実測位置を計算で求める方法

巻 島 勉*

How to obtain the fix by calculation

T. Makishima

Abstract

In conventional navigation, the fix is obtained by drawing work on the chart. This will be an obstacle from the viewpoint of automation of navigation. If we obtain the fix by calculation and have an appropriate calculator for that purpose, then we can get the fix briefly and quickly. The author here shows the methods to obtain the cross bearings fix and astronomical fix by calculation.

1. は し が き

従来行われている地文及び天文航法では、実測位置を求めるのにその最終段階を、海図上で定規、羅針図、及びデバイダーなどを用いる図上操作によっている。しかも誤差三角形ができたときは、眼で見て判断する仕事加わる。これらは航法を自動化しようとする観点からは好ましいことではない。計算によって実測位置を求めることにすれば、それに応じた計算機を組み立てることにより、作業を簡単かつ敏速に行うことができる。

実測位置を求める代表的な例として、地文航法のクロスベアリングと、天文航法の天体高度の測定とをえらんだ。クロスベアリングの場合は、測定にランダムな誤差を含むときの解法を示した。天測では、ランダムな誤差の場合と一定だが未知の誤差を含む場合との二つについて解法を示した。測者が既知の速度で移動しているときのランニング・フィックスについても考慮した。

2. クロスベアリング

平面上に x, y 直角座標系を考える。 x を東向き、 y を北向きとする。方位は航海の慣例に従って $+y$ 方向を 0° とし、右まわりに 360° まで測る。点 (x_i, y_i) から方位 α_i の方向の直線に、原点から落ろした垂線の長さ P_i は：

$$F_i = y_i \sin \alpha_i - x_i \cos \alpha_i \dots\dots\dots (1)$$

従って

$$P_i^2 = y_i^2 \sin^2 \alpha_i - 2x_i y_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i + x_i^2 \cos^2 \alpha_i \dots\dots\dots (2)$$

このような直線に対する垂線が、 i について n 組あり、これら垂線の長さの2乗和を作る ($i=1, 2, \dots, n; n \geq 2$)

$$[P_i^2] = [y_i^2 \sin^2 \alpha_i] - 2[x_i y_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i] + [x_i^2 \cos^2 \alpha_i] \dots\dots\dots (3)$$

角かつこは i に関する同類項の和を示す。

* 東京商船大学

座標原点を x, y だけずらせると：

$$[P_i^2] = [(y_i - y)^2 \sin^2 \alpha_i] - 2[(x_i - x)(y_i - y) \sin \alpha_i \cos \alpha_i] + [(x_i - x)^2 \cos^2 \alpha_i] \dots \dots \dots (4)$$

こうして $[P_i^2]$ を最小にするような場所をさがす。そこでは x, y 平面について $[P_i^2]$ がくぼみ点になっているから、 $\partial[P_i^2]/\partial x = 0$ 、及び $\partial[P_i^2]/\partial y = 0$ がなり立つ。従つて

$$\partial[P_i^2]/\partial x = 2[(y_i - y) \sin \alpha_i \cos \alpha_i] - 2[(x_i - x) \cos^2 \alpha_i] = 0$$

同様

$$\partial[P_i^2]/\partial y = 2[(x_i - x) \sin \alpha_i \cos \alpha_i] - 2[(y_i - y) \sin^2 \alpha_i] = 0$$

こうして正規方程式：

$$\left. \begin{aligned} [\cos^2 \alpha_i]x - [\sin \alpha_i \cos \alpha_i]y &= [x_i \cos^2 \alpha_i - y_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i] \\ [\sin \alpha_i \cos \alpha_i]x - [\sin^2 \alpha_i]y &= [x_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i - y_i \sin^2 \alpha_i] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

を得る。この連立方程式の解 x, y が垂線の長さの2乗和を最小にする点である。

x 座標としては、グリニチから測つた経度（分単位）を用い、 y 座標としては漸長緯度を用いる。これらは、推測位置などの知識によつて適当な点に原点を移し、計算を簡略化することができる。漸長緯度を使うことが複雑でいやなら、 y 座標として適当な緯度を基準にした緯差にその付近の緯度の sec 倍したものを用いてもよい。常用航路の場合は、良く使う物標の x_i, y_i をあらかじめ用意して計算機に設定しておくことができる。

