形状と張力を調べた。その結果、次に述べるような事項が明らかになった。

1.1 球鎖の描く曲線は、常に球鎖の流体的特性を示す。

$$\mu = \frac{w}{D_0} = -\frac{l_b}{m_b} = \cot \omega_a \quad \dots\dots\dots (5)$$

と、初めの条件によって決定される平面 γ 上に含まれる平面曲線となる。このような性質は錨鎖にも認められることが、第II報⁽⁹⁾の実験によって確認されている。

1.2 (5)式で与えられる角 ω_a は、無限に長い球鎖の曳航点（上流側）における傾角を示し、下流側が自由端になっている有限の球鎖の描く直線の傾角もほぼこ

図3 平面 γ 上のカタナリーカーブ

s : 曲線の長さ, x : 主法線, z : 接線, ω_a :
 カテナリーカーブの critical angle (回転角)

の ω_a に近い。このような傾向は、写真1に模型鎖の実験を示すように、あらゆる索状物体に認められる性質で、Cross-Flow Principle^{(9), (10)} と呼ばれている。一般の索状物体では、この角を critical angle θ_c と呼び、

$$\mu = \frac{w}{D_0} = -\frac{N_{\theta_c}}{D_0 \sin \theta_c} \quad \dots\dots\dots (6)$$

(N_{θ_c} : 傾角 θ_c における流体力の法線成分) から計算される。(ω_a は球鎖の critical angle にほかならない。)

1.3 したがって、平面 γ と xy 平面との交線は図3に示すように、 $y = x \cot \omega_a$ で与えられるから、この直線を(4)式の角 θ の基準線とし、図3のように θ , γ , ω_a , 及び長さ S の正負を定めると、動座標 XYZ の固定座標 xyz に対する方向余弦は、

	X	Y	Z
x	$l_n = -\cos \Theta \cdot \cos \gamma \cdot \cos \omega_a + \sin \Theta \cdot \sin \omega_a$	$l_b = -\sin \gamma \cdot \cos \omega_a$	$l_c = \sin \Theta \cdot \cos \gamma \cdot \cos \omega_a + \cos \Theta \cdot \sin \omega_a$
y	$m_n = \cos \Theta \cdot \cos \gamma \cdot \sin \omega_a + \sin \Theta \cdot \cos \omega_a$	$m_b = \sin \gamma \cdot \sin \omega_a$	$m_c = -\sin \Theta \cdot \cos \gamma \cdot \sin \omega_a + \cos \Theta \cdot \cos \omega_a$
z	$n_n = -\cos \Theta \cdot \sin \gamma$	$n_b = \cos \gamma$	$n_c = \sin \Theta \cdot \sin \gamma$

となる。

1.4 これを(4)式に用いると、三次元的釣合状態にある球鎖の形状と張力を与える loop functions,

$$\left. \begin{aligned} \tau_a &= |\operatorname{cosec} \Theta| = \tau' \\ \sigma_a &= \cot \Theta = \sigma' \\ \xi_a &= \xi' \cdot \cos \gamma \cdot \cos \omega_a + \eta' \sin \omega_a \\ \eta_a &= -\xi' \cdot \cos \gamma \cdot \sin \omega_a + \eta' \cos \omega_a \\ \zeta_a &= \xi' \cdot \sin \gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

が得られる。この式に含まれる τ' , σ' , η' , ξ' は図4の点線で示されている流速0のとき xy 平面で垂下されている catenary curve の形状と張力を与える loop functions,

$$\left. \begin{aligned} \tau' &= |\operatorname{cosec} \Theta| = \eta' + 1 \\ \sigma' &= |\cot \Theta| = \sinh \xi' \\ \pm \xi' &= \ln |\cot \Theta / 2| \\ \eta' &= |\operatorname{cosec} \Theta| - 1 = \cosh \xi' - 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

にほかならない。これを basic catenary と呼ぶ。

図4 ベーシックカタナリーの回転の方向

1.5 したがって、(7)式で与えられるある一様な流れ

の中で任意の状態で置かれている球鎖の描く曲線は次のような平面 γ 上の catenary curve の一部として与えられる。図4の basic catenary の対称軸 y を、 z 軸回りに ω_a だけ上流側に回転させた軸 $y = x \cot \omega_a$ を y' とすると、図5に示すように、この y' 軸の回りに catenary curve を回転させたときにできる回転面と平面 γ とが交

図5 カテナリーカーブの回転曲面と平面 γ との切口の曲線

図6 無限遠におけるカタナリーカーブと錨鎖の曲線の傾角差 $\Delta\omega$ の関係

わったときに現われる切口の曲線，すなわち y' 軸を対称軸とする平面 γ 上の catenary curve のある部分によって表現される。

1.6 また，曲線上の任意の点における張力を与える loop functions τ_a は，(3)式から

$$t - t_0 = \int_{s_0}^s D_0 \cdot l_t \cdot ds + \int_{s_0}^s w \cdot m_t \cdot ds = D_0 \cdot x + w \cdot y$$

$$t/t_0 = \tau_a = 1 + \frac{D_0}{t_0} x + \frac{w}{t_0} y = 1 + \sin \omega_a \cdot \xi_a + \mu \cdot \sin \omega_a \cdot \eta_a \dots \dots \dots (9)$$

