推測航法における計算式の仮定より 生ずる誤差について

嶋 田 和 治*

Errors of Dead Reckoning's Formula resulted from Difference of Assumption

K. Shimada

Abstract

Some formulas for converting distance on a rhumb line track into distance of latitude and longitude are approximate equations, and their errors are negligible in practical use. But in special cases, their assumptions may lead to unthinkable results. For example, in low latitude departure in Marcator's Sailing becomes greater than difference of longitude, and true middle latitude on terrestrial ellipsoid is not between two latitudes passing on two points.

To research these subjects, it is necessary to take the correct equation of meridian length and departure in navigational formulas.

The objects of this paper are to point out the errors of each formula in navigational Dead Reckoning computation and to discover the real relation between True Mid Lat Sailing, and also point out the errors of Marcator's Sailing in which the geographical miles are used and Parallel Sailing assumed by spherical earth.

1. 緒 言

推測航法の各公式には略算式も含まれているが、その誤差量は大体実用上無視出来る程度のものである。しかし特殊な場合には、その計算結果が意外な値となることがある。例をあげると、低緯度における漸長緯度航法で経度差より東西距が大きくなる場合、真中分緯度を計算すると両地の外側に出る場合等である。これ等の問題点にふれるには、正確な子午線長及び東西距公式を航法上の式にとり入れ検討してみる必要がある。このことにより誤差量が明確になり、誤差許容量により適用すべき航法を判断出来る。又現在、漸長緯度航法と真中分緯度航法公式の分類について、種々の方法があるけれども、これに対する解析を述べると共に、仮定により、地球を真球とした場合と、回転楕円体とした場合の、真中分緯度計算式の相異と問題点についても検討し、必要な諸表の作成をこころみた。

* 海上保安大学校

2. 距等圏航法

地球を真球と仮定するならば、距等圏航法における東西距と経度差の関係式は

$$D_s = dep_s = \lambda_s \cdot \cos \varphi \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

- D_s : 地球を真球と仮定した場合の距離で経度一分の長さを単位とする。
 dep_s : 真球上の東西距で単位は上に同じ。
 λ_s : 真球上の経度差
 φ : 地理緯度

であつて、これは正しく成立する。

しかし地球は真球よりも回転楕円体に近いから、次式で示される地球楕円体におきかえて、考えてみる。

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/a^2 = 1$$

- a : 赤道半径 (6377397.15 米 **)
 b : 極半径 (6356078.96 米 **)

この地球楕円体上の任意緯度における距等圏半径が

$$R_{(\varphi)} = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos \varphi$$

- $R_{(\varphi)}$: 緯度 φ における距等圏半径
 e : 離心率 $(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}/a = 0.0816968$ **

であるから、東西距と経度差の関係式は

$$D_t = dep_t = \lambda_t \cdot \cos \varphi \cdot (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

- D_t : 地球を回転楕円体と仮定した場合の距離で地理哩を単位とする。
 dep_t : 地球楕円体上の東西距で単位は上に同じ。
 λ_t : 地球楕円体上の経度差。

となる。 D_t が地理哩を単位としている点に注意を要する。この単位は Bessel の測定値を用いると、約 1855.11 米である。そこで長さの単位として、国際哩 (1852 米) を使つた距離 D で示すため、 $k = \text{地理哩} / \text{国際哩} \doteq 1.0017$ とおけば

$$D = dep = k \cdot \lambda_t \cdot \cos \varphi \cdot (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

となる。変形して

$$\begin{aligned}
 dep &= k \lambda_t \cos \varphi \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{8} e^4 \sin^4 \varphi + \dots \right) \\
 &\doteq k \lambda_t \cos \varphi \cdot \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi \right) \quad \dots\dots\dots (2.3_1)
 \end{aligned}$$