$n=2$ の場合は直接に連立方程式が解けるが、このような正規方程式を作つても同じことになり、形式の統一化がはかれる。精度の違う測定がまじる場合は、重みつき正規方程式を立てることもできる。 $n=3$ の場合は、図上操作でも垂線の2乗和を最小にする点が求められる。 $n=4$ の場合もなんとか解く方法があるが、複雑で实际的でない¹⁾。この計算による処理法では、 n の数に無制限に一定の方式で解が得られる。こうして求めた x, y を使つて (4) 式に代入し、残差の2乗和があるきめられた値よりも大きくなるときは、測定の精度が甚しく悪いか又は物標のとり違いであるから、そのときは計算機が点灯するなりブザーを鳴らせるなりして知らせることができる。

この方法の欠点は、一定誤差のあるときの処理ができないことである。しかし航法の自動化はコンパスエラーのない完全な計器の上になりたつという考えに立てば、この問題は考慮しないでよい。

測者が既知の速度で移動しているときは、その速度成分を v_x, v_y とし、基準時刻から測つた時間を t として、 x, y に走つた分加える。既に x, y 座標の単位として経差 $1'$ のその地での長さを使っているから、 $(x + \sec \varphi \cdot v_x t)$ 、 $(y + \sec \varphi \cdot v_y t)$ とする。つまり x_i, y_i のかわりに

$$(x_i - \sec \varphi \cdot v_x t_i), (y_i - \sec \varphi \cdot v_y t_i)$$

を用いる。従つて正規方程式は：

$$\left. \begin{aligned} [\cos^2 \alpha_i]x - [\sin \alpha_i \cos \alpha_i]y &= [(x_i - \sec \varphi \cdot v_x t_i) \cos^2 \alpha_i - (y_i - \sec \varphi \cdot v_y t_i) \sin \alpha_i \cos \alpha_i] \\ [\sin \alpha_i \cos \alpha_i]x - [\sin^2 \alpha_i]y &= [(x_i - \sec \varphi \cdot v_x t_i) \sin \alpha_i \cos \alpha_i - (y_i - \sec \varphi \cdot v_y t_i) \sin^2 \alpha_i] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

3. 天体高度測定による実測位置

二天体を同時観測して最後まで計算で船位を求めることは、Kotlaric が与えている²⁾。しかしこの方法では3天体以上の同時観測が扱えない。ここでは観測の数に無関係に一定の方式で処理

できる方法を示す。

3.1 ランダムな誤差のとき

l, d, h を与えて高度 a を求める式

$$\sin a = \sin l \sin d + \cos l \cos d \cos h$$

を l, h に関して微分して

$$\Delta a = \cos Z \cdot \Delta l - \cos l \cdot \sin Z \cdot \Delta h \quad \dots\dots\dots (7)$$

を得る。ここに Z は天体の方位。 Δl は北向きを正、 Δh は西向きを正とし、 Z は北を 0° として右まわりに 360° まで測る。(7) 式は DR 位置の緯度・経度に $\Delta l, \Delta h$ の誤差があるため、計算高度が実測高度と違う関係を示している。つまり

$$\left. \begin{aligned} \Delta a &= a_{obs} - a_{cal} \\ \Delta l &= lat_{fix} - lat_{DR} \\ \Delta h &= long_{DR} - long_{fix} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

但し、 $long$ は東向を正とする。(7) 式を見てわかるように、方位 Z でインターセプト Δa の天測位置の線は、 DR 位置を原点として $(0, \Delta a / \cos Z)$ 点と $(-\Delta a / \cos l \cdot \sin Z, 0)$ 点とを結ぶ直線である。

このような Δa_i の観測を、 i について n 回行う ($i=1, 2, \dots, n; n \geq 2$)。

$$\cos Z_i \cdot \Delta l - \cos l \cdot \sin Z_i \cdot \Delta h = \Delta a_i \quad \dots\dots\dots (9)$$

