ブートストラップ法による航空機対の 垂直重畳確率の推定精度の検討

長 岡 栄*

A Note on Estimation Accuracy of the Probability of Vertical Overlap of a Pair of Aircraft by the Bootstrap Method

Sakae NAGAOKA

Abstract

This paper describes the results of an interval estimation of the probability of vertical overlap of a pair of aircraft for 1,000 ft separation based on the data taken by a height finding radar. A resampling method called the Bootstrap method is used for estimating the distribution of the estimated probabilities of vertical overlap. The results show that the variation ratio (=maximum/minimum) of the estimated probability of vertical overlap is from 10 to 200 for each fitted model used for calculating the probability of vertical overlap by an extrapolation of the fitted curve to the empirical distribution.

1. ま え が き

航空機運航量の増大にともない、経済性のよい飛行高度の有効利用が望まれている。これに対応して、ICAO（国際民間航空機関）では、29,000 ft 以上の高高度における垂直間隔基準の 2,000 ft から 1,000 ft への短縮可能性を検討し続けている。この検討には、衝突危険度の数学モデル⁽⁸⁾が用いられるが、その重要なパラメータのひとつに垂直重畳確率（Probability of vertical overlap）がある。

通常、1,000 ft の垂直間隔に対する垂直重畳確率はレーダにより収集された航空機の高度データに基づき推定される⁽⁴⁾。まず、高度維持誤差に関するデータ（相対垂直距離）の分布を調べ、データに最も良くフィットするような分布モデルのモデル・パラメータを決定する。そして、この分布をモデルにより外挿し、垂直重畳確率を推定する。

この垂直重畳確率についてはいくつかの推定例があるが、これらの推定値は、いわゆる点推定量であり、採用するモデルにより 10^3 倍程度の変化範囲で変化することが知られている^{(2),(3)}。しかし、個々のモデルに基づき推定された垂直重畳確率の推定精度については、これまで明らかにされていない。

そこで、個々のモデルに対し、垂直重畳確率の推定精度を考察するため、ブートストラップ（Bootstrap）法^{(1),(5)}を用い、推定パラメータのばらつきを調べ、垂直重畳確率の推定値の分布を調べてみた。その結果、相対垂直距離の分布の当てはめに用いた各モデルについて推定値の正確さを評価できたので、これについて報告する。

2. 垂直重畳確率と相対垂直距離

2.1 垂直重畳確率

垂直重畳確率は、垂直間隔 S だけ離れて隣接した高度を割り当てられた 1 対の航空機が垂直方向で重なる確率 $P_z(S)$ として定義される。これは、航空機の垂直方向の寸法を L_z とし、航空機の高度維持誤差の確率密度関数

* 正会員 電子航法研究所 電子航法開発部（〒181 三鷹市新川 6—38—1）

を $f(x)$ とすると、次式で与えられる。

$$P_z(S) = \int_{S-L_z}^{S+L_z} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(v+u) du \right\} dv \quad (1)$$

