太陽観測による船位測定について—III.

平 岩 節*

Study on the Determination of Ship's Position
by Observing the Sun—III.

T. Hiraiwa

Abstract

In the case of fixing noon position by observing heavenly bodies, the combination of ante-meridian and noon sights of the sun has been most generally preferred.

However, it must be borne in mind that the ship's position fixed by such a method is of very low accuracy, accordingly it is desirable to add some other sight to them.

The writer has already studied¹⁾²⁾³⁾ the determination of ship's position by observing the sun from various points of view.

In this paper he esteems an ancient custom that 1st sight should be observed at 8 a.m. and a practical requirement that accurate ship's position must be gotten at noon. Considerations are offered on the most suitable opportunities to take 2nd sight according to various combinations of latitude and declination, and on the accuracy of ship's positions determined by this method provided that 1st and 3rd sights are observed at 8 a.m. and noon, and 2nd sight necessarily observed in the forenoon.

I 緒 言

太陽観測による正午位置測定法として、午前と正午、午前、午後、正午観測の組合せについての検討を先に試みた¹⁾²⁾³⁾のであるが本稿に於ては従来習慣的に行われている午前8時と正午観測の他に更に午前中の適当な時機に於ける観測を加えて測定された正午位置についての検討、考察を試みんとするものである。かく数次にわたり正午位置問題を採りあげる所以を本論に入るに先立ち述べておきたい。

航海者が天測によつて船位を求める場合常識的に最低の条件とされているのは二天体の方位の差が 30° (or 150°) の角度に在るものの同時観測である。之を一応船位の最低限と見做すと一日の基準となる正午位置には当然此の最低条件が要求されて然るべきであろう。午前8時と正午の観測を組合せた場合の位置の線の交角は緯度と赤緯の組合せによつて勿論異なるが、緯度が $0^\circ \sim 50^\circ$ 、赤緯が $23^\circ \text{N} \sim 23^\circ \text{S}$ なる範囲内に於ては $90^\circ \sim 52^\circ 33'$ である。一方単観測の標準偏差を σ とすれば、4時間転位された位置の線の標準偏差は $K\sigma$ という形で表示する事が出来る。従つて正午位置の確率密度は $\frac{\sin 90^\circ}{2\pi K\sigma^2} \sim \frac{\sin 52^\circ 33'}{2\pi K\sigma^2}$ となる。之と等値になる同時観測の天体方位の差は $\frac{\sin \varphi}{2\pi \sigma^2} = \frac{1}{2\pi K\sigma^2} \sim \frac{0.79388}{2\pi K\sigma^2}$ より $\varphi = \sin^{-1} \frac{1}{K} \sim \sin^{-1} \frac{0.79388}{K}$ となる。本式に於ける係数 K の値は海域、航路、季節、船速等に左右されるので一律にきめることが出来なくても経過時間4時間

* 北海道大学水産学部

Table 1

K	φ
2.0	30° 00' ~ 23° 23'
2.5	23° 35' ~ 18° 31'
3.0	19° 28' ~ 15° 21'

に対する推定船位の標準偏差を 1.3~2.1 と抑えれば、単観測の $\sigma=0.75$ より K は 2.0~3.0 になるのでそれに対応する φ の値を求めてみると第 1 表の如くなる。此の表にみる如く緯度と赤緯によつてきまる処の午前 8 時の太陽方位の差、換言すれば、正午の測定位置に於ける位置の線の交角の差違に基づく正午位置の精度の差は、推定船位の誤差による影響に比べれば概して少い。而して K が 2 以上である限り如何なる緯度、赤緯の組合せについても同時観測の交角 30° という lower limit を満足することは出来ない。かかる点よりみて、正午位置測定法に関する検討の必要を痛感する。既に種々なる観点よりこの問題の考究を行つてきたが、本稿に於ては第一観測を午前 8 時に行うという従来の習慣と正午現在に於てより正確な船位を要求する現実の問題の両者を尊重して他の一観測を午前中に行うという条件下に於ての検討考察を試みた。

II 観測時機

Fig. 1 午前 8 時と正午観測による測定船位の精度

d : 赤緯 s : 同符号 (l, d) c : 異符号 (l, d)

