人工衛星のドップラシフト測定による 位置の線とその精度

巻 島 勉* 安田岩男**

Position Lines of a Satellite Doppler
Navigation and their Accuracies

T. Makishima and I. Yasuda

Abstract

Position lines of a satellite Doppler navigation are the lines that the cones and the earth sphere cut each other. They resemble hyperbolic lines. Differentiating the equation of position lines, we get the formula which gives the accuracy of the position lines. When the observations are repeated the fix position is obtained. Its accuracies are investigated along track and cross track. If height error exists the position lines are displaced. Then, we showed the family of position lines.

1. 位置の線

簡単のため地球は半径 $R=6.3667 \times 10^3$ km の球, 衛星は高さ $H=900$ km 一定の円軌道とする。また地球の自転もないとする。

ドップラシフトを測ると距離変化率を知ったことになるが, 距離変化率は衛星の速力を v , 衛星と測者とを結ぶ視線が速度ベクトルとなす角を γ として, $v \cos \gamma$ である。衛星の速力 v は既知だから, 結局 γ を測ったことになる。従つて位置の面は, 衛星を頂点とし, 速度ベクトルを中心軸とし, 開き角 γ の円錐面である。この円錐面と地球面との交線が位置の線である。

地球中心に原点を置き, 衛星の位置方向に z 軸, 速度ベクトル方向に x 軸をとる直交する 3 軸を考える。上記の円錐面は,

$$y^2 + \{z - (R + H)\}^2 = x^2 \tan^2 \gamma \quad \dots\dots\dots (1)$$

地球面上サブトラックを赤道として経度に相等するものを λ , 緯度に相等するものを φ とする。つまり λ は衛星の平均離角の差であり, φ は衛星が一番近づいたときの地心天頂距離だ。このとき, 地球面上 λ , φ と x , y , z との関係は,

$$\left. \begin{aligned} R \cos \varphi \sin \lambda &= x \\ R \cos \varphi \cos \lambda &= z \\ R \sin \varphi &= y \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

これを(1)式に代入して,

$$R^2 \sin^2 \lambda \sec^2 \gamma \cos^2 \varphi + 2R(R + H) \cos \lambda \cos \varphi - R^2 - (R + H)^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

これが開き角 γ の位置の線の λ と φ との関係を与える。 $\cos \varphi$ について解いて,

* 東京商船大学 (東京都江東区深川越中島町2の2)

** 航海訓練所 (東京都千代田区霞ヶ関2の1)

$$\cos \varphi = \frac{-(R+H)\cos \lambda \pm \sqrt{(R+H)^2 \cos^2 \lambda + \{R^2 + (R+H)^2\} \sin^2 \lambda \sec^2 \gamma}}{R \sin^2 \lambda \sec^2 \gamma} \dots\dots\dots(4)$$

これから、一定の γ に対し、 λ を与えて φ が求められる。位置の線がサブトラックと交わる点の λ の値は、正弦法則、

$$\frac{\cos \gamma}{R} = \frac{\cos \alpha}{R+H} \dots\dots\dots(5)$$

から仰角 α を求め、

$$\lambda = \gamma - \alpha \dots\dots\dots(6)$$

として求まる。こうして γ の各値に対し位置の線を書くことができる。

仰角 β 以上がサービス範囲とすれば、その地心天頂距離 ξ は、

$$\frac{\cos \beta}{R+H} = \frac{\cos(\beta+\xi)}{R} \dots\dots\dots(7)$$

から求められる。 $\beta=0^\circ$ に対しては $\xi=28^\circ 49'$ であり、 $\beta=5^\circ$ なら $\xi=24^\circ 13'$ だ。これらの円周及び位置の線群を第1図に示す。ウエスチングハウス社が開発しようとしている方法は、ドップラ方式ではないが、やはり衛星から見る角度を測る。従つてこの位置の線も同じ形となる。

2. ドップラ曲線

衛星は、前節で述べたような位置の線群を持つて、 λ 軸方向に飛行している。地上の一点で測定すれば、一回の衛星通過で次々と γ の異なる位置の線が測者の上を横切ることになる。

