同時観測による船位決定と誤差の処理 I

広 田 実*

Position Fix at Sea through Simultaneous Observations and Stochastic Adjustment of Errors—I

M. Hirota

Abstract

Navigators may obtain four or more position lines by star sights at night or twilight. Then they can determine the most probable position through calculation based on the least square method. The writer gives formulas for position fixing and division of errors into a correction term and accidental errors.

Position fixing by calculation is rigorous and free from personal prejudice, but the calculation is rather complicated, and does not suit navigators' routine work. The writer explains a geometrical method for determining approximately the most probable position and a simple computation for correction term and estimation of standard deviation.

Navigators can find their own observation errors from their sights at sea.

1. は し が き

夜間天測その他で4本以上の位置の線を得たとき、最小自乗法の処理によつて、最確船位を得、定差及び偶差の分離を行なうことができる。ここではその計算式を与え、誤差について考察を加える。

計算による最確船位決定は確定的で、個人による差の混入する機会はないが、計算誤りもあり得るし、又計算そのものもかなり面倒で、海上に於ける実務に不向きである。それ故、幾何学的に概略の最確船位を求める方法を考察し、これを用いて、定差及び偶差を見積る方法を与えた。これによれば、海上に於ける天測のデータから、各人の測定精度を調べることもできよう。

2. 天測による位置の線の方程式

一つの天体の測定高度と、船の推定位置におけるその天体の計算高度及び計算方位より得られる位置の線を考察する。

推定船位を原点にとつて、北に y -軸、東に x -軸をとる。方位は北を 0° とし、右廻りに 360° までとする。この時推定船位に近い接点における天体の等高度円の接線の方程式は

$$x \sin z + y \cos z = I$$

ここに

z : 計算方位

*神戸商船大学（神戸市東灘区本庄町深江）

$$I = a_0 - a_e \text{ (分)}$$

y : 緯度の差 Δl (分)

$x = \Delta L \cdot \cos l$, l : 推定位置の緯度

ΔL : 経度の差 (分)

I をインターセプトと呼ぶ。上記の式は次に示す場合使用できない。

- (1) 推定船位が地球の両極に近い場合
- (2) 測定高度が 90° に近い為、等高度円の半径が小さく接線を以て円周を近似できない場合、及計算方位が真方位と大きな誤差を持つ場合
- (3) 高度が 0° に近く、測定高度の修正値が正確に得られない場合

第1図 位置の線

3. 位置の線が4本以上のときの最確船位

同時観測と言つても n 個の観測には時間のズレがあるが、各観測時刻ごとの推定位置を用いて高度計算すれば、 n 本の位置の線は総て同じ形式の方程式で与えられる。〔註1〕

$$x \sin z_i + y \cos z_i = I_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

ここで最確船位 (x_0, y_0) 、及び個人差等に起因する定差(補正項) I_0 を考え、これらを位置の線の式に代入して得られる残差を e_i とすると

$$-e_i = x_0 \sin z_i + y_0 \cos z_i - I_0 - I_i \dots \dots \dots (0)$$

これを観測方程式と呼ぶ。次に最小自乗法によつて残差平方和を最小にすると x_0, y_0, I_0 を定める。即ち

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \sum e_i^2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y_0} \sum e_i^2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial I_0} \sum e_i^2 = 0$$

より、正規方程式は

$$\left. \begin{aligned} x_0 \sum \sin^2 z_i + y_0 \sum \sin z_i \cos z_i - I_0 \sum \sin z_i &= \sum I_i \sin z_i \\ x_0 \sum \sin z_i \cos z_i + y_0 \sum \cos^2 z_i - I_0 \sum \cos z_i &= \sum I_i \cos z_i \\ x_0 \sum \sin z_i + y_0 \sum \cos z_i - I_0 \cdot n &= \sum I_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

この連立方程式を解けば、最確船位 (x_0, y_0) 及び定差 I_0 が得られる。

4. 計 算 式

(1)式に於て、各項、各係数を次の如く置く

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \sum \sin^2 z_i & a_{12} &= a_{21} = \sum \sin z_i \cos z_i & b_1 &= \sum I_i \sin z_i \\ a_{22} &= \sum \cos^2 z_i & a_{13} &= a_{31} = \sum \sin z_i & b_2 &= \sum I_i \cos z_i \\ a_{33} &= n & a_{23} &= a_{32} = \sum \cos z_i & b_3 &= \sum I_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

