連針路航法による船位の誤差について

福 井 淡*

長 谷 川 健 二*

On the Error of Ship's Position in Traverse Sailing

A. Fukui and K. Hasegawa

Abstract

In traverse sailing, when the ship alters her course from time to time along rhumb lines, the departure for the course and distance made good from her initial position to her final is generally unequal to the total of the departures on every course between them.

So, it causes an error to her final position. We studied the nature of the error and considered the counterplan about it.

1. ま え が き

連針路航法の計算により着達船位を求めたり、直航針路や直航航程を求める場合には、その間の各航路による航程 (*dist.*) と針路 (*co.*) により東西距 (*dep.*) を求め、各 *dep.* の代数和をもつて起程点と最終着達点間の *dep.* とみなしているが、そこに連針路航法に誤差を生じることは明らかである。ここに *dist.* と *co.* の如何によつて *dep.* などに幾何の誤差を生じるかを研究して、それに対する対策を明らかにした。

2. 変針1回の場合の連針路航法による *dep.* の誤差 ($\Delta dep.$)

図1において、起程点Aより第1次針路として、一定の針路 θ_1 に一定距離 d_1 だけ航走してBに達した後、第2次針路として任意の針路 θ_2 に変針し、一定距離 d_2 だけ航走してCに到達したときの連針路航法による *dep.* の誤差 ($\Delta dep.$) が最大なるような第2次針路の方向を求める。

連針路航法による $\Delta dep.$ は

$$\Delta dep. = d_0 \sin \theta_0 - (d_1 \sin \theta_1 + d_2 \sin \theta_2) \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

ここに θ_2 の変化によつて d_0 , θ_0 は変化するから

$$d_0 = f(\theta_2) \quad \theta_0 = f(\theta_2)$$

故に $\Delta dep.$ の極大値を求める条件は

図 1

- d_1, d_2第1次, 第2次針路の各航程 (一定)
- d_0漸長緯度航法による直航航程
- θ_1第1次針路 (一定)
- θ_2第2次針路 (任意)
- θ_0漸長緯度航法による直航針路

* 海技大学校

$$\frac{\partial \triangle dep.}{\partial \theta_2} = \sin \theta_0 \frac{\partial d_0}{\partial \theta_2} + d_0 \cos \theta_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_2} - d_2 \cos \theta_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

ところで

$$d_1 \cos \theta_1 + d_2 \cos \theta_2 = d_0 \cos \theta_0$$

を θ_2 で微分して

$$\frac{\partial d_0}{\partial \theta_2} = d_0 \tan \theta_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_2} - d_2 \sin \theta_2 \sec \theta_0 \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

(2.3) を (2.2) に代入して

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_2} &= \frac{d_2}{d_0} \cos (\theta_2 - \theta_0) \\ &= \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_0} \cdot \frac{\sec \theta_2 \cos (\theta_2 - \theta_0)}{\sec \theta_0} \quad \dots\dots\dots (2.4) \end{aligned}$$

ここで $\varphi_2 - \varphi_1 = d_2 \cos \theta_2$ を θ_2 で微分すれば

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_2} = -d_2 \sin \theta_2 = -(\varphi_2 - \varphi_1) \tan \theta_2 \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

次に第1次航路間の経度差と第2次航路間の経度差の代数和は、直航航路間の経度差に等しいから

$$\begin{aligned} &\tan \theta_1 \left\{ \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) - \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right) \right\} \\ &+ \tan \theta_2 \left\{ \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) - \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right\} \\ &= \tan \theta_0 \left\{ \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) - \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (2.6) \end{aligned}$$

これを θ_2 で微分して整理し、 $\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_i}{2} \right) = M_i$ で表わせば

$$\sec^2 \theta_2 (M_2 - M_1) - \sec^2 \theta_0 (M_2 - M_0) \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_2} = \sec \varphi_2 (\tan \theta_0 - \tan \theta_2) \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_2} \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

(2.4), (2.5) を (2.7) に代入して整理すれば

$$\begin{aligned} &(M_2 - M_0) \sec \theta_0 \cos (\theta_2 - \theta_0) \\ &= \frac{1}{\varphi_2 - \varphi_1} \left\{ (\varphi_2 - \varphi_0) (M_2 - M_1) \sec \theta_2 + (\varphi_2 - \varphi_0) (\varphi_2 - \varphi_1) \tan \theta_2 (\tan \theta_0 - \tan \theta_2) \right\} \\ &\quad \dots\dots\dots (2.8) \end{aligned}$$

しかるに

$$\begin{aligned} &(\varphi_2 - \varphi_0) (M_2 - M_1) \sec \theta_2 = (\varphi_1 - \varphi_0) (M_2 - M_1) \sec \theta_2 + (\varphi_2 - \varphi_1) (M_2 - M_1) \sec \theta_2 \\ &\tan \theta_0 - \tan \theta_2 = -\sin (\theta_2 - \theta_0) \sec \theta_0 \sec \theta_2 \end{aligned}$$