そして、これは垂直間隔の喪失による衝突危険度（単位飛行時間あたりの空中衝突事故件数の期待値） N_{az} と正比例関係にある⁽⁸⁾。すなわち、

$$N_{az} = P_z(S) G \quad (2)$$

と書ける。ただし、 G は交通流、航空機の数、寸法等に関するパラメータから成る関数である。

2.2 相対垂直距離

(1)式から垂直重量確率を計算する方法は、本来飛行すべき割当フライトレベル (FL) の高さの測定が容易

表 1 相対垂直距離分布によく合うモデルの確率密度関数

モデル	確率密度関数
DE-N Mixed	$C^*(z) = \alpha N(z \sigma) + (1-\alpha) DE(z \lambda)$ ただし $N(z \sigma) = (\sigma^2 2\pi)^{-1/2} \exp[-z^2/(2\sigma^2)] = N$ $DE(z \lambda) = (2\lambda)^{-1} \exp(- z /\lambda) = DE$
RVD(DE-N)	$C^*(z) = [(DE \oplus DE) \oplus (N \otimes N)]_{(z)}$ $C^*(z) = [\sigma^2/(2\lambda^2)] N(z \sigma) + \{\exp[\sigma^2/(2\lambda^2)]/(4\lambda^2)\}$ $\times [(\lambda + A_1)\phi(-A_1/\sigma)\exp(-z/\lambda) + (\lambda + A_2)\phi(-A_2/\sigma)\exp(z/\lambda)]$ ただし $\sigma = \sigma_m/\sqrt{2}$, $A_1 = z - \sigma^2/\lambda$, $A_2 = -z - \sigma^2/\lambda$ $\phi(u) = (2\pi)^{-1/2} \int_u^{\infty} \exp(-t^2/2) dt$
RVD(DDE-N)	$C^*(z) = [(DDE \oplus DDE) \oplus (N \otimes N)]_{(z)}$ ここで $DDE(z \lambda_1, \lambda_2, \alpha) = (1-\alpha) DE(z \lambda_1) + \alpha DE(z \lambda_2)$ $C^*(z) = 2\sigma^2(C_1 + C_3) N(z \sigma)$ $+ \exp[\sigma^2/(2\lambda_1^2)]$ $\times [(C_2 + C_1 K_1)\phi(-K_1/\sigma)\exp(-z/\lambda_1) + (C_2 + C_1 K_2)\phi(-K_2/\sigma)\exp(z/\lambda_1)]$ $+ \exp[\sigma^2/(2\lambda_2^2)]$ $\times [(C_4 + C_3 K_3)\phi(-K_3/\sigma)\exp(-z/\lambda_2) + (C_4 + C_3 K_4)\phi(-K_4/\sigma)\exp(z/\lambda_2)]$ ただし $C_1 = [(1-\alpha)/(2\lambda_1)]^2$, $C_2 = \lambda_1 [C_1 - \alpha(1-\alpha)/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)]$ $C_3 = [\alpha/(2\lambda_2)]^2$, $C_4 = \lambda_2 [C_3 + \alpha(1-\alpha)/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)]$ $K_1 = z - \sigma^2/\lambda_1$, $K_2 = -z - \sigma^2/\lambda_1$ $K_3 = z - \sigma^2/\lambda_2$, $K_4 = -z - \sigma^2/\lambda_2$ $\sigma = \sigma_m/\sqrt{2}$ $\phi(u) = (2\pi)^{-1/2} \int_u^{\infty} \exp(-t^2/2) dt$

ただし 記号 $\oplus$ は畳み込み(convolution)を意味する。

λ 、 α ($0 < \alpha < 1$)、 λ_1 、 λ_2 、 σ_m はモデル・パラメータである。

でなく、高度維持誤差の確率密度関数を知るのが困難なため、実用的ではない。この代替方法として相対垂直距離 (Relative vertical distance: RVD) による解析が提案されてきた⁽⁷⁾。

ここで、相対垂直距離は、同一フライトレベルを割り当てられた航空機で、観測時間が近接した航空機対の観測高度の差で定義される。相対垂直距離の確率密度関数 $C^*(z)$ は近似的に、(1)式の右辺の $\{ \}$ 内の積分で定義される重畳確率密度関数 $C(z)$ に等しい。従って、測高誤差の影響が無視できるとき、垂直重畳確率は次式で与えられる⁽⁷⁾。

$$P_z(S) \doteq \int_{S-L_z}^{S+L_z} C^*(z) dz \quad (3)$$

ここで、 S が L_z に比べて十分大きいときには、近似的に次式が成り立つ。

$$P_z(S) \doteq 2 L_z C^*(S) \quad (4)$$

以下、特に断わらない限り、垂直重畳確率は $S=1,000$ ft に対する垂直重畳確率 $P_z(1000)$ を意味するものとする。

3. 垂直重畳確率の推定

3.1 相対垂直距離の分布モデル

これまで、NAMS (航法精度測定装置)⁽⁹⁾ と呼ばれる測高レーダを用いて取得したデータに基づき、相対垂直距離の実測分布によく合うような(3)式の $C^*(z)$ のモデルを考え、その適合度を調べてきた。その結果、いくつかの確率密度関数 (pdf と略記) モデルのうち、表1に示すような確率密度関数モデルが統計的な意味でよく合うことが分かった^{(2),(4)}。これらのモデルは以下のようなものである。

{1} DE-N Mixed モデル

この pdf は正規分布 (Gaussian: 表中では N) と両側指数 (Double Exponential: DE と略記) 分布から成る混合型モデルである。

{2} RVD (DE-N) モデル

この pdf は二つの関数の畳み込み (convolution) どうしの畳み込みから成る。一方は測定誤差に対応する正規分布、他方は高度維持誤差に対応する両側指数分布である。

{3} RVD (DDE-N) モデル

この pdf も、やはり、二つの関数の畳み込み (convolution) どうしの畳み込みから成る。一方は測定誤差に対応する正規分布、他方は高度維持誤差に対応する混合型両側指数分布 (Double Double Exponential: DDE と略記) である。ここで DDE 分布は二つの DE 分布の混合型モデルである。