$n=2$ のときは位置の線の交点は、連立方程式の解としてただちに求まる。 $n \geq 3$ のときは最小自乗法で処理する。つまり正規方程式：

$$\left. \begin{aligned} [\cos^2 Z_i] \Delta l - \cos l [\cos Z_i \sin Z_i] \Delta h &= [\cos Z_i \cdot \Delta a_i] \\ -\cos l [\cos Z_i \sin Z_i] \Delta l + \cos^2 l [\sin^2 Z_i] \Delta h &= -\cos l [\sin Z_i \cdot \Delta a_i] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

が立つ。この連立方程式を解いて、 Δl 及び Δh が求まる。こうして得た $\Delta l, \Delta h$ を (9) 式の左辺に代入して得る値と実測したインターセプトとの差の2乗和がある値以上になれば、この観測は悪いからやりなおす。

3.2 未知だが一定の誤差があるとき

予期しない地平視差があるような場合は、各測定高度に一定の誤差が加わる。このときはインターセプト Δa_i のかわりに $\Delta a_i + \alpha$ を入れる。ここに α は未知だが i には無関係な値。 $\Delta l, \Delta h$, 及び α の三つが未知だから、3回の観測でこれらがきめられる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \cos Z_1 \cdot \Delta l - \cos l \cdot \sin Z_1 \cdot \Delta h - \alpha &= \Delta a_1 \\ \cos Z_2 \cdot \Delta l - \cos l \cdot \sin Z_2 \cdot \Delta h - \alpha &= \Delta a_2 \\ \cos Z_3 \cdot \Delta l - \cos l \cdot \sin Z_3 \cdot \Delta h - \alpha &= \Delta a_3 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

この連立方程式を解いて $\Delta l, \Delta h$, 及び α を得る。これは幾何学的には、誤差三角形の各辺間の中線の交点を求めていることである。観測が4回以上あるときは、三つの未知数について最小自乗法を行う。こうして得た α が常識はずれの値になれば、この観測は良くないからやりなおす。

測者が移動しているときは、観測時刻の DR 位置に対する a_{cal} を計算して Δa を出せば、観測と観測との間に航走があつても、これを考慮しなくてよい。

4. あとがき

航海は船位をデジタルに知っただけでは完成しない。特に沿岸航海では、陸岸との相対関係が必要である。そのためには連続的に DR 位置を図表示する装置がまず必要だ。本方法で得られる x, y 座標を図表示し、 DR 位置をチェックすることは簡単だろう。大洋航海中は、本方法で得た $lat, long$ を入力として目的地への大圏針路、距離を計算する装置へ入れれば良い。本論文は、これら応用に対する基礎を与えるものである。

この研究を進めるにあたっては、自動航法研究会での討論に負う所が大きい。ここにそのことをしるして同会メンバーに対する謝意を表します。

5. 付録：計算例

例 1. Co N 20° E に 20ノットの速力で航行中、3 分間隔で、洲崎灯台 (34°58.4' N, 139°45.6' E) の方位を S 61° E に、浮島 (35°06.4' N, 139°49.0' E) の方位を N 49° E に、剣崎灯台 (35°08.3' N, 139°40.8' E) の方位を N 11° W に測った。最後に方位を測ったときの船位を求めよ。