と表わすことができる。したがって，任意の曳航状態にある球鎖の形状と張力を求めるには，(8)式で与えられる basic catenary の loop functions σ' , ξ' , η' の函数値を知れば充分である。

1.7 実際の錨鎖が一様な流れの中で描く曲線も，この仮想材料である球鎖の作る曲線と略々同じようなものになることは第II報における実験結果からも予想される。もし錨鎖の描く曲線と，前述の仮想材料球鎖の描く曲線が完全に相似になるならば，球鎖の対称軸 y' の回転角 ω をその時の錨鎖の critical angle θ_c に等しくすれば，basic catenary の loop functions σ' , ξ' , η' を用いて任意の状態の錨鎖の形状と張力を計算することが出来る筈である。しかしながら，流速0の場合 ($D_0=0$) を除いて，流体的特性 (N_θ , B_θ , T_θ など) が全く異なる両者は， $\omega=\theta_c$ としても完全には一致せず，図6に示すように無限遠においては， $\Delta\omega = |\omega_a - \theta_c|$ の差を生ずる。したがって錨鎖の描く曲線を球鎖のそれで代用するためには，その対称軸の回転角を曳航状態に応じて $\omega = \theta_c \pm \Delta\omega$ と補正する必要がある。

1.8 実際の $\Delta\omega$ は，流速，曳航索の長さ，種類，曳航の状態などによって異なり，それぞれの場合については，実験によって決定する以外に方法がない。錨鎖については，第II報⁽¹⁾でおこなった曳航状態〔I〕，〔III〕及び今回実施した曳航状態〔II〕の実験（図7参照）のそれぞれの場合について loop functions を求め，これと球

図7 ベーシックカテナリーの回転角 ω と曳航状態〔I〕，〔II〕，〔III〕の関係

図8 第II報7図の実験値・理論値と近似計算値との比較

鎖の loop functions と比較したところ図8に第II報の図7の場合を例示するように補正量 $\Delta\omega$ を，

- (1) 曳航状態〔I〕の補正量は $\Delta\omega = +(\omega_a - \theta_c)$
- (2) 曳航状態〔II〕の補正量は $\Delta\omega = -(\omega_a - \theta_c)$
- (3) 曳航状態〔III〕の補正量は $\Delta\omega = 0$

としてよいことが略々確認された。これは fiber rope, wire rope などの曳航材料について，文献(3)~(7)において宮崎が用いた「回転の規則」の仮定が大略適当なものであることを立証すると同時に，これらの文献に提示し

た曳航索の近似計算法は、錨鎖のような特殊材料についても適用できる可能性が認められた。なお、この補正量 $\Delta\omega$ は(5), (6)式によって与えられる $\mu-\theta_c$ 曲線 (図9) から求められる。

1.9 以上の補正法に従うと、釣合の状態を保っている錨鎖の形状と張力を与える loop functions は, (7), (8) 式の catenary curve を用いて次のように近似できる。

$$\sigma = \cot \Theta = \sigma'$$

$$\xi = \xi' \cos \gamma \cdot \cos \omega + \eta' \cdot \sin \omega$$

$$\eta = -\xi' \cos \gamma \cdot \sin \omega + \eta' \cdot \cos \omega$$

$$\zeta = \xi' \sin \gamma$$

$$\tau = 1 + \lambda \cdot \sin \theta_c \cdot \xi + \mu \cdot \sin \theta_c \cdot \eta$$

τ の式に含まれる係数 λ は流体摩擦力と接線分力の函数で、仮想材料球鎖の場合は, (9)式のように $\lambda=1$ となるが実際の曳航材料の場合は $1 \geq \lambda \geq 0$ である。錨鎖の場合は,

$$\lambda = \frac{\int_0^{\pi/2} C_{T\theta} d\theta}{\int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{\int_0^{\pi/2} \left(C_{D0} \cos^2 \theta \sin \theta - \frac{1}{4} C_{D0} \sin 2\theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) + C_{F\theta} \sin \theta \right) d\theta}{\int_0^{\pi/2} d\theta} \doteq 0.15$$

を用いる。この loop functions から s, x, y, z および t を求めるには, (4)式から $\kappa = t_0/D_0 \cdot \sin \theta_c$ を用いて,

$$s = \kappa \cdot \sigma, \quad x = \kappa \cdot \xi, \quad y = \kappa \cdot \eta, \quad z = \kappa \cdot \zeta, \quad t = \tau \cdot t_0$$

とすればよい。

2 近似計算法と実験値との比較

近似計算法による計算値と実験値との比較を示したのが, 図10-1, 2 で, 図10-1 は二次元の曳航状態

図9 $\mu-\theta_c$ 曲線

図10-1 曳航状態〔I〕の x, y, t_2 に関する被曳航点 p_1 からの近似計算値と実験値の比較 (百分率)

