100 kHz 電磁波エネルギーの流れに及ぼす山岳の影響

—— 三角形山岳モデルによる ——

渡 辺 泰 夫*

An Influence of a Mountain to the 100 kHz Electro-Magnetic Wave Energy Flow

—— By a Triangular Mountain Model ——

Yasuo WATANABE

Abstract

Hertz vector values were given to the nodes upon the contour as a restraint one. Then the Hertz potential of each node in the given area was calculated using the Finite Element Method (FEM) on the flat earth far from the transmitting antenna. Those well consisted with K. A. Norton's calculated values. Next, the electro-magnetic field at the vicinity of a triangular mountain model set on the flat earth, was obtained by the FEM as well. A group of curves showing the direction of the maximum electric field vector and another group of curves indicating energy flows of the electro-magnetic wave were pictured from the result. The conclusion is such that the range suffered influence due to the mountain model which height and inclination are 250(m) and 45 degrees respectively, for example, is approximately twice as much as the height.

1. は じ め に

ロランC並びにデッカ航法システムは100 kHz前後の長波帯の電波を利用する双曲線航法システムであり高精度、再現性のよいことを主な特徴としている。しかし我が国は山岳が多く山岳上空での電波の伝搬速度が平面大地の場合よりもかなり遅くなる⁽¹⁾。また送信局が内陸にあって電波伝搬途上に高い山脈があるときには周辺海域において比較的大きな測位誤差を生ずる場合もある。山岳が測位に与える影響は無視できず放置できない重要な問題である。この問題に対する解析の基礎的なアプローチは既に一部なされているが⁽²⁾、解析が半径200mの導体球を用いてなされているなど実際の山岳問題に適用するにはやや大まかに過ぎるきらいがある。そこで本論文では有限の大地導電度をもつ高さ250m及び500mの三角形山岳モデルを用いて一層、実際に近い山岳モデルによる解析を行った。この解析は2000m級の複雑な形状をした山岳モデルにまで発展させる必要があるが、そのような場合も考慮してその取扱いに適した有限要素法を使用することとした。

2. 本 論

有限要素法を使用するに先立って一つの問題がある。それは電波伝搬の計算では一般に無限領域が対象とされるために電波伝搬の問題にそのままの形で有限要素法を適用することはできず、そこに何らかの工夫が必要とされるということである。以下にそれを述べる。

2.1 基礎となる平面大地の場合

この解析では図1に示す円筒座標系を採用しその原点を地表上アンテナ下部にとる。

* 運輸省電子航法研究所(〒181 三鷹市新川6-38-1)

図1 円筒座標系

図1において P' を点 $P(x, y, z)$ の $X-Y$ 平面上における射影とし r, θ をこの平面における P' の極座標とする。円筒座標系においては線素は

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad \dots\dots\dots(1)$$

で与えられるが図1の $z-r$ 平面内では

$$ds^2 = dr^2 + dz^2 \quad \dots\dots\dots(2)$$

となり、形式的には直角座標系の線素

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 \quad \dots\dots\dots(3)$$

と同形式となる。送信アンテナは単位長の実行高をもちアンテナ電流 1 (A) の垂直アンテナとしよう。以下の議論において周波数 $f=100$ kHz; 大地導電度 $\sigma = 5 \times 10^{-3}$ ユ/m; 大地の誘電率 $\epsilon = 13 \epsilon_0$ とする。ヘルツベクトルを $\mathbf{H}$ とすれば電界 $\mathbf{E}$ 及び磁界 $\mathbf{H}$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$\mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{H} + \kappa^2 \mathbf{H} \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\mathbf{H} = \kappa^2 / i \omega \mu_0 \cdot \nabla \times \mathbf{H} \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここで $\kappa = \omega/c$; c は光速; $\omega = 2\pi f$. 垂直アンテナを考えているのでヘルツベクトル $\mathbf{H}$ はその Z 成分 Ψ のみを有する。よって

$$E_r = \partial^2 \Psi / \partial r \partial z \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$E_z = \kappa^2 \Psi + \partial^2 \Psi / \partial z^2 \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$H_\theta = -\kappa^2 / i \omega \mu_0 \cdot \partial \Psi / \partial r \quad \dots\dots\dots(8)$$