また近似式として

$$\begin{aligned} &(\varphi_2 - \varphi_1) \sec \theta_2 \sin (\theta_2 - \theta_0) \doteq (\varphi_1 - \varphi_0) \sec \theta_1 \sin (\theta_0 - \theta_1) \\ &(\varphi_2 - \varphi_0) \sec \varphi_2 \doteq M_2 - M_0 \end{aligned}$$

故に (2.8) は

$$\begin{aligned} &(\varphi_2 - \varphi_1) \{ (M_2 - M_0) \sec \theta_0 \cos (\theta_2 - \theta_0) - (M_2 - M_1) \sec \theta_2 \} \\ &\doteq (\varphi_1 - \varphi_0) \{ (M_2 - M_1) \sec \theta_2 - (M_2 - M_0) \sec \theta_0 \sin (\theta_0 - \theta_1) \sec \theta_1 \sin \theta_2 \} \quad \dots\dots\dots (2.9) \end{aligned}$$

(2.9) 式を満足する条件は

$$\theta_2 \doteq \theta_1 \pm 90^\circ \quad (\text{極大条件})$$

すなわち 第2次針路が 第1次針路に対してほぼ直角なとき $\triangle dep.$ は極大となる。そして $\theta_2 = \theta_1 \pm 90^\circ$ のうち直航針路 θ_0 が極方向に近い方が概して最大である。(第3項参照)

注) $\triangle dep.$ は (2.1) 式により 正または負の符号が付くが、これは第1次針路線の延長線において変化する。すなわち (2.1) による誤差の符号は、北半球では起程点より第1次針路線に対し右折したときは (+), 左折したときは (-) であつて (南半球ではその逆)、これは後述第4項において注意すべき点である。

なお直航針路が 000° および 180° の場合も、同直航針路線上を境に $\triangle dep.$ の符号は変化するが、これは連針路航法による船位と漸長緯度航法による船位の相対関係の変化を示すものではないから問題ではない。

3. $\triangle dep.$ の最大値

図2において、A点を起程点として、任意の針路 θ_1 に一定距離 d_1 航走し、その後この針路に直角方向に一定距離 d_2 航走したときの連針路航法により生ずる $\triangle dep.$ の最大なときは、その直航針路 θ_0 がいかなる方向のときかを求める。

$$\begin{aligned}\triangle dep. &= d_0 \sin \theta_0 \\ &= \{d_1 \sin \theta_1 + d_2 \sin (\theta_1 \pm 90^\circ)\} \\ &= d_0 \sin \theta_0 - (d_1 \sin \theta_1 \pm d_2 \cos \theta_1) \\ &\dots\dots\dots (3.1)\end{aligned}$$

ここにおいて、図2の連針路をAを基点として 360° 回転せしめたときの $\triangle dep.$ は、 θ_1 により変化するから、 $\triangle dep.$ の極大条件を求めるために

$$\frac{\partial \triangle dep.}{\partial \theta_1} = \sin \theta_0 \frac{\partial d_0}{\partial \theta_1} + d_0 \cos \theta_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1} - (d_1 \cos \theta_1 \mp d_2 \sin \theta_1) = 0 \dots\dots\dots (3.2)$$

ところで $d_1 \cos \theta_1 + d_2 \cos (\theta_1 \pm 90^\circ) = d_0 \cos \theta_0$

より $d_1 \cos \theta_1 \mp d_2 \sin \theta_1 = d_0 \cos \theta_0$

これを θ_1 で微分して

$$\frac{\partial d_0}{\partial \theta_1} = d_0 \tan \theta_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1} - (d_1 \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_0} \pm d_2 \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_0}) \dots\dots\dots (3.3)$$

(3.3) を (3.2) に代入して $\partial \theta_0 / \partial \theta_1$ を求めれば

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1} = \frac{d_1 \cos (\theta_0 - \theta_1) \pm d_2 \sin (\theta_0 - \theta_1)}{d_0} \dots\dots\dots (3.4)$$

(3.4) を (3.3) に代入して $\partial d_0 / \partial \theta_1$ を求めれば

$$\frac{\partial d_0}{\partial \theta_1} = d_1 \sin (\theta_0 - \theta_1) \mp d_2 \cos (\theta_0 - \theta_1) \dots\dots\dots (3.5)$$

次に $\varphi_1 - \varphi_0 = d_1 \cos \theta_1$, $\varphi_2 - \varphi_1 = d_2 \cos (\theta_1 \pm 90^\circ) = \mp d_2 \sin \theta_1$ をそれぞれ θ_1 で微分して $\partial \varphi_1 / \partial \theta_1$, $\partial \varphi_2 / \partial \theta_1$ を求めれば