(2.3) 式によつて示される距離が、地球楕円体上における国際哩を単位とした、正しい距等圏航法公式であつて、(2.3₁) はその近似式である。

近似式 (2.3₁) の誤差量は次式で示される値より大きくなることはない。

$$e^6 k \lambda \cos \varphi \sin^6 \varphi$$

地球楕円体上において (2.1) を用いた場合の誤差量を ΔD とするならば

$$\Delta D = D - D_s = \lambda \cos \varphi \{ k(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} - 1 \} \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

$$\doteq \lambda \cos \varphi (0.0017 + 0.0033 \sin^2 \varphi) \quad \dots\dots\dots (2.4_1)$$

となる。(2.4₁) 式によつて明らかなように、誤差量の最大値は精々 0.5% 程度であるから、それ

** Bessel の測定値

以上の精度を必要としなければ、地球楕円体上において(2.1)式を用いても差支えない。又上記のように、地球楕円体上における正確な距等圏航法公式は複雑であつて、この計算を一般に応用することは困難であるが、 $k \cos \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$ を計算し表にしておけば、(2.1)式により計算するのと全く同じ手順により、正確な結果が得られる。表Iは10度毎の結果を示したものである。同表中の適用範囲とは、(2.1)式の誤差許容量を0.5 浬とした場合のものである。

表1 函数 $f(\cos \varphi) = k \cos \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$

	$f(\cos \varphi)$	$f(\cos \varphi) - \cos \varphi$	適用範囲 (誤差 0.5 浬)
0°	1.00168	0.00168	294'
10°	0.98656	0.00175	282'
20°	0.94164	0.00195	241'
30°	0.86821	0.00217	200'
40°	0.76839	0.00235	164'
50°	0.64513	0.00234	138'
60°	0.50210	0.00210	120'
70°	0.34366	0.00158	109'
80°	0.17451	0.00086	101'

3. 子午線上航法

地球を真球と仮定するならば子午線上航法における、距離と緯度差 ($\varphi_2 \sim \varphi_1$) の関係は

$$D_s = \varphi_2 - \varphi_1 \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

であつてこれは正しく成立する。

次に地球楕円体と仮定した場合、距離の単位として緯度一分に対する長さを一浬とするならば(3.1)式は成立する。しかし場所によつて単位の変らない、国際浬によつて示そうと思えば(3.1)式は近似式となり、正確な式は次の要領によつて導かなければならない。

任意緯度における子午線の曲率半径 $\rho_{(\varphi)}$ が

$$\rho_{(\varphi)} = a(1 - e^2) \cdot (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}}$$

であるから任意緯度間の子午線長 l は

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} a(1 - e^2) \cdot (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} d\varphi \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

となる。赤道から任意緯度までの長さを計算するため $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \varphi$ とおく。被積分函数を級数展開して項別積分を行い整理すると

$$l \text{ (浬)} = \varphi - 8.633 \sin 2\varphi + 0.009 \sin 4\varphi - \dots\dots\dots (3.3)$$

又は

$$l \text{ (米)} = 1852.01037\varphi - 15988.5 \sin 2\varphi + 16.6 \sin 4\varphi - \dots\dots\dots (3.3_1)$$

となる。但し φ は角度の分単位とする。

(3.3)式の第4項以下を省略した計算結果が表IIである。

表Ⅱ 子午線長 (単位: 海里: 赤道から各緯度まで)