Ψ はまた境界面において次の境界条件を満足する⁽³⁾。

$$\partial \Psi / \partial n = -i \kappa \delta \Psi \quad \dots\dots\dots(9)$$

但し、ここで $\partial / \partial n$ は境界面に対する垂直方向への偏微分を意味している。また

$$\delta = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1} + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} / \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \quad \dots\dots\dots(10)$$

平面大地の場合、K. A. Norton⁽⁴⁾によれば Ψ は次式により表わされる。

$$\Psi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\omega} \cdot \left(\frac{e^{i\kappa R_1}}{R_1} - \frac{e^{i\kappa R_2}}{R_2} + V_p \right) \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right)} \quad \dots\dots\dots(11)$$

以後 $e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right)}$ の項は省略する。

$$V_p = ((1 - R_v)F + 1 + R_v) \cdot e^{i\kappa R_2} / R_2 \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$R_v = \frac{\sin \phi' - \lambda \sqrt{1 - \lambda^2 \cos^2 \phi'}}{\sin \phi' + \lambda \sqrt{1 - \lambda^2 \cos^2 \phi'}} \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$F = 1 + i \sqrt{\pi W} e^{-W} \operatorname{erfc}(-i \sqrt{W}) \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$W = 4 P_1 / (1 - R_v)^2 \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$P_1 = i \kappa R_2 \lambda^2 (1 - \lambda^2 \cos^2 \phi') / 2 \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$\kappa^2 = \omega^2 \epsilon \mu_0 + i \sigma \mu_0 \omega \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$\lambda = \kappa / \kappa_2$$

$$\sin \phi' = (z+b)/R_2; \sin \phi'' = (z-b)/R_1$$

但しここで b は送信アンテナ地上高で $b=100\text{m}$, z は受信点地上高, R_1 は送信アンテナ点と受信点との距離, R_2 は送信アンテナの大地への影像点と受信点との距離である。

図2 与えられた閉領域とその中の三角要素及び節点

で与えられる。文献⁽⁵⁾⁽⁶⁾によれば式(20)を支配方程式とする残差表現式は次の式(21)で与えられる。

$$\int_V \Psi \cdot (\nabla^2 \Psi + \kappa^2 \Psi) r dr d\theta dz = 0 \quad \dots\dots\dots(21)$$

式(21)を θ について積分して

$$2\pi \int_D \Psi \cdot \left(r \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \kappa^2 \Psi r \right) dr dz = 0 \quad \dots\dots\dots(22)$$

部分積分を行い整理すれば $\Psi (\partial \Psi / \partial r)$ の項は消えて式(22)は

$$2\pi \left\{ \int_D \left(r \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^2 + r \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 - \kappa^2 \Psi^2 r \right) dr dz - \int_{\Gamma_n} r \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\Gamma \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots(23)$$

ここで Γ_n は境界に関する積分を表す。

以下、式(23)を基にして有限要素法の標準的手法を用いて計算機で一群の解 Ψ^{FEM} を求める。ここで試験関数として三次試験関数を採用し、図2において大地との境界 $F_1 F_4$ について式(9)の境界条件を適用している。この際、注意すべきことは式(23)の Ψ_n の方向は領域 D の内部から外部への法線方向、即ち $F_1 F_4$ について上方から下方へ法線方向をとっており、一方式(9)では下方から上方へ法線方向をとっている⁽³⁾ことである。図2の辺 $F_1 F_2$, $F_2 F_3$, $F_3 F_4$ の各節点については式(11)で求めた値を拘束値として使用した。このようにして得られた領域 D 内の各節点におけるヘルツポテンシャル Ψ^{FEM} の代表例を表1に示す。 Ψ^{FEM} は式(11)により求めた値 Ψ^N と良く一致している。なお計算機による計算は総て倍精度で行った。