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta_1} = -d_1 \sin \theta_1 \dots\dots\dots (3.6)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_1} = -(d_1 \sin \theta_1 \pm d_2 \cos \theta_1) \dots\dots\dots (3.7)$$

ところで

$$\{(M_1 - M_0) \tan \theta_1 - (M_2 - M_1) \cot \theta_1\} \cos \varphi_m = d_0 \sin \theta_0 \dots\dots\dots (3.8)$$

図 2

d_1, d_2第1次, 第2次航路の各航程(一定)
 d_0漸長緯度航法による直航航程
 θ_1第1次針路(任意)
 θ_2第2次針路(第1次針路に直角)
 θ_0漸長緯度航法による直航針路

ここに φ_m は直航航路間の真中分緯度を示し

$$\cos \varphi_m = \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{M_2 - M_0} \dots\dots\dots (3.9)$$

(3.8) を θ_1 で微分して

$$\begin{aligned} & - \left\{ (M_1 - M_0) \tan \theta_1 - (M_2 - M_1) \cot \theta_1 \right\} \sin \varphi_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial \theta_1} \\ & + \left\{ (M_1 - M_0) \sec^2 \theta_1 + (M_2 - M_1) \operatorname{cosec}^2 \theta_1 + \sec \varphi_1 (\tan \theta_1 + \cot \theta_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta_1} \right. \\ & \left. - \cot \theta_1 \sec \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_1} \right\} \cos \varphi_m = \sin \theta_0 \frac{\partial d_0}{\partial \theta_1} + d_0 \cos \theta_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1} \dots\dots\dots (3.10) \end{aligned}$$

また (3.9) を θ_1 で微分して

$$- \sin \varphi_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial \theta_1} = \frac{(M_2 - M_0) - (\varphi_2 - \varphi_0) \sec \varphi_2}{(M_2 - M_0)^2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_1} \dots\dots\dots (3.11)$$

(3.6), (3.7) および (3.11) を (3.10) に代入して左辺を近似式に置換すれば

$$\varphi_2 - \varphi_0 \doteq \sin \theta_0 \frac{\partial d_0}{\partial \theta_1} + d_0 \cos \theta_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1} \dots\dots\dots (3.12)$$

ここでさらに (3.4), (3.5) を (3.12) に代入すれば

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_0 \doteq & \{d_1 \sin(\theta_0 - \theta_1) \mp d_2 \cos(\theta_0 - \theta_1)\} \sin \theta_0 \\ & + \{d_1 \cos(\theta_0 - \theta_1) \pm d_2 \sin(\theta_0 - \theta_1)\} \cos \theta_0 \dots\dots\dots (3.13) \end{aligned}$$

(3.13) 式を満足する条件は

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 & \doteq 000^\circ \\ \theta_0 & \doteq 180^\circ \end{aligned} \right\} \text{(極値条件)}$$

すなわち $\triangle dep.$ は直航針路がほぼ極方向なるとき最大、ほぼ赤道方向なるとき最小となる。

したがって、第2項と第3項により、変針1回の場合の連針路航法による $\triangle dep.$ の最大値は、計算によりその概略値が求め得られる。(表1参照)

表1 変針1回の場合の $\triangle dep.$ 最大値(絶対値)

$\varphi_0 = 20^\circ$

(d_1 ...第1次針路の航程, d_2 ...第2次針路の航程)

$d_1 \backslash d_2$	50'	100'	150'	200'	400'	600'
50'	0'1	0'2	0'2	0'7	0'9	1'8
100'	0.4	0.6	0.8	1.2	2.4	3.8
150'	0.1	0.8	1.3	1.8	3.6	5.2
200'	0.5	1.1	1.8	2.4	5.4	7.6
400'	0.6	2.3	4.0	5.2	11.0	16.4
600'	3.6	4.5	6.7	9.3	17.9	27.2

$\varphi_0 = 50^\circ$

$d_1 \backslash d_2$	50'	100'	150'	200'	400'	600'
50'	0'5	0'9	1'3	1'9	3'3	4'9
100'	0.9	1.9	2.6	3.7	7.0	13.2
150'	1.4	2.7	4.2	5.5	11.6	17.3
200'	2.0	4.1	5.7	7.6	15.4	23.1
400'	4.4	8.3	12.8	17.1	33.3	54.0
600'	9.8	15.3	22.7	28.6	55.0	80.8

原式: $(\varphi_2 - \varphi_0) / (M_2 - M_0) \{ \tan \theta_1 (M_1 - M_0) - \cot \theta_1 (M_2 - M_1) \}$

[扁球計算]