3.2 実測分布との比較

図1に相対垂直距離の実測分布と各モデルによる計算値の分布を示す。各分布は $Z=0$ に関してほぼ対称なので、 $Z=0$ で折り返して重ねてある。横軸は絶対値をとった値で示してある。使用データはNAMSで取得した(仙台および串本)ものでフライトレベル290以上の高度を飛行した約3万機分のものである。これから8,716組の相対垂直距離データを得た。

$P_z(1000)$ は図1の分布を $Z=1,000$ ft の領域にまで外挿し、(4)式に基づき推定できる。表2には、上記データに基づき推定したモデル・パラメータ、そのときのAIC (赤池情報量基準)⁽⁶⁾の相対値、および各モデルを用い $L_z=52$ ft ($=0.0085$ NM) として計算した垂直重畳確率の計算値を示す。垂直重畳確率は(4)式で計算したものである。

図1 相対垂直距離の実測分布と各モデルによる計算値との比較。 $Z=0$ で折り返して重ねてある。

表2 よく適合するモデルのパラメータ,
A I Cおよび垂直重畳確率。()の
数字は最小値を0としたA I Cの相
対値。(L_z=52 ft (=0.0085NM))

モデル	推定パラメータ	A I C	P _z (1,000)
DE-N Mixed	$\lambda=102.4$ ft $\sigma=115.4$ ft $\alpha=0.852$	108,180 (4)	4.47×10^{-6}
RVD(DE-N)	$\lambda=46.2$ ft $\sigma_m=54.3$ ft	108,176 (0)	6.05×10^{-9}
RVD(DDE-N)	$\lambda_1=38.7$ ft $\lambda_2=94.8$ ft $\alpha=4.12 \times 10^{-2}$ $\sigma_m=61.3$ ft	108,177 (1)	2.27×10^{-6}

A I Cは、最尤推定法に基づくモデルの良さを表す尺度で、次式で与えられる。

$$A I C = -2\{\log_e(\text{最大尤度}) - K\} \quad (5)$$

ただし、 K はモデル・パラメータの数である。A I Cの値が小さいほど良いモデルであることを意味する。表2では実際の計算値に加えて、最小値を0とした相対値を括弧内に示してある。各モデルのA I Cの差は4以内で、統計的なあてはめの良さの度合にはあまり差異がないと考えてよい。しかし、これらのモデルを用いて計算した垂直重畳確率 $P_z(1000)$ には、表2に見られるように採用するモデルにより 10^3 倍ほどの大きな差異がみられる。

3.3 推定精度

一般に、衝突危険度の計算に先立ち、この方法による垂直重畳確率の推定値の推定精度がどのくらいかを見積っておく必要がある。ここで求めたモデル・パラメータはいわゆる最尤推定量(点推定量)である。最尤推定量の信頼区間幅を求める方法はあるが、これらのモデル・パラメータの複雑な関数である垂直重畳確率 $P_z(1000)$ については、その信頼区間を解析的に求めることは困難である。そこで、推定値の確かさをみるため、与えられた観測データのみに基づいて目的とする推定量の評価をする方法として知られているブートストラップ法^{(1), (5)}を用いることにする。

4. ブートストラップ法

これは Efron⁽¹⁾により提案された方法でモンテカルロ法を用いるものである。この方法では、観測データに基づき、母集団からのデータ抽出過程を疑似的に作りだす。こうして作られた標本をブートストラップ標本と呼ぶ。

図2は、ブートストラップ法による、 $P_z(1000)$ の分布の推定手順である。図中で $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ は観測データで、これから経験分布関数 $\hat{F}$ をつくる。ついで、分布 $\hat{F}$ より大きさ N の標本 $(X_1^*, \dots, X_N^*)$ を抽出する。具体的には $\{X_1, \dots, X_n\}$ の中から繰り返しを許し N 個の標本をランダムに選ぶ。ついでパラメータ $\hat{\theta}_N^* = \hat{\theta}_N^*(X_1^*, \dots, X_N^*)$ を計算する。ただし、実際の $\hat{\theta}_N^*$ は $P_z(1000)$ や α, λ, σ などのモデル・パラメータである。図2で添字⁽ⁱ⁾は i 番目のブートストラップ標本についての値を意味する。このとき垂直重畳確率は次式で計算した。

$$P_z(1000)^{(i)} \doteq 2 L_z C^*(1000 | \hat{\theta}_N^{*(i)}) \quad (6)$$

ここで、 $L_z=52$ ft, $C^*(z | \hat{\theta}_N^{*(i)})$ は $\hat{\theta}_N^{*(i)}$ をパラメ