φ	mer dist	φ	mer dist	φ	mer dist	φ	mer dist	φ	mer dist
1°	59.700	21°	1254.239	41°	2451.467	61°	3652.691	81°	4857.354
2°	119.400	22°	1314.019	42°	2511.430	62°	3712.855	82°	4917.643
3°	179.100	23°	1373.806	43°	2571.404	63°	3773.028	83°	4977.935
4°	238.802	24°	1433.601	44°	2631.388	64°	3833.210	84°	5038.230
5°	298.506	25°	1493.404	45°	2691.382	65°	3893.400	85°	5098.526
6°	358.211	26°	1553.214	46°	2751.387	66°	3953.598	86°	5158.825
7°	417.918	27°	1613.033	47°	2811.403	67°	4013.803	87°	5219.125
8°	477.628	28°	1672.861	48°	2871.428	68°	4074.017	88°	5279.426
9°	537.341	29°	1732.697	49°	2931.465	69°	4134.238	89°	5339.728
10°	597.057	30°	1792.512	50°	2991.512	70°	4194.465	90°	5400.030
11°	656.776	31°	1852.395	51°	3051.569	71°	4254.582		
12°	716.495	32°	1912.259	52°	3111.637	72°	4314.941		
13°	776.227	33°	1972.131	53°	3171.714	73°	4375.189		
14°	835.965	34°	2032.013	54°	3231.802	74°	4435.442		
15°	895.696	35°	2091.905	55°	3291.900	75°	4495.701		
16°	955.439	36°	2151.807	56°	3352.008	76°	4555.965		
17°	1015.187	37°	2211.719	57°	3412.126	77°	4616.234		
18°	1074.940	38°	2271.640	58°	3472.253	78°	4676.508		
19°	1134.700	39°	2331.572	59°	3532.390	79°	4736.786		
20°	1194.466	40°	2391.515	60°	3592.536	80°	4797.068		

(3.3) 式によつて明らかなように一般に使われている子午線長は, (3.3) 式における第2項以下を省略した近似式であつて, 正確な子午線上距離はこれを記号化して mer dist とし

$$D = \text{mer dist} \dots\dots\dots (3.4)$$

と書くことにする。この値は (3.3) 又は (3.3₁) 式の代数和又は差となる。

いま近似式 (3.1) 式の誤差量を $\Delta\varphi$ とおけば

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \text{mer dist} - (\varphi_2 \sim \varphi_1) \\ &\doteq -8.633(\sin 2\varphi_2 \sim \sin 2\varphi_1) \\ &= -17.267 \sin(\varphi_2 \sim \varphi_1) \cos(\varphi_2 + \varphi_1) \dots\dots\dots (3.5) \end{aligned}$$

となる。上式より明らかなように誤差量が最大値をとるのは $\varphi_1 \doteq 45^\circ N$, $\varphi_2 \doteq 45^\circ S$, の場合であつて $\Delta\varphi_{\max} \doteq -17.267$ 海里 となる。又誤差量が最も小さくなるのは φ_1, φ_2 が同名であつて $(\varphi_1 + \varphi_2)/2 \doteq 45^\circ$ の場合で $\Delta\varphi \doteq 0$ となる。

4. 一般航法

針路が $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$, 以外の一般航法における距離 (D), 針路 (θ), 東西距 (dep), 緯度差 ($\varphi_2 \sim \varphi_1$) の関係式として, 現在次式が用いられている。

$$D \sin \theta = dep \dots\dots\dots (4.1)$$

$$D \cos \theta = \varphi_2 \sim \varphi_1 \dots\dots\dots (4.2)$$

これは地球を真球と仮定した場合には両式共正しく成り立つ。

次に地球を回転楕円体と仮定した場合, (4.1) 式自身は正しく成り立つ。(4.2) 式は距離の単位として, 緯度一分の長さを用いるならば正しく成り立つ。しかし国際海里を単位とする場合には,

地理緯度一分に対する長さが場所により異なるから、(4.2) 式は (4.3) 式を考慮して

$$D \cos \theta = \text{mer dist} \dots\dots\dots (4.3)$$

とすべきである。(4.1) 式について詳述するならば、(4.1) 式自身の誤差はないがこれによつて求めた東西距より経度差を求める場合には、真中分緯度 $\bar{\varphi}$ を用いた次式によらなければならない。

$$\begin{aligned} dep &= k\lambda \cos \bar{\varphi} (1 - e^2 \sin^2 \bar{\varphi})^{-\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (4.4) \\ &\doteq \lambda \cdot \cos \bar{\varphi} (1.0017 + 0.0033 \sin^2 \bar{\varphi}) \end{aligned}$$