表1を見てわかるように、連針路航法の計算による $\triangle dep.$ は、最悪の場合予想外に大きい。

4. 変針 n 回の場合の $\triangle dep.$

図3において、針路を $(n-1)$ 回変針して緯度 φ_n に達し、それ以後任意の針路 θ_{n+1} に一定距離 d_{n+1} 航走したときの連針路航法による $\triangle dep.$ の最大なときの θ_{n+1} の方向を求める。

n 回変針したときの $\triangle dep.$ は

$$\triangle dep. = d_{0(n)} \sin \theta_{0(n)} - (d_1 \sin \theta_1 + \dots + d_n \sin \theta_n + d_{n+1} \sin \theta_{n+1})$$

ここで $d_1, d_2, \dots, d_n$ および $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ は一定であるから、 $\triangle dep.$ の極値を求めるために、 θ_{n+1} で微分して0と置けば

$$\frac{\partial \triangle dep.}{\partial \theta_{n+1}} = d_{0(n)} \cos \theta_{0(n)} \frac{\partial \theta_{0(n)}}{\partial \theta_{n+1}} + \sin \theta_{0(n)} \frac{\partial d_{0(n)}}{\partial \theta_{n+1}} - d_{n+1} \cos \theta_{n+1} = 0 \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

ここで

$$d_1 \cos \theta_1 + \dots + d_n \cos \theta_n + d_{n+1} \cos \theta_{n+1} = d_{0(n)} \cos \theta_{0(n)}$$

$$\text{より} \quad \frac{\partial d_{0(n)}}{\partial \theta_{n+1}} = d_{0(n)} \frac{\sin \theta_{0(n)}}{\cos \theta_{0(n)}} \frac{\partial \theta_{0(n)}}{\partial \theta_{n+1}} - d_{n+1} \frac{\sin \theta_{n+1}}{\cos \theta_{0(n)}} \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

$$\text{また} \quad d_{n+1} \cos \theta_{n+1} = \varphi_{n+1} - \varphi_n$$

$$\text{より} \quad \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \theta_{n+1}} = -d_{n+1} \sin \theta_{n+1} \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

また

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n+1} \tan \theta_i \left\{ \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_i}{2} \right) - \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_{i-1}}{2} \right) \right\} \\ &= \tan \theta_{0(n)} \left\{ \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_i}{2} \right) - \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

において θ_{n+1} で微分して $\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_i}{2} \right) = M_i$ とすれば

$$\begin{aligned} & \sec^2 \theta_{n+1} \{ M_{n+1} - M_n \} + \tan \theta_{n+1} \sec \varphi_{n+1} \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \theta_{n+1}} \\ &= \sec^2 \theta_{0(n)} \{ M_{n+1} - M_0 \} \frac{\partial \theta_{0(n)}}{\partial \theta_{n+1}} + \tan \theta_{0(n)} \sec \varphi_{n+1} \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \theta_{n+1}} \quad \dots\dots\dots (4.4) \end{aligned}$$

これら (4.1) ~ (4.4) の条件は、すべて前項第2項と同じであるので、変針 n 回の場合の連針路航法による $\triangle dep.$ の最大なときは、変針点において、そのときの直航針路にほぼ直角方向に変針したときとなる。

ところで変針1回の場合の $\triangle dep.$ は第2項の (2.1) 式において正または負の符号がつくが、これは直航針路の方位により変化することは、第2項の (注) に示したとおりである。したがって幾回も変針する場合、直航針路 $\theta_{0(n)}$ に対して逐次ほぼ直角に右 (左) 折して行く場合、変針毎に生じる $\triangle dep.$ の符号は同じであるため、その誤差量は逐次増加され莫大なものになるから、たとえ航程が僅少でも、また変針角が 90° でなくても、連針路航法による船位の誤差は、無視し難いものとなることに注意すべきである。

参考までに起程点より 100 海里航走ごとに直航針路に対し直角に変針したとすれば、 $\triangle dep.$ は

図 3

図4のように累加され、数回の変針後には莫大な誤差を生じることになる。

注) ただ数回も変針しても、右折と左折を反覆してジグザグに航走し、第1次針路の延長方向に航走するときは、誤差の符号が相反し、それらが相殺されて比較的本航法の精度は保たれることとなる。

5. 変針1回の場合の直航航程の誤差 ($\Delta dist.$)

第2項における連針路航法による直航航程の誤差 $\Delta dist.$ が最大なる条件を求める。

記号および符号はすべて第2項と同じとする。(図1参照)

連針路航法の計算による直航航程を d'_0 とすれば $\Delta dist.$ は

$$\begin{aligned}\Delta dist. &= d_0 - d'_0 \\ &= (\varphi_2 - \varphi_0) \sec \theta_0 - \sqrt{(\varphi_2 - \varphi_0)^2 + \{(\varphi_1 - \varphi_0) \tan \theta_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) \tan \theta_2\}^2} \\ \text{したがって } \Delta dist. \text{ の極大条件を求めるために, } \partial dist / \partial \theta_2 &= 0 \text{ として整理すれば} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_2} \left\{ (\varphi_2 - \varphi_0) + \tan \theta_2 \{ (\varphi_1 - \varphi_0) \tan \theta_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) \tan \theta_2 \} - d'_0 \sec \theta_0 \right\} \\ &+ \{ (\varphi_1 - \varphi_0) \tan \theta_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) \tan \theta_2 \} (\varphi_2 - \varphi_1) \sec^2 \theta_2 \\ &= \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_2} d'_0 (\varphi_2 - \varphi_0) \sec \theta_0 \tan \theta_0 \dots \dots \dots (5.1)\end{aligned}$$