単観測及び推定船位の標準偏差を前稿⁽¹²⁾⁽¹³⁾同様夫々 0.75 , $0.75\sqrt{t}$ とした場合、午前 8 時と正午観測による二本の位置の線による測定船位の精度はどの程度のもので、緯度、赤緯の組合せに対してどう変るか、又同時観測に換算した天体方位の差はどれ位のものを第 1 図に示した。この図は前述の K が 2.236 の場合に当るもので如何にも低精度である。そこで第一観測 (午前 8 時) と正午観測の他に第二観測 (正午迄の航走時間を t とする) を加えて正午位置を測定した場合、最確船位 0 の確率密度 (g) は

$$g = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sigma_3} \sqrt{\sigma_1^2 \sin^2\theta_1 + \sigma_2^2 \sin^2\theta_2 + \sigma_3^2 \sin^2\theta_3}$$

に $\sigma_1=0.75\sqrt{5}$, $\sigma_2=0.75\sqrt{1+t} \doteq 0.75\sqrt{1+h}$ (h は時角)、 $\sigma_3=0.75$ を代入して

$$g = 0.12654 \sqrt{\sin^2\theta_2 + \frac{5\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_3}{1+h}} \quad \dots\dots\dots (1)$$

にて表わされる。之より極値条件を求めると、

$$(1+h) \left\{ 5\sin 2\theta_1 \frac{d\theta_1}{dh} + \sin 2\theta_3 \frac{d\theta_3}{dh} \right\} - (5\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_3) = 0 \text{ を得る。ここに } \theta_3 = 180^\circ - (\theta_1 + \theta_2)$$

より $\frac{d\theta_3}{dh} = -\frac{d\theta_1}{dh}$ 、にして上式を時間の時単位で表わせば条件式は

$$0.26180(1+h) \frac{d\theta_1}{dh} (5\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_3) - (5\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_3) = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。又 $\theta_1 = Z_2$ or $180^\circ - Z_2$ (Z_2 は第二観測時に於ける太陽方位) にして

$\cot Z_2 = \operatorname{cosech}(\cos l \tan d - \sin l \cosh)$ なる故

$$dZ_2 = \frac{(\cos l \tan d \cosh - \sin l) dh + (\sin h \tan d + \sinh \cosh \cos l) dl - (\sinh \cos l \sec^2 d) dd}{\sin^2 h + (\cos l \tan d - \sin l \cosh)^2}$$

ここに分子の第二項及び第三項は極く微小であるので neglect すると

$$\frac{dZ_2}{dh} = \frac{\cos l \tan d \cosh - \sin l}{\sin^2 h + (\cos l \tan d - \sin l \cosh)^2} \dots \dots \dots (3)$$

となる。又 Z_1 (午前8時に於ける太陽方位) 及び Z_2 と l, d, h の間には

$$\left. \begin{aligned} \sin Z_2 &= \frac{\sinh}{\sqrt{\sin^2 h + (\cos l \tan d - \sin l \cosh)^2}} \\ \cos Z_2 &= \frac{\cos l \tan d - \sin l \cosh}{\sqrt{\sin^2 h + (\cos l \tan d - \sin l \cosh)^2}} \\ \sin Z_1 &= \frac{1.732051}{2\sqrt{0.75 + (\cos l \tan d - 0.5 \sin l)^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

なる関係がある。又 $\theta_2 = Z_1$ or $180^\circ - Z_1$ なる故(3)(4)式より与えられた l, d に対する任意時に於ける(2)式の左辺の値は求められるので、それが0になる条件を図式解法により求めその結果を図示したのが第3図である。ここに、 g の値は短時間内に於ては急増減はない

Fig. 2

Fig. 3 第二観測の最適時機

ので最適機の時角に或る程度の巾をもたせることを許容すれば $h^{(m)} = a + b|l^\circ - d^\circ|$ なる一次式によると想定してよいので第3図の数値より係数 a, b を求めると上式は $h^{(m)} = 13.60 + 4.56|l^\circ - d^\circ|$ という簡単な近似式で表わされる。而して本式による絶対値最大誤差は 11.3^m であるので可成りの近似性をもつて成立する。

III 最適機観測による測定船位

赤緯と緯度とが与えられればそれに対する第二観測の最良の時機は(2)式より求められるので、得たる h に対する θ_1 及び Z_1 より θ_2 を求め夫等を(1)式に代入すれば g の極大値は算出される。第4図は各緯度・赤緯に対する午前8時、上述の最適機、正午の三観測による測定船位の確率密度を画

いたもので、併せて二天体の同時観測によるものの交角が 30° 、 40° 、 50° なる場合の値を点線によつて示した。次に此等の $g_{\max}$ を他の方法による測定船位と比較してみるに、本稿に於ける $g_{\max}$ を A 、午前8時と正午観測による船位の確率密度を B 、午前の最適機¹⁾と正午観測によるものを C 、正午と午前・午後の最適機²⁾の三観測によるものを D とすれば A/B 、 A/C 、 A/D は夫々第5(A)、5(B)、5(C)図に示す如くである。之によれば位置の線が二本のものに比べれば相当良い結果が見られるが三本の最良の組合せに比すれば可成り遜色あるものとしなければならない。