表1 (節点番号は図2参照)

節点番号	34	67	97
Ψ^{FEM}	1.24136 + i 0.34737	1.26616 + i 0.33618	1.28968 + i 0.35993
Ψ^N	1.24154 + i 0.34748	1.26635 + i 0.33656	1.28949 + i 0.36001

2. 3 三角形山岳モデルのある場合

三角形山岳モデルのある場合の各三角要素及び節点を図3に示す。ここで山の高さは250m, 斜面の傾斜は45度である。図3において辺 F_1F_2 , F_2F_3 , F_3F_4 上の節点には山岳モデル付近でのポテンシャルを解析的に求めた値を適用しなければならない。しかし山岳モデルのある場合の解は解析的には明らかでないので、ここではやむを得ず平面大地の場合の、式(11)で計算して得た値を拘束値として使用した。そして山岳モデル近傍における近似的な解を得ることを当面の目的とした。図3の大地との境界 F_1C , BF_4 及び山の斜面 AC , AB に対しそれぞれ式(9)の境界条件を適用し領域内各節点の Ψ を求めた。領域内の任意の場所における電界 E_x, E_z と磁界 H_θ はそれぞれ式(6), (7), (8)により計算できる。電界ベクトル端点の軌跡は例えば、図6で示すように細長い楕円に似た形をしており、その長軸の方向をその点での電界の方向として10m毎に電界の方向を計算して破線で結んだもの、同様に10m毎にポインティング・ベクトルの方向を計算して実線で結んだものを図4に示す。この場合のポインティング・ベクトルは電界ベクトル $\mathbf{E}$, 磁界ベクトル $\mathbf{H}$ とその共役 $\mathbf{H}^*$ として $\text{Real}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)/2$ を使用した⁽⁷⁾。同様にして山の高さ500m, 傾斜角 $\alpha=63.4^\circ$ の場合の計算結果を図5に示す。

図3 三角形山岳モデルのある場合

図4 高さ250(m)の三角形山岳モデル

図5 高さ500(m)の三角形山岳モデル

3. 検討と考察

領域 D 内の各節点で求められた解 Ψ の精度を評価する尺度として、ここでは残差

$$R(\Psi) = \nabla^2 \Psi + k^2 \Psi \quad \dots\dots\dots (24)$$

を取りあげる。その理由は次のとおりである。計算の基礎とした式(21)は式(21)から導出された。式(21)は $r\Psi$ と残差 $R(\Psi)$ とが直交関係にあることを示す。従って式(21)は必ずしも $R(\Psi)=0$ が常に成立するものであることを示していない。それは例えば、拘束値としてデータメタ値を使用した場合を考えると、そのとき得られた解は $r\Psi$ と $R(\Psi)$ との直交関係は満足するが明らかに $R(\Psi)=0$ は成立しないであろうことから示される。従って、

図6 電界ベクトル端点の軌跡

各節点において $R(\Psi) \neq 0$ が満足されているかどうかをチェックする必要がある。よって領域内の各節点で残差 $R(\Psi)$ の絶対値を求め総ての節点について、その絶対値の自乗和 SR を計算し、その SR により解の精度を評価することとした。

$$SR = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{10} |R(\Psi)|^2 \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここで j は三角要素内の節点番号であり L は要素数。

また SR を計算する際、平面大地との境界 (図3において F_1C, BF_4) を含む要素についてはそれらの節点に関して式(9)の境界条件を式(20)に適用して

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \kappa^2(1-\delta^2)\Psi = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

を使用した。更に山岳モデルの斜辺 AC , AB 上の節点については、式(2)で述べたように図1の $z-r$ 平面内での

図7 斜辺への垂直方向

変化を問題にするのであるから、その微分は直角座標系の場合と同形式となる。それ故、図7において傾斜角 α ; z 方向の微分 $\Delta z \cdot \partial \Psi / \partial z$; r 方向の微分 $\Delta r \cdot \partial \Psi / \partial r$; それらに対応する斜辺への垂直方向 N の微分を $\Delta n \cdot \partial \Psi / \partial n$; とすれば

$$\Delta n \cdot \partial \Psi / \partial n = \Delta z \cdot \partial \Psi / \partial z + \Delta r \cdot \partial \Psi / \partial r$$

$$\Delta z / \Delta n = \cos \alpha ; \Delta r / \Delta n = -\sin \alpha \text{ 故、式(9)より}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} \cos \alpha - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \sin \alpha = -i \kappa \delta \Psi \quad \dots\dots\dots (27)$$