ここで第2項の (2.5) を (2.7) に代入して $\partial \theta_0 / \partial \theta_2$ を求めれば

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_2} = \frac{\sec^2 \theta_2 (M_2 - M_1) - (\varphi_2 - \varphi_1) \sec \varphi_2 \tan \theta_2 (\tan \theta_2 - \tan \theta_0)}{\sec^2 \theta_0 (M_2 - M_0)} \dots \dots \dots (5.2)$$

(2.5) および (5.2) を (5.1) に代入すれば

$$\begin{aligned}&(\varphi_2 - \varphi_1) (\varphi_1 - \varphi_0) (\tan \theta_1 - \tan \theta_2) + d'_0 (\varphi_2 - \varphi_1) \tan \theta_2 \sec \theta_0 \\ &= d'_0 (\varphi_2 - \varphi_0) \tan \theta_0 \left\{ \frac{\sec^2 \theta_2 (M_2 - M_1)}{\sec \theta_0 (M_2 - M_0)} - \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) \tan \theta_2 \sec \varphi_2 (\tan \theta_2 - \tan \theta_0)}{\sec \theta_0 (M_2 - M_0)} \right\}\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}&d_1 d_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) + d_2 d'_0 \sin \theta_2 \sec \theta_0 \\ &= d'_0 \sin \theta_0 \sec \theta_2 \left\{ \frac{\sec \theta_2 (M_2 - M_1)}{\sec \theta_0 (M_2 - M_0)} - \frac{d_2 \sin \theta_2 \sec \varphi_2 \sin (\theta_2 - \theta_0)}{M_2 - M_0} \right\}\end{aligned}$$

ここで

$$d_1 \sin (\theta_2 - \theta_1) \doteq d'_0 \sin (\theta_2 - \theta_0)$$

として d'_0 を消去して両辺を整理すれば

$$\begin{aligned}&(M_2 - M_0) \sec \theta_0 \cos (\theta_2 - \theta_0) \\ &\doteq (M_2 - M_1) \frac{d_0}{d_2} \sec^2 \theta_2 \cos \theta_0 - d_0 \tan \theta_2 \sec \varphi_2 \sin (\theta_2 - \theta_0)\end{aligned}$$

これをさらに変形して

$$(M_2 - M_0) \sec \theta_0 \cos (\theta_2 - \theta_0) - (M_2 - M_1) \sec \theta_2$$

図 4

$$\begin{aligned} & \doteq (M_2 - M_1) \sec \theta_2 \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\varphi_2 - \varphi_1} - d_0 \tan \theta_2 \sec \varphi_2 \sin (\theta_2 - \theta_0) \\ & \quad \left\{ \frac{M_2 - M_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \doteq \sec \varphi_2 \text{ として} \right\} \\ & \doteq \sec \varphi_2 \{ (\varphi_1 - \varphi_0) \sec \theta_2 - d_0 \tan \theta_2 \sin (\theta_2 - \theta_0) \} \dots\dots\dots (5.3) \end{aligned}$$

(5.3) を満足する条件は

$$\theta_2 - \theta_1 \doteq \pm 90^\circ \quad (\text{極大条件})$$

すなわち第2次針路が第1次針路にほぼ直角であるとき $\triangle dist$ は極大である。そして、 $\theta_2 - \theta_1 = \pm 90^\circ$ のうち直航針路 θ_0 が 090° または 270° に近い方が概して最大である。(第6項参照)

6. $\triangle dist$ の最大値

第5項により起程点 A より任意の針路 θ_1 に一定距離 d_1 航走し、その後この針路に直角方向 ($\theta_1 \pm 90^\circ$) に一定距離 d_2 航走したときの連針路航法による $\triangle dist$ の最大なる条件を求める。(図2参照)

連針路航法による直航航程 d'_0 は

$$d'_0 = (\varphi_2 - \varphi_0) \sqrt{1 + \frac{(d_1 \sin \theta_1 \pm d_2 \cos \theta_1)^2}{(d_1 \cos \theta_1 \mp d_2 \sin \theta_1)^2}} \dots\dots\dots (6.1)$$

故に直航航程の誤差 $\triangle dist$ は

$$\triangle dist = d_0 - d'_0$$

したがって $\triangle dist$ の極値条件は

$$\frac{\partial \triangle dist}{\partial \theta_1} = \frac{\partial d_0}{\partial \theta_1} - \frac{\partial d'_0}{\partial \theta_1} = 0 \dots\dots\dots (6.2)$$