ここで特に

$$k\lambda \geq dep \dots\dots\dots (4.5)$$

なる不等式は常に成立することに注意する。この不等式については、次の点に留意する必要がある。 λ の単位は地理哩であり、 dep の単位は国際哩である。又函数 $\cos \bar{\varphi} \cdot (1 - e^2 \sin^2 \bar{\varphi})^{-\frac{1}{2}}$ は、微分することによつて容易に証明出来るが $0 \leq \bar{\varphi} \leq 90^\circ$ なる範囲では単調に減少し

$$|\cos \bar{\varphi} (1 - e^2 \sin^2 \bar{\varphi})^{-\frac{1}{2}}|_{\bar{\varphi}=0} = 1$$

であるから、(4.5) 式は如何なる場合にも成立する。

5. 漸長緯度航法

始めに次の常識的な点に注意する。推測航法における計算は、針路航程より到達地の緯度経度を求める場合と、両地の緯度経度より針路航程を求める場合の二種類にわけられる。この計算式の相違によつて各種航法に分類されるが、問題点は東西距と経度差の関係である。なお漸長緯度航法では東西距を定義しなくても計算の目的は達せられるが、他公式と比較するため特に定義

する。又漸長緯度には真球上の漸長緯度 $M = \int_0^\varphi \sec \varphi d\varphi$ 及び地球楕円体上の漸長緯度 $M' = \int_0^\varphi a(1 - e^2)/(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi \cdot d\varphi$ がある。これらの点に注意して漸長緯度航法を検討してみる。

5.1 真球上の漸長緯度航法公式

地球を真球と仮定した場合の漸長緯度航法公式は

$$\left. \begin{aligned} D \cos \theta &= \varphi_2 \sim \varphi_1 \\ \tan \theta &= \lambda_s / (M_2 \sim M_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.1)$$

である。この二つの公式があれば、冒頭に述べた二種類の計算は可能であり、且つこの公式には誤差を含んでいない。但し長さの単位はすべて経度一分の長さとする。

5.2 現用の漸長緯度航法公式

$$\left. \begin{aligned} D \cos \theta &= \varphi_2 \sim \varphi_1 \\ \tan \theta &= \lambda / (M_2' \sim M_1') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.2)$$

この地球楕円体上における現用の漸長緯度航法公式が、誤差を含むことは既述のことにより明らかである。すなわちその誤差の原因は、 $D \cos \theta = \text{mer dist} \doteq \varphi_2 \sim \varphi_1$ によつて説明出来る。そして $D \cos \theta = \varphi_2 \sim \varphi_1$ は真球上においてのみ正しいから現用の漸長緯度航法公式は異なつた二つの仮定の上に立てられた近似式であるといえる。その誤差量は低緯度にて大きくなる。

5.3 理論的に正しい漸長緯度航法公式

上記の点を考慮すると、地球楕円体上における正しい式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} D \cos \theta &= \text{mer dist} \\ \tan \theta &= \lambda_0 / (M_2' \sim M_1') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.3)$$

この式は誤差を含まないが計算は複雑である。この正しい (5.3) 式と近似式 (5.2) を比較することにより、針路航程より到達地の緯度経度を求める場合の、経度及び緯度に含まれる誤差量を示す。そのために他の航法と同様東西距を定義し経度差との関係式を求める。(4.1) (5.2) 式より、 $\lambda = dep(M_2' \sim M_1') / (\varphi_2 \sim \varphi_1)$ が得られ、一方 (4.1) (5.3) 式からは、 $\lambda_0 = dep(M_2' \sim M_1') / \text{mer dist}$ が得られる。この式が理論的に正しい漸長緯度航法公式における経度差と東西距の関係式である。従つて現用の漸長緯度航法公式において経度に含まれる誤差 ΔL は

$$\Delta L = \lambda_0 - \lambda = dep \left(\frac{M_2' \sim M_1'}{\text{mer drst}} - \frac{M_2' \sim M_1'}{\varphi_2 \sim \varphi_1} \right) \\ \doteq dep \cdot \Delta \varphi \cdot (M_2' \sim M_1') / (\varphi_2 \sim \varphi_1)^2 \dots \dots \dots (5.4)$$