斜辺 AC , AB 上の各節点について式(27)の関係を考慮すれば式(20)は次式で示される。

$$\begin{aligned} & \cot^2 \alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \tan \alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} + \cot \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left(\frac{2i\kappa\delta}{\sin^2 \alpha} \cos \alpha - \frac{i\kappa\delta}{\cos \alpha} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ & + \left(\kappa^2 - \frac{\kappa^2 \delta^2}{\sin^2 \alpha} \right) \Psi + \frac{i\kappa\delta}{\sin \alpha} \frac{\Psi}{r} = 0 \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

但し斜辺 AB の部分に対しては α として $-\alpha$ を使用する。式(20), (26), (28)により残差の自乗の和 SR を計算すると、図2の平面大地の場合 $SR = 0.3131 \times 10^{-10}$; 図4の山岳モデルの場合 $SR = 0.3608 \times 10^{-8}$; 図5の山岳モデルの場合 $SR = 0.1722 \times 10^{-7}$; であった。この結果から SR は山岳モデルのある場合には平面大地のときより若

図8 送信点よりの距離 10(km)

図9 送信点よりの距離 100(km)

干増加している。それも山の高さにつれて増加している。この原因として前述したように式(4)で計算して得た平面大地の場合の値を拘束値として使用したためと考えられる。なお図4, 図5における山岳モデルは送信点からの距離が 20km の場合のものであるが, 以下に送信点からの距離を変えた場合とか計算領域を拡大した場合などの検討を行った。

3. 1 送信点からの距離を変えた場合の検討

送信点から山岳モデルまでの距離 r が 10km と 100km の場合について検討を行った。10km のときのパターンを図8に 100km のときのパターンを図9にそれぞれ示す。図8では送信アンテナに接近したことにより右上がりのエネルギーの流れの傾向が見られる。図9と $r=20\text{km}$ の図4とは殆ど同じパターンに見える。ただこれら三つの図の間で見られる相違点はそれぞれの SR の値であって

$$r = 10\text{km} \text{ のとき} \quad SR = 0.1367 \times 10^{-7}$$

$$r = 20\text{km} \text{ のとき} \quad SR = 0.3608 \times 10^{-8}$$

$$r = 100\text{km} \text{ のとき} \quad SR = 0.1398 \times 10^{-9}$$

$r=10\text{km}$ のとき最も SR が大きいがこのことは必ずしも $r=10\text{km}$ のとき解 Ψ の精度が最も悪いことを意味しない。と言うのは SR の計算で使用される残差を示す式(4)において Ψ は r の増大につれて減少する量であるためである。従って解 Ψ の精度を SR によって評価するときは同じ r の値をもつ平面大地の場合の SR を基準にとって評価すべきである。この観点から $r=10\text{km}$ のときの平面大地の SR 値を計算すると $SR=0.1276 \times 10^{-9}$ であって $r=10\text{km}$ の山岳モデルのときの値 0.1367×10^{-7} との差は他の場合と比べてそれほど大きいものではない。ただ更に送信点に接近した場合は r の自乗, r の 3 乗に反比例する量である誘導電磁界, 静電磁界の影響が強く出てくるからこの面からの検討が必要である。