図2 ブートストラップ法による垂直重畳確率
の推定手順

ータとする垂直間隔 Z に対する重畳確率密度である。以上の手順を B 回繰り返し、垂直重畳確率の推定値 P_z (1000)⁽⁴⁾ の分布を調べた。ただし、 $n=N=8,716$, $B=100$ である。

5. 推 定 結 果

5.1 計算の収束精度

表3にはブートストラップ法により求めた各モデルごとの、モデル・パラメータの推定値 $\hat{\theta}_N^{*(4)}$ および垂直重畳確率の統計量、計算時間 (CPU time) などを示した。

表3 ブートストラップ法による推定結果
(標本数 $n=N=8,716$)

パラメータ	モデル	DE-N Mixed	RVD(DE-N)	RVD(DDE-N)
$P_z(1000)$	平 均	4.12×10^{-6}	3.20×10^{-8}	1.12×10^{-6}
	標準偏差	1.89×10^{-6}	1.65×10^{-8}	9.68×10^{-7}
	最 大	1.29×10^{-5}	1.03×10^{-7}	4.37×10^{-6}
	最 小	1.23×10^{-6}	4.44×10^{-9}	2.24×10^{-8}
	歪 度	1.55	1.42	1.16
AIC	尖 度	6.86	6.19	3.87
	平 均	1.082×10^5	1.082×10^5	1.082×10^5
	標準偏差	2.30×10^2	2.06×10^2	1.17×10^2
	歪 度	-4.7×10^{-3}	-3.3×10^{-3}	-4.6×10^{-2}
	尖 度	0.161	0.251	2.42
λ or λ_1 (ft)	平 均	λ 100.4	λ 47.2	λ_1 40.6
	標準偏差	6.5	1.8	4.2
	歪 度	0.79	-0.25	-0.51
	尖 度	4.42	3.86	2.63
λ_2 (ft)	平 均	-	-	83.1
	標準偏差	-	-	9.13
	歪 度	-	-	-0.24
	尖 度	-	-	2.46
α	平 均	0.8437	-	0.0454
	標準偏差	0.0332	-	0.0094
	歪 度	-2.6×10^{-2}	-	-0.70
	尖 度	2.19	-	3.46
σ or σ_m (ft)	平 均	116.9 σ	53.1 σ_m	58.7 σ_m
	標準偏差	1.5	2.9	4.3
	歪 度	-4.3×10^{-2}	-0.209	0.22
	尖 度	2.72	3.60	2.53
収束精度基準	Er	10^{-3}	10^{-3}	10^{-1}
CPU time(hr)		15.7	16.5	121.9
試行回数	B	100	100	100

表3の収束精度基準 E_r はモデル・パラメータの推定に関連した基準値で、最尤推定量を求める際、全てのモデル・パラメータ $\hat{a}_i$ について次の条件が満たされたとき収束したものとして繰り返し計算を打ち切っている。

$$|(\hat{a}_{i+1} - \hat{a}_i) / \hat{a}_i| < E_r \quad (7)$$

ここで、添字 i は最尤推定量を求める際の i 番目の反復についての値を意味する。DE-N Mixed モデルと RVD (DE-N) モデルについては $E_r = 10^{-3}$ とした。しかし、RVD (DDE-N) モデルでは、モデル・パラメータ数が多く、 E_r を小さく取ると計算時間が膨大になるため、やむを得ず、 $E_r = 10^{-1}$ とした。実際には α の E_r が 10^{-1} で、他のパラメータについては(7)式の左辺の値は 10^{-2} 以下になっている。推定パラメータの有効数字は RVD (DDE-N) モデルでは α が1桁、他のパラメータでは2桁程度、それ以外のモデルでは3桁以上と考えてよい。

5.2 推定値の分布

図3から図5は、各モデルを用いた場合について、100組のブートストラップ標本から求めた $P_z(1000)$ の計算値の累積度数分布である。併せて、平均 (mean)、標準偏差 (s.d.)、最大値 (max)、最小値 (min) を示した。

図3の DE-N Mixed モデルの場合、結果は 1.23×10^{-6} から 1.29×10^{-5} までの間に分布している。変動比=(最大値/最小値)として定義すると、変動比は10.5である。非対称な分布形状を示しており、歪度は1.55である(対称ならば0となる)。

図4は RVD (DE-N) モデルの場合の分布である。 $P_z(1000)$ は 4.44×10^{-8} から 1.03×10^{-7} まで変化している。変動比は23.2、歪度は1.42である。

図5は RVD (DDE-N) モデルの場合である。 $P_z(1000)$ の変化範囲は 2.24×10^{-8} から 4.37×10^{-6} までで、変動比は195、歪度は1.16であった。