となる。この式が示しているように次の各場合に誤差大となる。

- (i) 東西距大なる場合
- (ii) 子午線長誤差大なる場合
- (iii) 針路が東西方向に近い場合

なお緯度に含まれる誤差 $\Delta \varphi$ は (3.5) 式により示される。

6. 真中分緯度航法

真中分緯度航法公式は (4.1) (4.2) 及び

$$\lambda = dep \cdot \sec \bar{\varphi} \dots \dots \dots (6.1)$$

である。従来この真中分緯度航法と漸長緯度航法は類別されているけれども、全く同一であるとする説がある* ので前述した三種の漸長緯度航法と比較し解折してみる。問題は真中分緯度の求め方にしぼられる。

6.1 真球上の真中分緯度航法

真球上においては (4.1) (4.2) (6.1) 及び

$$\sec \bar{\varphi} = (M_2 \sim M_1) / (\varphi_2 \sim \varphi_1) \dots \dots \dots (6.2)$$

が真中分緯度航法の公式である。これらの式から、東西距と経度差の関係式を求めると

$$\lambda_s = dep \cdot (M_2 \sim M_1) / (\varphi_2 \sim \varphi_1)$$

となる。一方真球上の漸長緯度航法からも、(5.1) (4.1) から同じ式が得られる。これは両公式が同値であることを示している。

6.2 現用の真中分緯度航法

現在真中分緯度航法公式は、実用上殆んど用いられていないとされているが、公式としては、(4.1) (4.2) (6.1) 及び

$$\sec \bar{\varphi} = (M_2' \sim M_1') / (\varphi_2 \sim \varphi_1) \dots \dots \dots (6.3)$$

がある。前と同様東西距と経度差の関係式を求めると

$$\lambda = dep \cdot (M_2' \sim M_1') / (\varphi_2 \sim \varphi_1)$$

一方、現用の漸長緯度航法公式 (4.1) (5.2) から、同じ式が得られる。これら両式も又同値である。

6.3 理論的に正しい真中分緯度航法

前に述べた常数に注意するならば、(6.1) 式は次のようになる。

$$\lambda = dep \cdot \sec \bar{\varphi} \cdot 1/k \dots \dots \dots (6.1_1)$$

* 秋吉利雄著『航海天文学の研究』p155

従つて理論的に正しい真中分緯度航海公式は、(4.1) (4.4) (6.1) 及び

$$\sec \bar{\varphi} = k(M_2' \sim M_1') / \text{mer dist} \dots\dots\dots (6.4)$$

である。前と同様変形すると、定数は約分されて次の様になる。

$$\lambda = \text{dep} \cdot (M_2' \sim M_1') / \text{mer dist}$$

一方理論的に正しい漸長緯度航海公式 (4.1) (5.3) から同じ式が得られる。これら両式も又同値である。

6.4 要 約

上記三種について両航海を比較した結果明かなように、仮定が同じである限り漸長緯度航海と真中分緯度航海は同値であつて、同じ結果が得られる筈である。なお現用の真中分緯度航海(漸長緯度航海)の真中分緯度に含まれる誤差 $\Delta \cos \bar{\varphi}$ は、(6.3) (6.4) から次式によつて示される。

$$\begin{aligned} \Delta \cos \bar{\varphi} &= (\text{mer dist}) / k(M_2' \sim M_1') - (\varphi_2 \sim \varphi_1) / (M_2' \sim M_1') \\ &\doteq \Delta \varphi / (M_2' \sim M_1') \dots\dots\dots (6.5) \end{aligned}$$

この式は低緯度における誤差が大きいことを示している。低緯度特に両半球にまたがるような場合に真中分緯度の余弦値が1より大きくなり、東西距の方が経度差より大きな値をとることがあるのは、ここに述べた誤差に起因するものであり、我々が暫々経験するところである。又、前に述べた三種の航海を比較しその長短を比較すると次のようになる。

[1] 真球上の真中分緯度航海 (同漸長緯度航海)

- (1) 仮定そのものに誤差がある。
- (2) 計算簡単。
- (3) 計算式上の誤差はない。

[2] 現用の真中分緯度航海 (同漸長緯度航海)