図10-2: 曳航状態〔I〕, 〔III〕の x, y, t_2 に関する被曳航点 p_1 からの近似計算値と実験値の比較 (百分率)

図11 曳航状態〔I〕の x , y , t_1 に関する曳航点 p_2 からの近似計算値と実験値の比較（百分率）

3 結 論

3.1 この近似計算法によれば、任意の曳航状態にある錨鎖の長さ、曳航速度（流速）及び被曳航点 p_1 （下流側）、又は曳航点 p_2 （上流側）における張力、傾角などを測定すれば、 p_1 から p_2 までの水平距離、深さ、他端の張力、傾角などは、他の曳航索と同様(8)式で与えられる catenary curve の loop functions を用いて計算することができる。回流水槽による精密な実験値との差はいずれも $\pm 5\%$ 以内である。

3.2 この種の計算法^{(2)・(8)}では、一般に初めの条件として p_1 点を用いるのが原則で、 p_2 点を用いることはほとんど不可能であった。また、 p_1 点を用いても critical angle 附近においては、計算不能に落入することがしばしばあったが、この近似計算法では、図10, 11に示すようにいずれの点を初めの条件として用いても計算精度にほとんどかわりなく、計算不能の状態を避けることができる。

3.3 筆算による計算法およびそれに必要な実際の測定角 θ_x , θ_y , θ_z と θ , γ , ω 等との関係については、文献(3)~(7)において例題を用いて詳細に説明したので本報においては省略した。またコンピューターによる計算法と実測値との比較等については、例題の解法を含めて近い将来に発表する予定である。

3.4 錨鎖の把駐力は、水底に横たわっている錨及び錨鎖の影響が大きい、これについては既に文献(11)~(14)等に詳細な研究が発表されているので参照されたい。

参 考 文 献

- (1) 宮崎芳夫, 小池孝知, 佐藤要, 高清廉: 一様な流れの中に置かれた錨鎖の形状と張力に関する研究—II, 日本航海学会論文集, 第65号, 昭和56年9月
- (2) Pode, L.: Tables for computing the equilibrium configuration of a flexible cable in a uniform stream. TMB, Rep., 687, 1951
- (3) 宮崎芳夫: 一様な流れの中に置かれたロープまたは平面網地の形状と張力について, 東京水産大学研究報告, Vol. 56, No. S1~2, pp. 49~117, March 1970
- (4) 宮崎芳夫: 曳航索の近似算法について—I, 近似算法の概要, 日本水産学会誌, 第36巻第1号, 昭和45年1月
- (5) 宮崎芳夫: 曳航索の近似算法について—II, 計算法, 日本水産学会誌, 第36巻第1号, 昭和45年1月
- (6) 宮崎芳夫: 曳航索の近似算法について—III, 三次元問題の近似法, 日本水産学会誌, 第38巻第11号, 昭和47年11月
- (7) 宮崎芳夫: 曳航索の近似算法について—IV, 三次元問題の計算法, 日本水産学会誌, 第38巻第11号, 昭和47年11月

〔I〕, 図10—2は三次元の曳航状態〔I〕と二次元の曳航状態〔III〕である。いずれも下流側（被曳航点, p_1 点）を初めの条件とした実験値との比較で、各図とも縦軸に計算値/実験値 $\times 100$ を、横軸に実験回次をとり、水深(y)、水平距離(x)、張力(t_2)を比較している。結果はいずれも $\pm 5\%$ 以内に収まっている。又図11は上流側（ p_2 点）を初めの条件とした場合の二次元の曳航状態〔I〕の実験値（ t_1 のみ $t_1 = \sqrt{D^2 + w^2}$ ⁽¹⁾によって求められた値）との比較を示している。初めの条件 t_2 と θ_2 は実験値を使用している。従って結果は図10に比較して若干精度は落ちるようであるが、初期条件さえ正確であれば、図10の結果と同様となる。

- (8) 川上太左英: Equilibrium configuration of a rectangular strip of net subjected to a uniform current. Memo. coll. Agr., Kyoto Univ., 72, 1955
- (9) 浅沼強編: 流れの可視化ハンドブック, 朝倉書店, p. 145, 1978年
- (10) SIGHA F HOERNER: Fluid Dynamic Drag, pp 3~11, 1965年
- (11) 鮫島直人, 横田利雄, 米田謹次郎, 野原威男, 岡田正明, 鞠谷宏士, 岩井聡, 川本文彦, 及川清: 荒天錨泊法に関する実験報告(第1報), 単錨泊について, 日本航海学会誌, 第22号, 昭和35年3月
- (12) 本田啓之輔, 片上圭四郎, 杉浦昭典: 水槽実験によるアンカーの把駐力特性(アンカーの把駐力に関する実験報告その一), 日本航海学会誌, 第22号, 昭和35年3月
- (13) 鞠谷宏士, 及川清, 野村士平: 錨の動的把駐特性に関する実験研究, 日本航海学会誌, 第40号, 昭和43年12月
- (14) 鶴田三郎, 小山荒雄, 鞠谷宏士: 静止把駐力を越える力が加わった場合の錨の挙動について, 日本航海学会論文集, 第67号, 昭和57年8月