このとき、正規方程式は次のごとく表現される。

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}(-I_0) &= b_1 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}(-I_0) &= b_2 \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}(-I_0) &= b_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

ここで $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ とする。

なぜなら、少くとも異なる方向に4個以上の天体を選ぶことを条件としているからである。これらを解くと、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= c_{11}b_1 + c_{12}b_2 + c_{13}b_3 \\ y_0 &= c_{21}b_1 + c_{22}b_2 + c_{23}b_3 \\ -I_0 &= c_{31}b_1 + c_{32}b_2 + c_{33}b_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

ここに $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1}$ である。

筆算等でこれらの計算を行なうには、計算誤りをチェックできる定式化されたフォームがあり、文献例えば〔1〕に詳しい。

5. 誤差の処理

残差平方和 S_e は計算で求めた x_0, y_0, I_0 を観測方程式に代入して得てもよい。

$$S_e = \sum_i e_i^2 = \sum_i (x_0 \sin z_i + y_0 \cos z_i - I_0 - I_i)^2$$

であるが、次のように計算した方が簡単である。(1)式を考慮して

$$\begin{aligned} S_e &= \sum_i x_0 \sin z_i (x_0 \sin z_i + y_0 \cos z_i - I_0 - I_i) + \sum_i y_0 \cos z_i (x_0 \sin z_i + y_0 \cos z_i - I_0 - I_i) \\ &\quad - \sum_i I_0 (x_0 \sin z_i + y_0 \cos z_i - I_0 - I_i) - \sum_i I_i (x_0 \sin z_i + y_0 \cos z_i - I_0 - I_i) \\ &= - \sum_i I_i (x_0 \sin z_i + y_0 \cos z_i - I_0 - I_i) = -x_0 \sum_i I_i \sin z_i - y_0 \sum_i I_i \cos z_i + I_0 \sum_i I_i + \sum_i I_i^2 \\ \therefore S_e &= \sum_i I_i^2 + I_0 b_3 - y_0 b_2 - x_0 b_1 \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

残差 e_i の原因となる誤差は、各観測ごとに独立で、平均0、分散 σ の正規分布するものとすれば、分散の不偏推定値 $\hat{\sigma}^2$ は次式で与えられる。

$$\hat{\sigma}^2 = S_e / (n-3) \dots\dots\dots(6)$$

従来の最小自乗法では $\hat{\sigma}^2$ が σ^2 に一致するものとして扱っていたが、これは $n-3$ が充分大きい場合にのみ近似的に成立することである。 $S_e / \sigma^2 = (n-3) \hat{\sigma}^2 / \sigma^2$ は自由度 $(n-3)$ の χ^2 分布をなすことが期待できるから、例えば信頼度を $(1-2\alpha)$ と定めて σ^2 の信頼区間を

$$\frac{S_e}{\chi^2(n-3, \alpha)} \leq \sigma^2 \leq \frac{S_e}{\chi^2(n-3, 1-\alpha)} \dots\dots\dots(7)$$

と推定することができる。しかしながら、海上での一連の観測では $n=5$ 以上の測定を行なうことは希であつて、自由度が小さすぎて推定区間が大きく、実用にならないであろう。普通の場合には、自らの希望する値に σ^2 を仮設するか、文献〔2〕等で与えてある数値をとるか、或は従来のデータより推定するかした σ^2 の値を、上記の信頼区間内にあることを確かめてから、使用すればよい。ここにでてくる第一種危険率 α をどうきめるかは改めて考察したい。

σ^2 の仮設検定された値を σ_0^2 とすれば、 x_0, y_0, I_0 に対して次式が成立する〔1〕。

$$\sigma_{x_0}^2 = c_{11} \sigma_0^2, \sigma_{y_0}^2 = c_{22} \sigma_0^2, \sigma_{I_0}^2 = c_{33} \sigma_0^2 \dots\dots\dots(8)$$

ここに

$$c_{11} = \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, c_{22} = \frac{\begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}}{D}, c_{33} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{D}, D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \dots\dots\dots(9)$$