ここで (6.1) を θ_1 で微分して

$$\begin{aligned} \frac{\partial d'_0}{\partial \theta_1} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_1} \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2}{d_1 \cos \theta_1 \mp d_2 \sin \theta_1}} + \frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} (\varphi_2 - \varphi_0) (d_1 \sin \theta_1 \pm d_2 \cos \theta_1)}{(d_1 \cos \theta_1 \mp d_2 \sin \theta_1)^2} \\ &\dots\dots\dots (6.3) \end{aligned}$$

しかるに (3.7) より

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_1} = -(d_1 \sin \theta_1 \pm d_2 \cos \theta_1)$$

これを (6.3) に代入すれば

$$\frac{\partial d'_0}{\partial \theta_1} = 0 \dots\dots\dots (6.4)$$

故に (6.2), (6.4) より

$$\frac{\partial d_0}{\partial \theta_1} = 0 \dots\dots\dots (6.5)$$

また $d_1 \cos \theta_1 \mp d_2 \sin \theta_1 = d_0 \cos \theta_0$ を θ_1 で微分して

$$-d_1 \sin \theta_1 \mp d_2 \cos \theta_1 = \cos \theta_0 \frac{\partial d_0}{\partial \theta_1} - d_0 \sin \theta_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1} \dots\dots\dots (6.6)$$

(6.5) を (6.6) に代入して

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1} = \frac{d_1 \sin \theta_1 \pm d_2 \cos \theta_1}{d_0 \sin \theta_0} \dots\dots\dots (6.7)$$

(6.5), (6.7) を第3項の (3.12) に代入すれば

$$\varphi_2 - \varphi_0 \doteq \cot \theta_0 (d_1 \sin \theta_1 + d_2 \cos \theta_1) \dots\dots\dots (6.8)$$

(6.8) 式を満足する条件は

$$\left. \begin{array}{l} \theta_0 \doteq 090^\circ \\ \theta_0 \doteq 270^\circ \end{array} \right\} \quad (\text{極大条件})$$

すなわち、直航針路がほぼ 090° または 270° になるとき $\Delta dist.$ は最大である。したがって第5項および第6項より変針1回の場合の連針路航法による $\Delta dist.$ の最大値が計算により概略求め得られる。(表2参照)

表2 変針1回の場合の $\Delta dist.$ の最大値

$\varphi_0 = 20^\circ$

($d_1 \dots$ 第1次針路の航程, $d_2 \dots$ 第2次針路の航程)

$d_1 \backslash d_2$	50'	100'	150'	200'	400'	600'
50'	-0.'2	-0.'5	-0.'7	-0.'8	-1.'6	-2.'5
100'	-0.5	-0.2	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3
150'	-0.7	-0.3	0.0	+0.2	+0.9	+1.5
200'	-0.8	-0.3	+0.2	+0.7	+2.0	+3.0
400'	-1.6	-0.3	+0.9	+2.0	+6.1	+10.2
600'	-2.5	-0.3	+1.5	+3.0	+10.2	+17.0

$\varphi_0 = 50^\circ$

$d_1 \backslash d_2$	50'	100'	150'	200'	400'	600'
50'	+0.'3	+0.'5	+0.'9	+1.'2	+2.'0	+3.'2
100'	0.5	1.3	2.2	3.0	5.9	8.8
150'	0.9	2.2	3.4	4.8	9.8	14.5
200'	1.2	3.0	4.8	6.5	13.4	20.3
400'	2.0	5.9	9.8	13.4	28.9	44.4
600'	3.2	8.8	14.5	20.3	44.4	69.9

原式: $(M_1 - M_0) (d_1/d_2 + d_2/d_1) \cos \varphi_0 - (d_1 \sin \theta_1 + d_2 \cos \theta_1)$

[扁球計算]

7. 変針1回の場合の直航針路の誤差 ($\Delta co.$)

第2項におけると同様、起程点より一定方向に一定距離航走後、任意の針路に一定距離航走したときの連針路航法による直航針路の誤差 ($\Delta co.$) が最大となる条件は、 $\Delta dep.$ とそれを起程点より望む直航針路、さらに第1次・第2次航路の各航程の如何によつて左右せられる。

すなわち、 $\Delta dep.$ は起程点よりの第1次針路に直角方向において最大であり、(第2項参照)、また起程点より、着達点の船位の誤差(船位の差異)を望む角は、一般に起程点の南北線において大となり、これはさらに第1次・第2次航路の航程によつても影響せられる。

