最適航法の基礎研究—III.

杉崎 昭 生*

The Basic Research for Optimum Ship Routing—III.

A. M. Sugisaki

Abstract

It seems that the disturbance factors such as wave, wind and current are particularly significant for the determination of minimum time ship routing across the ocean. Then, taking these factors into consideration, the formulae of computation of the determination of the routing are evolved using the latitude-longitude co-ordinates on the assumption that the earth were a sphere, and also the routine of computation are presented in the form of flow charts.

1. 序 文

外力の影響を受けながら航行する船がその影響度を最小にし、かつ能率よく運航するためには、外力を擾乱関数とする運動方程式を用いて、求める値（ここでは時間）が定常となるような航路を求めればよく、変分法により解決できる。

最短時間航路の選定については、擾乱関数は海流、風および波浪を要素とする時間関数と考えられる。また用いる座標系は、近距離の場合は平面直角座標系で十分精度のある解析ができるので問題はないが、長距離の場合には、地球を球とする球面近似、大圏路に接する円筒近似、あるいは直角座標による系が考えられる。このなかで実際に航海で用いられている球面近似の緯度経度座標系が変換の不必要などからよいと考えられる。

以上のような基本的な考え方にそつて、最短時間航路の選定の問題の解析方法を数式の展開を中心として述べる。

2. 擾 乱 関 数

海洋で遭遇する現象で、船の運航時間に影響する要素としては、とくに異常なものは別として、風、波浪および海潮流があげられ、またそれらが擾乱関数の要素となつている。このうちで最も影響力をもっているものは波浪で、それによる船の強制動揺のために起る推進エネルギーの損失は、場合によつては船の前進力を無くすることがあるほどで、この大きさは波高と出会波向の関数であり、速力減少の形で表わされる。すなわち、速力を v_1 、針路を θ_1 、波高および波向を H 、 θ_3 とすれば、波浪により影響をうけた速力 v_1 は

$$v_1 = v_1(H, \theta_3 - \theta_1) \dots\dots\dots (1)$$

となり、近似的には、平水中の速力を v_0 、 c_1 、 c_2 を定数とすれば、

$$v_1 = v_0[1 - \{c_1 + c_2 \cos(\theta_3 - \theta_1)\}H] \dots\dots\dots (2)$$

*東京商船大学（東京都江東区深川越中島町2の2）

で表わされる。

風による影響は相対風速、相対風向および船型などで著しく異なってくるが、現象的には、速力変動および横圧流の形となつて表われてくる。このうち速力の変動は考慮できるが、圧流については、風の影響が相対風速および相対風向の関数であるので、測定装置を備えてない現在、独立に扱うことは解析をいたずらに複雑にするだけであることから、海潮流の影響に含ませるだけ含ませて、表面的には無視することとする。すなわち、風の影響が大きくなり、速力が低下している状態では相対風向と絶対風向の差が小さくなり、風の影響は風漂流のなかで考慮できると考えられる。

海潮流は、船の対水運動には無関係と考えてよいが、対地運動には海潮流ベクトルが船の運動ベクトルにそのまま加わるような影響を与える。海潮流を時間の関数と見る動き〔1〕があるので、解析は海潮流も時間の関数——予報されうる——として扱った。

擾乱関数の内容について概略を以上に述べたが、関数全体としては、時間 t を独立変数にもち場所（緯度 φ 、経度 λ ）および針路 θ_1 を従属変数にもつ関数と考えられる。なお波浪および海潮流（流速 v_2 、流向 θ_2 ）は時間と場所の関数である。

3. 数式の展開

擾乱を考慮した船の運動方程式は、地球を球とすれば

$$\left. \begin{aligned} x &= \dot{\lambda} - (v_1 \cos \theta_1 + v_2 \cos \theta_2) \sec \varphi \equiv 0 \\ y &= \dot{\varphi} - (v_1 \sin \theta_1 + v_2 \sin \theta_2) \equiv 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