- (1) 仮定は部分的に地球の実体に近い。
- (2) 計算簡単。
- (3) 計算式上の誤差がある。

[3] 地球楕円体上において理論的に正しい真中分緯度航海 (同漸長緯度航海)

- (1) 仮定は地球の実体に近い。
- (2) 計算複雑。
- (3) 計算式上の誤差は必要に応じ小さく出来る。

7. 中分緯度改正表

平均中分緯度 $\varphi_m = (\varphi_1 + \varphi_2) / 2$ より、真中分緯度を求める改正表として、現在幾つかの表があるが、表によつてその値は相当異なり、中には誤りを指摘されたものもある^{***} 改正値 ($\Delta \varphi_m$) は前述のことから次式によらなければならない。

$$\Delta \varphi = \cos^{-1} \frac{\text{mer dist}}{k(M_2' \sim M_1')} - \varphi_m \dots\dots\dots (7.1)$$

この計算結果を表にしたものが、別表Ⅲである。

(7.1) 式の計算及びその結果については、次の諸点に注意を要する。

(i) 低緯度において改正値が大きくなつても余弦値の変化量が小さいため結果に及ぼす影響は小さい。

** D. H. Sadler "Spheroidal Sailing and the Middle Latitude" "The Journal" of The
Institute of Navigation. october 1956

表Ⅲ 中分緯度改正表(単位分)

$\varphi_2 \sim \varphi_1$ φ_m	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
2°	+ 4	+ 18								
4°	+ 2	+ 9	+ 21	+ 37						
6°	+ 1	+ 5	+ 14	+ 25	+ 39	+ 56				
8°	0	+ 4	+ 10	+ 19	+ 30	+ 43	+ 58	+ 75		
10°	- 1	+ 3	+ 7	+ 14	+ 24	+ 35	+ 48	+ 62	+ 78	+ 96
12°	- 1	+ 1	+ 6	+ 12	+ 20	+ 29	+ 40	+ 53	+ 67	+ 82
15°	- 1	0	+ 4	+ 9	+ 16	+ 24	+ 33	+ 44	+ 56	+ 70
18°	- 3	- 1	+ 3	+ 7	+ 13	+ 20	+ 28	+ 38	+ 48	+ 60
21°	- 3	- 1	+ 2	+ 6	+ 11	+ 17	+ 25	+ 33	+ 44	+ 54
24°	- 4	- 2	+ 1	+ 5	+ 10	+ 16	+ 22	+ 31	+ 40	+ 50
30°	- 4	- 3	0	+ 3	+ 8	+ 14	+ 20	+ 27	+ 36	+ 46
35°	- 5	- 3	- 1	+ 3	+ 7	+ 12	+ 19	+ 26	+ 35	+ 44
40°	- 5	- 4	- 1	+ 2	+ 7	+ 13	+ 19	+ 27	+ 35	+ 45
45°	- 5	- 4	- 1	+ 3	+ 7	+ 13	+ 20	+ 28	+ 37	+ 47
50°	- 5	- 3	- 1	+ 3	+ 9	+ 15	+ 22	+ 31	+ 41	+ 52
55°	- 5	- 3	0	+ 5	+ 11	+ 18	+ 26	+ 35	+ 46	+ 58

(ロ) 常数 k は極めて 1 に近い値であるが、低緯度における計算でこれを 1 に等しくとると、改正値に大きな変化を与える。そして遂には余弦値が 1 より大きくなって、その値を得られない場合がおこる。

(ハ) 真中分緯度 $\bar{\varphi}$ は、 $\varphi_2 \geq \varphi_1$ なる関係がある時は、次の不等式を常に満足しなければならない。

$$\varphi_2 \geq \bar{\varphi} \geq \varphi_1$$

(ニ) 如何なる場合にも経度差は東西距より小さくなることはあり得ない。 $k\lambda \geq \text{dep}$ である。但し東西距は国際哩を単位とする。

(ホ) 中分緯度と緯度差から、真中分緯度を求め経度を計算する場合には、公式 $\lambda = \text{dep} / k \cos \bar{\varphi}$ による。