ここに与えられた $\sigma_{x_0}, \sigma_{y_0}$ を径とする楕円を画くならば、内部に於ける船位の存在確率が $1 - 1/\sqrt{e} = 0.393$ となる。この楕円は最小面積の誤差圏ではないが、一般に多数の位置の線を得る場合、全方位をほぼ等分割する向きに天体を選ぶよう努力するので、最小面積誤差圏が円に

近いことが多く、大きな差はない。実用的には $\sqrt{(\sigma_{x_0}^2 + \sigma_{y_0}^2)}/2$ の半径を有する円を作図してもよいであろう。50%, 95%誤差圏その他については、径を1.17倍、2.45倍等に伸することによつて得られ、これは従来の理論と同じである。

6. 定差を考慮することの幾何学的意味

定差を除去する目的で、ほぼ反方位の天体の位置の線の交角の二等分線を用いる方法がある。これを厳密化したものが、定差を考慮した最小自乗法の計算である。

n 本の位置の線を得たとき、あらゆる二等分線を求めれば nC_2 本である。定差を除去する目的では、ほぼ反方向の組み合わせが価値高く、ほぼ同方向が殆んど無価値である。計算によると、等しい精度を持つ二つの位置の線の二等分線の精度は $\sqrt{2} \sin((z_i - z_j)/2)$ 倍になる。〔2〕それ故二等分線の位置の線の残差に精度に比例する重みを付けて最小自乗法を行なえばよい。

今、2本の位置の線が

$$x \sin z_i + y \cos z_i = I_0 + I_i$$

$$x \sin z_j + y \cos z_j = I_0 + I_j$$

で与えられたとする。これらは標準型であるから、定差 I_0 を除き得る組み合わせを取つて得た二等分線は次式で与えられる。

$$x(\sin z_i - \sin z_j) + y(\cos z_i - \cos z_j) = I_i - I_j$$

この式は標準型でない。この二等分線の向きを θ とすると (θ は北より右廻りに測る)

$$\tan \theta = -\frac{\cos z_i - \cos z_j}{\sin z_i - \sin z_j} = \tan \frac{z_i + z_j}{2}$$

$$\therefore \theta = (z_i + z_j)/2 \text{ 又は } (z_i + z_j)/2 + 180^\circ$$

即ち、二等分線の向きは天体の方位を二等分する方位である。次に

$$(\sin z_i - \sin z_j)^2 + (\cos z_i - \cos z_j)^2 = 4 \sin^2(z_i - z_j)/2$$

であるから、二等分線の式を標準型に直して

$$x \frac{\sin z_i - \sin z_j}{2 \sin(z_i - z_j)/2} + y \frac{\cos z_i - \cos z_j}{2 \sin(z_i - z_j)/2} = \frac{I_i - I_j}{2 \sin(z_i - z_j)/2}$$

最確値 x_0, y_0 を入れたときの残差を E_{ij} とし、これに $(2 \sin(z_i - z_j)/2)^2$ の重みを付けて残差平方和を作ると

$$S_E = \sum_i \sum_{j>i} \left(2 \sin \frac{z_i - z_j}{2} \right)^2 E_{ij}^2$$

$$= \sum_i \sum_{j>i} \{ x_0(\sin z_i - \sin z_j) + y_0(\cos z_i - \cos z_j) - (I_i - I_j) \}^2$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_0} S_E = \sum \sum (\sin z_i - \sin z_j) \{ x_0(\sin z_i - \sin z_j) + y_0(\cos z_i - \cos z_j) - (I_i - I_j) \}$$

$$= x_0 \sum \sum (\sin z_i - \sin z_j)^2 + y_0 \sum \sum (\sin z_i - \sin z_j)(\cos z_i - \cos z_j) - \sum \sum (\sin z_i - \sin z_j)(I_i - I_j)$$

$$= x_0 \{ (n-1) \sum \sin^2 z_i - 2 \sum \sum \sin z_i \sin z_j \} + y_0 \{ (n-1) \sum \sin z_i \cos z_i - 2 \sum \sum \sin z_i \cos z_j \}$$

$$- I_0 \{ (n-1) \sum I_i \sin z_i - 2 \sum \sum I_i \sin z_j \} = 0 \quad \dots \dots \dots (10)$$