解

$$\begin{cases} x_1=45.6, y_1=-1.6 \times \sec 35^\circ = -2.0 & \alpha_1 = \text{N } 61^\circ \text{ W}, t_1 = -\frac{6}{60}, \\ x_2=49.0, y_2=6.4 \times \sec 35^\circ = 7.8, & \alpha_2 = \text{S } 49^\circ \text{ W}, t_2 = -\frac{3}{60}, \\ x_3=40.8, y_3=8.3 \times \sec 35^\circ = 10.1, & \alpha_3 = \text{S } 11^\circ \text{ E}, t_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x=6.8, v_x \sec \varphi = 8.3, & v_x \sec \varphi \cdot t_1 = -0.8, v_x \sec \varphi \cdot t_2 = -0.4 \\ v_y=18.8, v_y \sec \varphi = 23.0, & v_y \sec \varphi \cdot t_1 = -2.3, v_y \sec \varphi \cdot t_2 = -1.1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - v_x \sec \varphi \cdot t_1 = 46.4 & y_1 - v_y \sec \varphi \cdot t_1 = 0.3 \\ x_2 - v_x \sec \varphi \cdot t_2 = 49.4 & y_2 - v_y \sec \varphi \cdot t_2 = 8.9 \\ x_3 = 40.8 & y_3 = 10.1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\cos^2 61^\circ + \cos^2 49^\circ + \cos^2 11^\circ)x - (-\sin 61^\circ \cdot \cos 61^\circ + \sin 49^\circ \cdot \cos 49^\circ \\ - \sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ)y = 46.4 \cos^2 61^\circ + 49.4 \cos^2 49^\circ + 40.8 \cos^2 11^\circ \\ + 0.3 \sin 61^\circ \cdot \cos 61^\circ - 8.9 \sin 49^\circ \cdot \cos 49^\circ + 10.1 \sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ \\ (-\sin 61^\circ \cdot \cos 61^\circ + \sin 49^\circ \cdot \cos 49^\circ - \sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ)x - (\sin^2 61^\circ + \sin^2 49^\circ \\ + \sin^2 11^\circ)y = -46.4 \sin 61^\circ \cdot \cos 61^\circ + 49.4 \sin 49^\circ \cdot \cos 49^\circ \\ - 40.8 \sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ - 0.3 \sin^2 61^\circ - 8.9 \sin^2 49^\circ - 10.1 \sin^2 11^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.63x + 0.116y = 69.0 \\ -0.116x - 1.37y = -8.5 \end{cases}$$

$$x = 42.2, \quad y = 2.61 \quad 2.61 \times \cos 35^\circ = 2.1$$

$$\text{答} \begin{cases} \text{lat } 35^\circ 02.1' \text{ N} \\ \text{long } 139^\circ 42.2' \text{ E} \end{cases}$$

例 2. 推測位置の緯度 40°36' S において太陽の下辺高度を観測して 21°10.0' を得、その後 S 28° W に 48.5' 航走して恒星リゲルの高度を 56°01.7' に測定した。後測時の船位を求めよ。*

解 両時刻の DR 位置を用いて a_{cal} と Z とが求められる。 a_{cal} と a_{obs} との差でインターセプト Δa を作る。

* 岩永・樽美両先生共著の天文航法下巻82頁の例題から引用しました。

$$\begin{cases}
\Delta a_1 = 4.9', Z_1 = S 80.8^\circ W, \cos Z_1 = -0.160, \sin Z_1 = -0.987 \\
\Delta a_2 = -3.2', Z_2 = N 17.1^\circ E, \cos Z_2 = 0.956, \sin Z_2 = 0.294 \\
\cos^2 Z_1 = 0.026, \cos Z_1 \sin Z_1 = 0.158, \sin^2 Z_1 = 0.974 \\
\cos^2 Z_2 = 0.914, \cos Z_2 \sin Z_2 = 0.281, \sin^2 Z_2 = 0.086 \\
\Delta a_1 \cos Z_1 = -0.78, \Delta a_1 \sin Z_1 = -4.84, \cos l = 0.759 \\
\Delta a_2 \cos Z_2 = -2.92, \Delta a_2 \sin Z_2 = -0.94, \cos^2 l = 0.576 \\
(0.026 + 0.914) \Delta l - 0.759(0.158 + 0.281) \Delta h = -0.78 - 2.92 \\
-0.759(0.158 + 0.281) \Delta l + 0.576(0.974 + 0.086) \Delta h = -0.759(-4.84 - 0.94) \\
0.940 \Delta l - 0.333 \Delta h = -3.70 \\
-0.333 \Delta l + 0.611 \Delta h = 4.39
\end{cases}$$

$\Delta l = -1.7$, $\Delta h = 6.3$ を得る。即ち後測時の実測位置は、後測時の *DR* 位置から $1.7' S$, $6.3' W$ の位置である。

参 考 文 献

- 1) 大前憲三郎ほか：陸地測量学 (1935), 276頁
- 2) Kotlaric: New methods of ship position finding from celestial observations, The International Hydrographic Review, Vol. XXXIII, No. 1, May 1956