3. 2 山岳モデルの高さなどを変えた場合の検討

$r=20\text{km}$ の場合について山岳モデルの高さ 250m, 傾斜=45度のときのパターンを図4に, 高さ 500m, 傾斜=63.4度のときのパターンを図5に示した。これらに対応する平面大地の場合の $SR=0.3131 \times 10^{-10}$ である。図4, 図5よりいずれの場合も山の影響は, その高さのほぼ2倍までであることが判る。またこれらのパターンにおいて山頂を中心にして電磁波エネルギーの収束と発散の傾向が見られる。このことは山頂付近が等価的に2次的波源となっていることを示すものと考えられる。図5では $SR=0.1722 \times 10^{-7}$ となっており平面大地の SR に比べ比較的に大きな値である。この計算領域の大きさでは山岳モデルの高さ 500m 程度が限界と見られる。

3. 3 領域 D の大きさを変えた場合の検討

領域 D を広げた場合の1例を図10に示す。図10において太線 F_1F_2, F_2F_3, F_3F_4 内の部分を図形化したものを図

図10 計算領域を拡大

図11 計算領域を拡大したときのパターン

11に示した。この場合 $SR=0.1130 \times 10^{-8}$ であり、図10に対応する平面大地の場合、 $SR=0.1332 \times 10^{-9}$ であることを考慮すれば $SR=0.1130 \times 10^{-8}$ はかなり小さい値であることが判る。周辺の大きさは図10に示されている。このように計算領域を拡大したことにより、図4の場合と比べて、相対的に SR が小さくなっていることから——このことは領域内各点で伝搬方程式 $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$ が一段とよく満足されていることを示す——図11は一層、望ましい解に近い状態を示していると考えられる。

4. ま と め

以上、種々な角度から検討を加えた結果つぎの結論を得る。周波数 100kHz, 高さ 250m, および 500m の山岳モデルの場合、電磁波エネルギーの流れの面から見ると、その影響を受けるのは山の高さの約2倍までである。この結果は文献⁽²⁾の結果とも一致する。

なお、文献⁽²⁾に示された平面大地上の電磁波エネルギーの流れの様態と、本論文で示された山岳の影響解析手法を発展、組み合わせて1000~2000m級の山岳地帯を通過する際の電波伝搬時間の遅れを計算することができ、それにより測位精度の改善に寄与するものと考えるが、これは今後の研究課題としたい。

5. 謝 辞

本論文作成に当たり東洋大学工学部 加藤正平助教より種々貴重な助言を頂いた。深く感謝致します。

参 考 文 献

- (1) 広田直照ほか：“北海道デッカチェーンのシステム試験について(2)”，pp. 14. 宇宙・航行エレクトロニクス研究会, SANE 68-24, (1969-02)
- (2) 渡辺泰夫：“デッカ電波の山岳地伝搬速度についての一考察”，日本航海学会論文集第59号, pp. 93-98. 昭53年8月
- (3) G. A. Hufford: “An integral equation approach to the problem of wave propagation over an irregular surface”, Quarterly of Applied Mathematics, pp. 391-392, (1951).
- (4) K. A. Norton: “The propagation of radio waves over the surface of the earth and in the upper atmosphere”, Proc of IRE, (Sep. 1937).
- (5) 加川幸夫：“有限要素法入門”，pp. 124, オーム社 (昭52-05).
- (6) 加川幸夫ほか：“有限/境界要素法”，pp. 38-39, オーム社 (昭59-10).
- (7) ストラットン：“電磁理論”，pp. 116, 電気日本社 (昭18-7).

質 疑 応 答

鹿児島大学 田口一夫先生より質問がありました。質問用紙を受け取るのを忘れましたが、質疑応答の内容は次のようなものであったと記憶します。

田口一夫：結論の部分に気になる点がある。山の高さの約2倍までの範囲に影響が認められるというが、私どもの観測ではもっと広範な距離から山の影響が認められた。この点は如何か？

渡辺泰夫：広範な距離といわれるのは山の高さの方向ですか、それとも地表面に沿っての方向ですか？

田口一夫：地表面に沿っての距離である。

渡辺泰夫：この論文の結論でいっているのは山の高さの方向で、山の高さのおよそ2倍までに影響が認められるというものです。また影響といいましても、それは電磁波エネルギーの流れという観点からのもので、電波の位相に与える影響を云々しているものではありません。