さて(1)式より

$$x_0 \sum \sin^2 z_i + y_0 \sum \sin z_i \cos z_i - I_0 \sum \sin z_i = \sum I_i \sin z_i \quad \dots \dots \dots (11)$$

$$x_0 \sum \sin z_i + y_0 \sum \cos z_i - I_0 \cdot n = \sum I_i \quad \dots \dots \dots (12)$$

(11)式を n 倍して(12)式を代入して I_0 を消去すると

$$x_0 \{ n \sum \sin^2 z_i - \sum \sin z_i \sum \sin z_i \} + y_0 \{ n \sum \sin z_i \cos z_i - \sum \sin z_i \sum \cos z_i \}$$

$$\begin{aligned}
 &= n \sum I_i \sin z_i - \sum I_i \sum \sin z_i \\
 \therefore x_0 \{ (n-1) \sum \sin^2 z_i - \sum_{i \neq j} \sum \sin z_i \sin z_j \} &+ y_0 \{ (n-1) \sum \sin z_i \cos z_i - \sum_{i \neq j} \sum \sin z_i \cos z_j \} \\
 &= (n-1) \sum I_i \sin z_i - \sum_{i \neq j} \sum I_i \sin z_j \dots \dots \dots (13)
 \end{aligned}$$

(10), (13)は全く同じ式である。 y_0 についても同様である。

以上の結果より、最小自乗法で定差を考慮することの幾何学的意味は明瞭になったであろう。又逆に二等分線を用いる位置の決定には、始めの位置の線が4本以上必要なことも判る。

7. 幾何学的作図法

定差を考慮して最小自乗法を行なったとき、計算によつて最確位置が与えられるが、計算が複雑で海上の実務には不向きであるし、計算誤りによつて誤った判断を下す可能性もある。ところで6.で示すところによれば、二等分線を作つて、ほぼ反方位に近い組み合わせから得たものを重視し、ほぼ同方位に近い組み合わせより得たものを無視することによつて、幾何学的に概略の最確船位を決定することができる。

凡ゆる位置の線に天体の向きを示す矢印を付け、方位差角は常に劣角をとることにすれば、方位差角は図2の如く与えられる。次に重みを表1に与える。これらより方位差角が $120^\circ \sim 90^\circ$ を越えて小さくなると、重みは急激に小さくなることが判る。このことから次のように概略位置を定める作図の方針を定めることができよう。

〔原則〕

I. 位置の線の本数が4程度のとき

11. 交角の小さいものから順に交点に番号を付け、交角が 60° 又は 90° になったら止める。
12. 番号順に、方位差角が鈍角の交点に対して二等分線を記入し、少なくとも三本を得る。
13. 順位の小さい二等分線を重視しながら、最確位置をきめる。(三角形が得られたときは、各辺からその辺の長さに比例する距離にある三角形内の点をとる。又必要があれば重みに対する修正を加える。)

II. 位置の線が多数あるとき。

方位差角が $180^\circ \sim 120^\circ$ (得られないときはもつと小さくてもよい) の組み合わせを選び出し、二等分線を作図して、これらから最確位置をきめる。

III. 異つた位置がともに最確位置の如く見えるとき。

31. それらの点より、凡ゆる位置の線に垂線を下し、その長さを I_{0i} とする。(符号はインターセプトと同じ)

第2図 方位角差

第1表 重み

方位角差	重み
θ°	$\sin^2 \theta / 2$
180	1.000
150	0.933
135	0.854
120	0.750
90	0.500
60	0.250
45	0.146
30	0.067
0	0.000

32. $S_e = \sum_{i=1}^n I_{0i}^2 - \left(\sum_{i=1}^n I_{0i} \right)^2 / n$ を計算し、最小の S_e を与える点を最確位置とする。

この原則に基づいて最確位置を求めた作図例を図3, 4に示す。

図3(a)は原則Iによつて作図したもので、黒点は概略の最確位置を示す。同(b)は本数が多いので原則IIによつて作図した。最確位置は常識どおりほぼ位置の線の交点の重心附近にある。

図4(a)は同方向及び反方向の二本の位置の線の組み合わせの場合である。このような場合、最確位置は四辺形の内部にあるとは限らない。同(b)は同方向の組み合わせで、最確位置は不明確である。計算によると確定するが、(8)式によつて誤差が大きいことが示されている。