λ は時間 t に比例してふえ、距離変化率は $\cos \gamma$ に比例するから、第1図でサブトラックに平行な線上の γ の値を次々と読みとり、 λ 対 $\cos \gamma$ のグラフを書けば、これがドップラ曲線である。 $\varphi=0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ$ に対する曲線を第2図に示す。

3. 位置の線の方角

(3)式を λ, φ について微分する。

$$\{R \cos^2 \varphi \sin \lambda \cos \lambda \sec^2 \gamma - (R+H) \cos \varphi \sin \lambda\} d\lambda + \{-R \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \lambda \sec^2 \gamma - (R+H) \sin \varphi \cos \lambda\} d\varphi = 0 \dots\dots\dots(8)$$

$d\lambda$ の係数を A , $d\varphi$ の係数を B とする。

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = -\frac{A}{B} \dots\dots\dots(9)$$

一方、位置の線とサブトラックとのなす角を θ とすると、

$$\tan \theta = \frac{d\varphi}{d\lambda \cos \varphi} \dots\dots\dots (10)$$

従つて

$$\tan \theta = -\frac{A}{B \cos \varphi} \dots\dots\dots (11)$$

これを、前々節で求めた位置の線上の各点で計算すれば、その点での方向がわかる。位置の線の方法が等しい点を連ねた線を、等方位曲線と呼ぼう。第3図にそれを示す。

4. ドップラシフト測定誤差による位置の線の誤差

(3)式を λ , φ , γ について微分する。

$$Ad\lambda + Bd\varphi + \{R \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda \sec^2 \gamma \tan \gamma\} \delta\gamma = 0 \dots\dots (12)$$

$\delta\gamma$ の係数を C とする。ここに $\delta\gamma$ は、ドップラシフトの式、

$$\Delta f = \frac{-f}{c} v \cos \gamma \dots\dots\dots (13)$$

を微分して、

$$\delta \Delta f = \frac{f}{c} v \sin \gamma \cdot \delta\gamma \dots\dots\dots (14)$$

から

$$\delta\gamma = \frac{\delta \Delta f}{f} \frac{c}{v} \frac{1}{\sin \gamma} \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $\delta \Delta f / f$ が測定精度なのだが、 5×10^{-9} と仮定する。 c は光速 3×10^5 km/sec。 v は衛星の速力 7.4 km/sec。(15) 式にこれらを代入すれば、

$$\delta\gamma = 2.03 \times 10^{-4} \frac{1}{\sin \gamma} \dots\dots\dots (16)$$

(12) 式にもどつて、 $\delta\gamma$ のために位置の線が横にずれる量 X_F は

$$X_F = \frac{C \delta\gamma}{\sqrt{\frac{A^2}{\cos^2 \varphi} + B^2}} \text{ (rad.)} \dots\dots\dots (17)$$

海里単位で表わすには、3438 倍する。

$\lambda = 0$ つまり衛星が正横を通過する時には、位置の線がサブトラクに直交する直線となつてゐる。従つて測定誤差 $\delta \Delta f$ は前後方向の位置誤差となる。つまりドップラ曲線上で、 $\delta \Delta f$ の測定誤差は、

$$\delta t = \frac{\delta \Delta f}{\frac{d \Delta f}{dt}} \dots\dots\dots (18)$$

の時間誤差となり、

$$X_F = v \delta t \dots\dots\dots (19)$$

の前後誤差をもたらす。 $\frac{d \Delta f}{dt}$ は距離の2度微分だが、正横通過時には、

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{R \cos \varphi}{R+H} \frac{v^2}{\rho} \dots\dots\dots (20)$$

となる。但し ρ は衛星と測者との間の距離。これらを(19式)に代入し、正横時の位置の線の誤差は

$$X_F = \frac{\delta \Delta f}{f} \frac{c}{v} \frac{\rho}{R \cos \varphi} \text{ (rad.)} \dots\dots\dots (21)$$

で得られる。(17)式及び(21)式から、測定誤差 $\delta \Delta f$ による位置の線の誤差が計算される。第4図に等誤差曲線を示す。衛星の正横付近で精度が良く、サブトラックに沿った前後方向で悪いことがわかる。測定精度が 5×10^{-9} のとき、サービスエリアの過半数で、位置の線の精度は0.5海里より良い。