8. 中分緯度航法と漸長緯度航法の誤差

中分緯度航法は勿論のこと、現用の漸長緯度航法が常数 k について考慮されていないこと、及び緯度一分の長さをすべて 1852 米と仮定していること、等により誤差を含んでいることは明らかである。しかしその誤差量が目的によつて無視し得る程度のものであれば、公式を複雑化して精度をあげることで、簡単な公式で近似値を求める方が望ましい。要はその誤差量を知ることである。今兩地点の緯度経度より東西距を求める場合に、東西距に含まれる誤差量を、中分緯度航法の場合 Δdep_m とすると

$$\Delta \text{dep}_m = \lambda (k \cos \bar{\varphi} - \cos \varphi_m)$$

となる。相対誤差 $(k \cos \bar{\varphi} - \cos \varphi_m) / k \cos \bar{\varphi}$ を、百分率で示したものが表Ⅳである。但し 0.01% を単位とした。なお兩半球にわたる場合には原理に反するが誤差量は小さいので一応比較した。この場合もつと真値に近い近似式については省略する。

漸長緯度航法の同誤差を Δdep_M とすると

$$\Delta dep_M = \lambda \left(k \cos \bar{\varphi} - \frac{\varphi_2 \sim \varphi_1'}{M_2' \sim M_1'} \right)$$

となる。前と同様にして、相対誤差を百分率の0.01%を単位として示したものが、表Vである。

表IV 中分緯度航法相対誤差 (単位 0.01%)

$\varphi_2 \sim \varphi_1$ φ_m	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
0°	+ 16	+ 15	+ 12	+ 9	+ 4	- 1	- 8	- 16	- 24	- 34
2°	+ 16	+ 15	+ 12	+ 9	+ 4	- 1	- 8	- 16	- 24	- 34
4°	+ 17	+ 15	+ 12	+ 9	+ 4	- 1	- 8	- 16	- 25	- 34
6°	+ 17	+ 15	+ 13	+ 9	+ 4	- 1	- 8	- 16	- 25	- 35
8°	+ 17	+ 15	+ 13	+ 9	+ 4	- 1	- 8	- 16	- 25	- 35
10°	+ 17	+ 15	+ 13	+ 9	+ 4	- 2	- 9	- 17	- 26	- 36
12°	+ 18	+ 16	+ 13	+ 9	+ 5	- 2	- 9	- 17	- 26	- 37
15°	+ 18	+ 17	+ 14	+ 10	+ 5	- 2	- 9	- 18	- 28	- 40
18°	+ 19	+ 17	+ 14	+ 10	+ 5	- 2	- 10	- 20	- 30	- 42
21°	+ 20	+ 19	+ 16	+ 11	+ 5	- 2	- 11	- 21	- 32	- 45
24°	+ 22	+ 19	+ 16	+ 11	+ 4	- 4	- 13	- 23	- 36	- 51
30°	+ 24	+ 22	+ 17	+ 12	+ 4	- 6	- 16	- 30	- 44	- 61
35°	+ 27	+ 24	+ 19	+ 12	+ 3	- 9	- 22	- 37	- 55	- 75
40°	+ 29	+ 26	+ 20	+ 11	0	- 14	- 30	- 49	- 70	- 96
45°	+ 32	+ 27	+ 20	+ 9	- 5	- 22	- 42	- 66	- 93	- 124
50°	+ 34	+ 29	+ 19	+ 5	- 13	- 35	- 60	- 107	- 130	- 166
55°	+ 37	+ 30	+ 17	- 2	- 25	- 55	- 90	- 130	- 177	- 232

表V 漸長緯度航法相対誤差 (単位 0.01%)