第3図 一般的な作図例(a)4本するとき, (b)6本するとき

第4図 特殊な結果の例(a)4角形の外にでるとき, (b)不定のとき

8. 簡易集計法

最小自乗法の計算は面倒であるが、将来電子計算機等で計算が行ない得るなら、 x_0, y_0, I_0, S_e 等計算で求めた方がよい。幾何学的に概略の x_0, y_0 を求めた場合は次のように整理した方がよいであろう。

1. 推定船位が最確位置に一致していれば、 $x_0=y_0=0$ であるから(12)式より判るように、補正值 I_0 は次式で与えられる。

$$I_0 = -\frac{1}{n} \sum I_{0i} \dots \dots \dots (13)$$

作図で求めて最確位置より、位置の線までの距離を I_{0i} とし(天体の方位と反対にあるとき正)、これらの平均に負号を付ければよい。

2. 最確位置が正しいかどうかをチェックするには次のようにすればよい。最確位置に於る残差 e_i の代数和は0であるから

$$S_e = \sum e_i^2 = \sum I_{0i}^2 - (\sum I_{0i})^2 / n = \sum I_{0i}^2 - nI_0^2 \dots \dots \dots (14)$$

を計算し、近傍の点と比較して、 S_e が最小であればよい。

3. 残差平方和 S_e から、この天測に於ける σ^2 の不偏推定値 $\hat{\sigma}^2$ が得られる。 S_e 又は $\hat{\sigma}^2$ が異常に大きければ、測定又は計算に失敗があつたものと考えられる。(どの程度から異常と考えるかは次回に述べたい)
4. 分散 σ^2 が与えられるならば、 I_0 が無視できないかどうかを、統計的に検定することもできる。
5. I_0 を集め、これらを昼間、薄明、夜間、天候、海域等に分類して平均値を求めることによつて、各人の補正項を得ることができる。〔註2〕
6. S_e を集め、これから σ^2 を推定するには次のようにすればよい。 m 組のデータを集めたとき、各組が n_i 本の位置の線で構成されているならば

$$S_{et} = \sum_{k=1}^m S_{ek}, \quad N = \sum_{k=1}^m (n_k - 3)$$

を求め、 χ^2 分布を用いて区間推定する。

$$\frac{S_{et}}{\chi^2(N, \alpha)} \leq \sigma^2 \leq \frac{S_{et}}{\chi^2(N, 1-\alpha)}$$

ここに信頼度は $1-2\alpha$ である。

9. 結 び

このあと、異常に大きい補正項 I_0 及異常に大きい残差平方和 S_e を得た場合の処理が残る。異常の判断は何を規準とすべきかが最も問題になる。尚海上に於ける実際のデータについてもしらべてみたい。

参 考 文 献

[1] 宮本：誤差論及び計算法

[2] 鮫島：船位誤差論

[註1] n 個の観測を行なうとき、時刻にズレがあるにも拘らず、最終観測時の推定位置のみを用いて高度計算を行なうときは、位置の線を作図する時に転移する必要がある。或は又、計算によつて転移の終つた位置の線を求めてもよい。

i 番目の天測を行なつたときの推定位置を原点とする座標系を x, y とし、この原点より針路 C_0 で D_i 湊航走した推定位置を高度計算に於ける仮の推定位置とし、これを原点とする X, Y 座標系を考えると、任意の点で次式が成立する。

$$x = X + D_i \sin C_0$$

$$y = Y + D_i \cos C_0$$

天測による位置の線は推定位置に無関係に正しいものが得られる。観測位置に於て

$$x \sin z_i + y \cos z_i = I_i$$

が得られるから、 x, y を消去して、 X, Y 座標系に移した位置の線の方程式は

$$X \sin z_i + Y \cos z_i = I_i'$$

$$I_i' = I_i - D_i \cos(z_i - c_0)$$

これが転移された位置の線の方程式である。

[註2] I_0 の見積りには常に誤差があり、必ずしも一様ではない。正確には、 $1/C_{33}$ に逆比例する重みを付けて平均をとらなければならない。全方位を等分する方位に n 個の天体を選んだときは、 $c_{33} = 1/n$ になることが簡単に証明でき、この時の I_0 の精度は最も高い。他の場合は複雑な計算によつて求められる。 $1/c_{33}$ を有効反覆数と呼ぶ。

第5図 位置の線の転移