5. 決定船位の精度

位置の線がサブトラックと θ なる角をなし、位置の線の誤差が X_F であるから、前後方向及び左右方向の誤差はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} X_\lambda &= X_F \operatorname{cosec} \theta \\ X_\varphi &= X_F \sec \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

となる。衛星が通過中時間的に等間隔に測定を行なえば、測者の φ に応じたサービスエリアの λ の長さに比例した回数だけ測定ができる。ドップラシフトの測定誤差は、その性質がランダムで、1 sec 程度以上隔てれば全く独立と考えられる。従つて測定精度を 5×10^{-9} と言つたが、それは標準偏差の値であり、これから由来する X_λ , X_φ は共に標準偏差と考えるべきだ。

平均値がすべて0で、標準偏差が $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ の n 箇の測定値の平均値の標準偏差 σ は

$$\frac{1}{\sigma^2} = \left\{ \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{1}{\sigma_n^2} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

で与えられる。

$\lambda 1^\circ$ 毎に測定するとすれば、サービス区域を仰角 5° 以上として最大49回の測定ができるが、(23)式により前後方向及び左右方向の総合標準偏差が計算される。 φ の関数として、決定船位の前後方向及び左右方向の標準偏差を第5図に示す。左右方向はサブトラックの近く及びサービスエリアの限界付近で急に精度が悪くなっている。前後方向もやはりサービスエリアの限界付近では急に悪くなるが、それ以外では全般的に良い。一般に前後の方が左右より精度が2倍良い。従つて軌道面に適当な傾斜角を持たせ

れば、北行きと南行きとを組合わせて円満な船位を求めることができるが、極軌道の場合には常に緯度の精度の方が経度の精度より良くなる。

第5図は衛星が離心角 1° 進む毎に1回測定した場合の値を示しているが、サービスエリアのかなりの部分で0.1海里的の精度を持っている。この結果は、Guire および Weiffenbach が得た値〔1〕とよく一致している。測定回数がこれより多く n 回測定できるとすれば、その傾向は第5図と変わらず、値は $\sqrt{49/n}$ 倍に減少する。

6. 衛星の高さに誤差がある場合の船位誤差

衛星の赤緯・赤経に誤差があれば、1対1でそのまま船位に対応する。高さに誤差があり、たとえば高く見積り過ぎれば、その位置の線は真位置よりサブトラックから見て近い所を通る。(3)式を λ, φ, H について微分する。

$$Ad\lambda + Bd\varphi + \left\{ \cos\varphi \cos\lambda - \frac{(R+H)}{R} \right\} \delta H = 0 \quad (24)$$

δH の係数を C' とおけば δH による位置の線の誤差 X_H は

$$X_H = \frac{C' \delta H}{\sqrt{\frac{A^2}{\cos^2\varphi} + B^2}} \quad (25)$$

$\delta H = 100 \text{ m}$ として、この値を第6図に示す。

高さ誤差は、衛星座標の予報誤差と測者のいるジオイド面の地球中心からの距離の不明さによるものである。高さの予報誤差は衛星が見える間せいぜい平均離角が数十度ふえる間はほぼ一定値と見てよいだろう。測者のジオイド面の高さは測定期間中完全に一定である。従つて δH は、前の $\delta \Delta f$ と違って一定誤差とする。衛星の通過に伴つて、位置の線の

方向 θ は変化し、位置の線の誤差 X_H も変化する。その様子を $\varphi = 5^\circ, 15^\circ$ について第7図(a), (b)に示す。この図では λ が 2° 移動する毎の位置の線が書いてある。いずれも高さを高く見積り過ぎれば、船位は真位置よりサブトラックの近くに求まる。 φ が小さいと位置の線は散らばり、真位置からのはずれも大きい、位置の線群は全体として包絡線を持っている。高さ誤差100m に対し、サービスエリアの大部分で左右誤差は0.05海里以下である。衛星通過に際し、正横時をはさんで前後対称に測定すれば、高さ誤差は左右誤差しかもたらさないが、測定が前後非対称の場合は前後誤差も生ずる。

Fig.7-a Position lines when height error exists

Fig.7-b Position lines when height error exists

参考文献

- [1] Guier and Weiffenbach: A Satellite Doppler Navigation System, Proceedings of the IRE, Vol. 48, No. 4 (April, 1960), p. 511