5.3 結果の考察

これらの結果は、垂直重畳確率 $P_z(1000)$ の推定精度が使用するデータ数やパラメータの数と関連があることを示唆している。一般に、データ数が多くなればこれらの推定値のばらつきは小さくなる。そして、データ数が一定の場合には、モデルのパラメータ数が少ないほど推定値のば

図3 DE-N Mixed モデルについての $P_z(1000)$ の推定値の累積相対度数分布。

図4 RVD (DE-N) モデルについての $P_z(1000)$ の推定値の累積相対度数分布。

図5 RVD (DDE-N) モデルについての $P_z(1000)$ の推定値の累積相対度数分布。

らつきも小さいと考えられる。

この各モデル毎の $P_z(1000)$ の変動の範囲は、モデルにより異なるが、10倍から200倍程度である。他方、表2に示したように、選択するモデルによる推定値の変化範囲は 6.05×10^{-9} から 4.47×10^{-6} まで、すなわち変動比にして約 $10^3 (=745)$ である。このことと比較すれば、各モデルにおける推定値の変動範囲は1桁程度小さい。しかし、衝突危険度を評価する場合には、安全サイドの評価をするため、 $P_z(1000)$ の上限が問題になることが多い。この場合には、ブートストラップ法による、ばらつきを考慮した $P_z(1000)$ の変動範囲 (4.44×10^{-9} から 1.29×10^{-5}) の上限を考慮することが肝要と考える。

個々のモデルによる推定値については、表2にみるように、DE-N Mixed モデルが最も大きな推定値を与える。また、ブートストラップ法による変動比は最も小さいが、その最大値は 1.29×10^{-5} と最も大きい。従って、モデルの当てはめによる $P_z(1000)$ の推定値の最大値としてこの値を採用することが適当と考える。

6. む す び

本論文では、航空機の高度データを用いて垂直重畳確率を推定する方法を取り上げ、これによる垂直重畳確率 $P_z(1000)$ の推定精度について考察した。NAMSで取得した8,716個の相対垂直距離データを用い、実測分布によく適合することが知られている3つの分布モデル (DE-N Mixed, RVD (DE-N), RVD (DDE-N) の各モデル) について、この推定値の精度をブートストラップ法により検討した。その結果、これまで明らかでなかった $P_z(1000)$ の推定精度を見積ることが可能となり、次のことがわかった。

(i) 選択するモデルにより、 $P_z(1000)$ の値は 6.1×10^{-9} から 4.5×10^{-6} と異なるが、ブートストラップ法による結果を考慮すると、変化範囲は 4.4×10^{-9} から 1.3×10^{-5} である。

(ii) $P_z(1000)$ の推定値の変動範囲は、選択する分布モデルにより異なるが、変動比 (=最大値/最小値) で10から200程度である。

従って、衝突危険度の評価に際しては、 $P_z(1000)$ の推定値における上記の不確定性を考慮し、より安全サイドの評価をするため、ブートストラップ法による推定値の最大値 (1.3×10^{-5}) を用いるのが適当と考える。

今後の研究課題としては、本研究成果の実際の評価への応用、モデル・パラメータと $P_z(1000)$ の推定精度との関係の検討などがある。

参 考 文 献

- (1) B. Efron: "Bootstrap method: another look at the Jackknife", The Annals of Statistics, Vol. 7, No.1, p.1-26, 1979
- (2) 長岡 栄: "航空機対の垂直重畳確率の推定", 日本航海学会論文集, No. 75, p. 29-36, 1986
- (3) G. Moek: "Estimating the probability of vertical overlap $P_z(1000)$ based on the results of the European vertical radar data collection", ICAO RGCSP-WG/B-WP/18, Jan. 1987
- (4) S. Nagaoka: "Characterizing height-keeping error distribution based on indirect observation", The Journal of Navigation, Vol.39, No.3, p.416-423, 1986
- (5) P. ダイアコニス, B. エフロン: "コンピュータがひらく新しい統計学", サイエンス, 7月号, p.58-75, 1983
- (6) H. Akaike: "A new look at the statistical model identification", IEEE Trans. on Auto. Cont., AC-19, p.717-722, 1974
- (7) S. Nagaoka: "Effects of measurement errors in estimating the probability of vertical overlap", The Journal of Navigation, Vol.38, No.2, p.234-243, 1985
- (8) P. Reich: "Analysis of long range air traffic systems", The Journal of Institute of Navigation, Vol.19, No.1, p.88-98, 1966
 Ibid. No.2, p.169-186, 1966
 Ibid. No.3, p.331-347, 1966
- (9) 長岡 栄: "航法精度測定用レーダの研究", 東京大学学位論文, 1986