ただ一般的にいつて、この場合の直航針路の極大なる条件は、直航針路が南北に近い場合であつて(第8項参照)、これをさらに個々の場合について概説すれば、

① 第1次針路線が東西寄りの場合

② 第2次航路の航程 d_2 が第1次航路の航程 d_1 より小さいとき

直航針路と第2次針路がほぼ直交し直航針路がほぼ南北方向のとき $\Delta co.$ は極大

③ ②の場合で d_2 が d_1 より大きいとき

起程点よりの直航針路がほぼ南北方向のとき $\Delta co.$ は極大

- ② 第1次針路線が南北寄りの場合
 第2次針路が第1次針路の直角方向で起程点よりの直航針路がほぼ南北方向にあるとき
 $\Delta co.$ は極大
- ③ 第1次針路線が4偶点の場合
 ① d_2 が d_1 より小さいとき ①の③に同じ
 ② d_2 が d_1 より大きいとき ②に同じ
- である。

8. $\Delta co.$ の最大値

変針1回の場合の $\Delta co.$ の最大条件は、第7項に述べたとおり、種々の条件によつて相違するが、ここでは第2次針路を第1次針路の直角方向として、 $\Delta co.$ の最大条件を求める。

すなわち、起程点 A より任意の針路 θ_1 に一定距離 d_1 航走して B に達し、その針路に直角方向の針路 $\theta_1 \pm 90^\circ$ に変針して一定距離 d_2 航走したときの連針路航法による $\Delta co.$ が最大となる直航針路 θ_0 の方位を求める。(図2参照)

連針路航法による直航針路の誤差 $\Delta co.$ は

$$\begin{aligned}\Delta co. &= \theta_0 - \theta'_0 \\ &= \theta_0 - \tan^{-1} \frac{d_1 \sin \theta_1 + d_2 \sin(\theta_1 \pm 90^\circ)}{d_1 \cos \theta_1 + d_2 \cos(\theta_1 \pm 90^\circ)}\end{aligned}$$

したがつて $\Delta co.$ の極値条件は

$$\frac{\partial \Delta co.}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1} - \frac{\partial \theta'_0}{\partial \theta_1} = 0$$

しかるに

$$\frac{\partial \theta'_0}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \tan^{-1} \frac{d_1 \sin \theta_1 \pm d_2 \cos \theta_1}{d_1 \cos \theta_1 \mp d_2 \sin \theta_1}}{\partial \theta_1} = 1$$

$$\text{故に } \frac{\partial \Delta co.}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1} - 1 = 0$$

すなわち

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1} = 1 \quad \dots\dots\dots (8.1)$$

(8.1) を第3項の (3.3) に代入して

$$\frac{\partial d_0}{\partial \theta_1} = d_0 \tan \theta_0 - d_1 \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_0} \mp d_2 \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_0} \quad \dots\dots\dots (8.2)$$

(8.1), (8.2) を第3項の (3.12) に代入すれば

$$\varphi_2 - \varphi_0 \doteq \tan \theta_0 (d_0 \sin \theta_0 - d_1 \sin \theta_1 \mp d_2 \cos \theta_1) + d_0 \cos \theta_0 \quad \dots\dots\dots (8.3)$$

(8.3) 式を満足する条件は

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &\doteq 0^\circ \\ \text{または } \theta_0 &\doteq 180^\circ \end{aligned} \right\} \quad (\text{極大条件})$$

すなわち、第2次針路が第1次針路に対して直角方向のときには、連針路航法による $\Delta co.$ の最大条件は、直航針路 θ_0 がほぼ極方向のときである。

したがつて、この場合の直航針路の最大誤差を求めることにより、変針1回の場合の連針路航法による直航針路の最大誤差の概要を推察することができる。(表3参照)

表3 変針1回の場合の $\Delta co.$ の極限值 (絶対値) $\varphi_0 = 20^\circ$ $(d_1 \cdots$ 第1次針路の航程, $d_2 \cdots$ 第2次針路の航程)

$d_1 \backslash d_2$	50'	100'	150'	200'	400'	600'
50'	0.°1	0.°1	0.°1	0.°2	0.°1	0.°2
100'	0.2	0.3	0.3	0.3	0.3	0.5
150'	0.0	0.3	0.3	0.4	0.5	0.5
200'	0.1	0.3	0.4	0.5	0.7	0.7
400'	0.1	0.3	0.5	0.7	1.1	1.3
600'	0.3	0.4	0.6	0.7	1.4	1.8

 $\varphi_0 = 50^\circ$

$d_1 \backslash d_2$	50'	100'	150'	200'	400'	600'
50'	0.°3	0.°4	0.°5	0.°5	0.°5	0.°5
100'	0.4	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2
150'	0.5	0.9	1.1	1.3	1.6	1.6
200'	0.6	1.1	1.3	1.5	2.0	2.1
400'	0.6	1.2	1.7	2.2	3.4	4.3
600'	0.9	1.4	2.1	2.6	4.4	5.6