IV 推定誤差式の差違に基づく最適時角の差及び二、三の問題

上述の最適時角算定基礎は単観測、推定船位誤差の標準偏差を夫々 0.75 、 $0.75\sqrt{t}$ としたものであるが、最適時機は此の両者の比によつて変動するものであるので異つた誤差量に対しては自ら最適時角も異つてくる。今単観測、転位の線の標準偏差を夫々 a 、 $b\sqrt{t}$ とした場合 a と b との関係を $b=ca$ とおけば、極値条件式は

$$0.26180(1+c^2t) \frac{d\theta_1}{dt} \{ (1+4c^2) \sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_3 \} - c^2 \{ (1+4c^2) \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_3 \} = 0$$

となり本稿に述べたのは $c=1$ の場合である。又前稿²⁾

と同様 $c=\sqrt{2}$ 、 $c=0.6$ の場合について上記条件式を満足する時角を求めてみるに、 $l=0^\circ$ 、 20° 、

Fig. 5 (B)

Fig. 5 (C)

Fig. 7 (A) 午前8時、正午、及び午前の任意時における三観測による正午位置の確率密度 但し $l=0^\circ$ $d=5^\circ$

40°の場合について第6図の如くである。之に前と同様 $h^{(m)}=a+b|l^\circ-d^\circ|$ という一次式を当てはめてみるに、 $c=\sqrt{2}$ の場合 $h=9.60+4.32|l^\circ-d^\circ|$ 、 $c=0.6$ の場合 $h=15.93+5.57|l^\circ-d^\circ|$ となり、 $c=\sqrt{2}$ の場合と本稿の $c=1$ の場合とでは大きな差はないし又 $c=0.6$ の場合と $c=1$ に於ける最適時角の差 $\Delta h^{(m)}$ は $2.33+1.01|l^\circ-d^\circ|$ で $l-d$ の増大につれ Δh も大きくなって行くが、その様な場合時角の変化に伴う g の変化量は僅小であるので最適時角に相当の巾を許容出来る。従つて c の値を一律に決めることが出来なくても最適時角は前述の $c=1$ の場合を基準にとり得る。

次に又旧海軍の資料によれば、推定船位の誤差は航走時間に比例するとしており同資料より天測位置の線を t 時間転位した場合の総合誤差を、短時間内に於ては $\gamma=0.5\sqrt{1+0.5t^2}$ で表わされるものとして最適時角を求める式を誘導すると $0.26180(1+0.5h^2)\frac{d\theta_1}{dh}(9\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_3) - h(9\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_3) = 0$ となり前

Fig. 7 (B) 午前8時、正午及び午前の任意時における三観測による正午位置の確率密度 但し $l=20^\circ$ $d=20^\circ$ (l, d : 異符号)

と同様 $l=0^\circ$ 、 20° 、 40° の場合に於ける h を算出してみると第6図に示す如く前三者と全然趣を異にしている。此の相違は勿論推定誤差式の差違に基因するものであるが、航走時間に比例する要因(系統誤差的なもの)が未知、未調整のまま放置されているとは考えられないので、残留誤差の影響は短時間内に於ては他のものに比し僅小と見るのが妥当と考えるし又筆者の試みた実験例⁴⁾によつてもその傾向が明らかであるが、決定的な結論を得るには誤差原因の解析と実証を必要とする困難な問題である。

次に推定誤差の差が正午位置に及ぼす影響についてみる為第7 (A) 図に正中高度の大なる場合として $l=0^\circ$ 、 $d=5^\circ$ の組合せを、又第7 (B) 図に小なる例として $d=20^\circ$ 、 $l=20^\circ$ (l 、 d : 異符号) の組合せに対し、午前8時と正午観測の他に第二観測として午前中に於ける任意時のものを加えた場合の確率密度の変化状況を書いてみた。両図を見て気付くことは第二観測時機の適否もさることながら推定誤差の影響が大であるということである。従つて良好な船位を得んとするには、より適確な船位推定法の確立が必要であることを示唆している。

参 考 文 献

- 1) 平岩：太陽観測による正午位置決定に就いて、日本航海学会誌6 (1952).
- 2) ——：太陽観測による船位測定について (I)、同誌17 (1957).
- 3) ——：太陽観測による船位測定について (II)、同誌17 (1957).
- 4) ——：短時間内に於ける推定船位誤差の一例について、同誌26 (1961).