$\varphi_2 \sim \varphi_1$ φ_m	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
0°	- 49	- 50	- 50	- 50	- 50	- 50	- 50	- 50	- 50	- 49
2°	- 50	- 50	- 50	- 50	- 50	- 50	- 50	- 50	- 49	- 49
4°	- 50	- 50	- 50	- 50	- 50	- 49	- 49	- 49	- 49	- 49
6°	- 49	- 49	- 49	- 49	- 49	- 49	- 49	- 49	- 48	- 48
8°	- 48	- 48	- 48	- 48	- 48	- 48	- 48	- 48	- 48	- 47
10°	- 47	- 47	- 47	- 47	- 47	- 47	- 47	- 47	- 47	- 46
12°	- 46	- 46	- 46	- 46	- 46	- 46	- 46	- 45	- 45	- 45
15°	- 44	- 43	- 43	- 43	- 43	- 43	- 43	- 43	- 43	- 43
18°	- 41	- 41	- 41	- 41	- 41	- 40	- 40	- 40	- 40	- 40
21°	- 37	- 37	- 37	- 37	- 37	- 37	- 37	- 37	- 37	- 37
24°	- 34	- 34	- 34	- 33	- 33	- 33	- 33	- 33	- 33	- 33
30°	- 25	- 25	- 25	- 25	- 25	- 25	- 25	- 25	- 25	- 25
35°	- 17	- 17	- 17	- 17	- 17	- 17	- 17	- 17	- 17	- 17
40°	- 9	- 9	- 9	- 9	- 9	- 9	- 9	- 9	- 9	- 9
45°	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50°	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 8	+ 8	+ 8
55°	+ 17	+ 17	+ 17	+ 17	+ 17	+ 17	+ 17	+ 17	+ 17	+ 17

この二つの表を比較して次のことが解る。

(1) 漸長緯度航法では中分緯度が同じなら誤差量は大体同じで、緯度差が大きくなると僅かに減少する。低緯度における誤差の最大値は約 0.5% 程度であり、中分緯度が 45° に近づくに従い小さくなる。

(2) 中分緯度航法の誤差量は緯度差によつて変るが、低緯度においては、緯度差が同じなら誤差量も大体等しい。中分緯度航法の誤差は緯度差が大きくなると、誤差も大きくなると言われているが、この表によると大体中分緯度 35° 以下、緯度差 12° 以下ならばむしろ逆の傾向にある。これは誤差が相殺されるためである。

従来、漸長緯度航法の方が、中分緯度航法より正確であるとされているが、これは但し書きが必要である。すなわち、両地の緯度経度より針路を求める場合には確かに言えるが、上記の Bessel 偏球を用いた計算結果によると、高緯度及び緯度差相当大なる場合を除き、中分緯度航法の方が却つて誤差は小さい。航程線航法の適用範囲、漸長緯度の表をひく場合の誤差などを考慮するならば、中分緯度航法の利用価値はもつと高く評価されると思う。

9. 結 論

地球楕円体上の推測航法については結局次のことが言える。

(1) 距等圏航法公式 $dep = \lambda \cos \varphi$ は誤差を含むが、誤差量は大きくても 0.5% 程度である。正確には $dep = \lambda \cos \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \cdot k$ で示される。なお $\cos \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \cdot k$ を計算し、表にしておけば前式と同じく簡単に正確な値が得られる。

(2) 子午線航法公式、 $D = \varphi_2 \sim \varphi_1$ は緯度一分の長さが場所によつて異なるから誤差を含む。正しくは曲率半径を積分して得られるが、簡単な式で示される。又その結果を表にしておけば便利である。

(3) 漸長緯度 M' は地理渾が単位であつて、1852 米ではないから同じ単位を使うためには、常数 k について考慮しなければならない。

(4) $k\lambda \geq dep$ は必ず成り立つ。

(5) 漸長緯度航法と真中分緯度航法は、同値であることを証明出来る。

(6) 常数 k と、緯度一分の長さが場所によつて異なることを考慮して、正しい中分緯度改正表を得るが、当然の結果として $\varphi_2 \geq \varphi_1$ ならば $\varphi_2 \geq \bar{\varphi} \geq \varphi_1$ である。

(7) 現用の漸長緯度航法は低緯度において、誤差大となり、かなり広い範囲で中分緯度航法の方がより正確である。