原式: $\tan^{-1} [1/(M_2 - M_0) \{ \tan \theta_1 (M_1 - M_0) - \cot \theta_1 (M_2 - M_1) \}]$

〔扁球計算〕

9. 連針路航法の計算による船位と海図上で求めた船位との比較

第3項により, 連針路航法の計算による東西距の誤差 $\Delta dep.$ は, 最悪の場合予想外に大きい

表4 海図上で求めた船位の誤差

 $\varphi_0 = 20^\circ$ [表値は海図上で求めた船位と漸長緯度航法計算 (扁球) による船位の差異を0.5単位で示す]

$d_1 \backslash d_2$	50'		100'		150'		200'		400'		600'	
	$\Delta lat.$	$\Delta dep.$	$\Delta lat.$	$\Delta dep.$	$\Delta lat.$	$\Delta dep.$	$\Delta lat.$	$\Delta dep.$	$\Delta lat.$	$\Delta dep.$	$\Delta lat.$	$\Delta dep.$
50'	nil	nil	nil	nil	nil	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
100'	nil	nil	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0
150'	nil	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1.0	1.0	1.0	1.5	1.0	2.0
200'	nil	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1.0	1.5	1.5	2.5	1.5	3.0
400'	nil	0.5	0.5	0.5	0.5	1.5	1.0	2.5	1.5	3.0	2.0	6.0
600'	0.5	0.5	0.5	1.5	0.5	1.5	1.5	3.0	2.0	5.0	3.0	7.0

 $\varphi_0 = 50^\circ$

$d_1 \backslash d_2$	50'		100'		150'		200'		400'		600'	
	$\Delta lat.$	$\Delta dep.$	$\Delta lat.$	$\Delta dep.$	$\Delta lat.$	$\Delta dep.$	$\Delta lat.$	$\Delta dep.$	$\Delta lat.$	$\Delta dep.$	$\Delta lat.$	$\Delta dep.$
50'	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	2.0	1.0	2.5	1.0
100'	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	0.5	2.5	1.5	3.0	2.0
150'	nil	nil	nil	nil	nil	nil	0.5	0.5	3.5	1.5	4.0	4.0
200'	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	4.0	2.0	5.0	5.0
400'	1.5	1.0	2.0	1.0	2.0	1.5	4.0	2.5	5.0	4.0	7.0	9.0
600'	2.0	1.5	2.0	2.5	2.0	2.5	4.0	3.0	6.0	6.0	12.0	16.0

注) 太線の内側 (近距离) は位置記入用海図 (甲), 同外側 (遠距離) は小尺度海図による。

ことがわかった。したがって連針路航法による *dep.* を使用して、たとえ理論的に正確な漸長緯度航法により船位を求めても船位の経度に誤差を生じることになる。したがって、ここに連針路航法の計算による船位の精度と、海図上で直接求めた船位の精度とを比較するため、筆者らは大洋航海に主に使用せられる海図6037号（位置記入用図甲、縮尺1/1,200,000）を初め、海図1001号（日本南海及南支那海、縮尺1/2,500,000）や海図1号（日本総図1/12,500,000）などの小尺度の海図も含めて chart work を試みた（針路記入は海図のコンパスカードによらず井上式定規を使用した）ところ、海図上で求めた船位と漸長緯度航法（扁球）による真の船位との差異（表4参照、ただし表4は第2次針路が第1次針路に直角で直航針路が 0° になるときの両者の差異を示す）は連針路航法により求めた船位の誤差（表1参照）より概して少いことがわかった。

もつとも連針路航法計算では緯度には誤差は生じないのに、海図上で求めた船位には東西距とともに緯度にも誤差を生じるので、その点難があるように思われる。しかし表4を見てもわかるように、緯度の誤差は表1の連針路航法による東西距の誤差と比較して極めて小である。しかも表4のような特殊な条件の場合だけでなく、あらゆる条件の下に検討した結果、緯度および東西距の誤差を総合的に判断して、一般的に海図上で船位を求めた方が得策であるといえる。

10. あ と が き

連針路航法によつて計算した場合、予想せられる誤差を、東西距、直航航程および直航針路について究明したわけであるが、これにより従来海上において、しばしば使用されている本航法は、各航路の航走距離と針路、あるいは緯度の如何によつては誤差が予想外に大きい場合があり、本航法の価値と適用範囲について、改めて再考が促される次第である。

すなわち連針路航法の計算による東西距の誤差は、単に推測船位の経度に誤差を生ぜしめるばかりでなく、天測による位置の線の転移の場合にも誤差を生ぜしめ、それがひいては、実測船位に大きな誤差が導入されることとなる。

したがってそのような場合には、連針路航法の計算により船位を求めるよりも、むしろ海図上で直接求めた方が、精度の点においても、労度の点においても得策である。

もし理論的に正確な船位を求めたいのであれば、個々の変針点について漸長緯度航法をその都度使用して船位を求めて行くべきであろう。