で表わされる。ここで $\dot{\lambda}$, $\dot{\varphi}$ は λ , φ の時間微分を示し、 θ_1 および θ_2 は緯度線より反時計まわりに測るものとする。航海時間 T を最小とするこの最短時間航路の選定の問題は次の積分を満足する。

$$I = \int_0^T (1 + lx + my) dt \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 l , m は Lagrange の未定乗数であり、時間の関数である。積分 I が定常となるための必要条件は、(4)式の第1変分が0、すなわち

$$\begin{aligned} \delta I &= [\delta \lambda + m \delta \varphi]_0^T - \int_0^T \{ (\dot{l} - l_{x\lambda} - m_{y\lambda}) \delta \lambda \\ &\quad + (\dot{m} - l_{x\varphi} - m_{y\varphi}) \delta \varphi - (l_{x\theta_1} + m_{y\theta_1}) \delta \theta_1 \} dt \dots\dots\dots (5) \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

となることである。ここで δ は次の文字の変分を表わし、添文字はその文字の示す変数での偏微分を表わしている（以下同じ）。(5)式において、被積分項の $\delta \lambda$, $\delta \varphi$ および $\delta \theta_1$ にかかる係数項を0とした式は、それぞれ Euler 方程式を表わすが、 $\delta \lambda$, $\delta \varphi$ の係数項=0の式

$$\begin{aligned} \dot{l} + l(v_{1\lambda} \cos \theta_1 + v_{2\lambda} \cos \theta_2 - v_2 \sin \theta_2 \cdot \theta_{2\lambda}) \sec \varphi \\ + m(v_{1\lambda} \sin \theta_1 + v_{2\lambda} \sin \theta_2 + v_2 \cos \theta_2 \cdot \theta_{2\lambda}) = 0 \\ \dot{m} + l \sec \varphi (v_{1\varphi} \cos \theta_1 + v_{2\varphi} \cos \theta_2 - v_2 \sin \theta_2 \cdot \theta_{2\varphi}) \\ + m(v_{1\varphi} \sin \theta_1 + v_{2\varphi} \sin \theta_2 + v_2 \cos \theta_2 \cdot \theta_{2\varphi}) = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (6)$$

は随伴方程式で、未定乗数 l , m の値を与えてくれる式であり、 $\delta \theta_1$ の係数項=0の式

$$l(v_{1\theta_1} \cos \theta_1 - v_1 \sin \theta_1) \sec \varphi + m(v_{1\theta_1} \sin \theta_1 + v_1 \cos \theta_1) = 0 \dots\dots\dots (7)$$

は制御方程式で、繰返し計算の収斂のための修正値を与えてくれる式である。(7)式を変形して

$$\theta_1 = \tan^{-1}(m/l \sec \varphi) + \tan^{-1}(v_{1\theta_1}/v_1) \dots\dots\dots (8)$$

をえ、さらに変形して

$$\begin{aligned}\cos\theta_1 &= (lv_1 \sec\varphi - mv_{1\theta_1}) / \{(l^2 \sec^2\varphi + m^2)(v_1^2 + v_{1\theta_1}^2)\}^{\frac{1}{2}} \\ \sin\theta_1 &= (lv_{1\theta_1} \sec\varphi + mv_1) / \{(l^2 \sec^2\varphi + m^2)(v_1^2 + v_{1\theta_1}^2)\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \quad (9)$$

をうることができる。

(6)式を解いてえた独立解を $l_1, m_1; l_2, m_2$ とすれば

$$E(t) = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

も解を表わしている。ここで $E(0)$ は l_1, l_2, m_1, m_2 の初期条件を表わし、単位マトリックスとする。また l, m は上記独立解の一次結合

$$\begin{aligned}l &= l_1 \cos p + l_2 \sin p \\ m &= m_1 \cos p + m_2 \sin p\end{aligned} \quad (11)$$

で表わされる。ただし p は線型結合素子とする。

(8)式で λ, φ および t を固定し、 p と θ_1 について全微分をほどこせば

$$\delta\theta_1 = |E(t)| \frac{\sec\varphi}{l^2 \sec^2\varphi + m^2} \cdot \frac{v_1^2 + v_{1\theta_1}^2}{v_1^2 + 2v_{1\theta_1}^2 - v_1 \cdot v_{1\theta_1}} \delta p \quad (12)$$

となる。ここで $|E(t)|$ は $E(t)$ の行列式である。また $E(t)$ は(6)式の独立解であるので

$$\int_0^T [x, y] E(t) dt = 0 \quad (13)$$

を満足する。同時にその変分を求め整理すれば

$$[\delta\lambda, \delta\varphi]_T E(t) = \int_0^T [(v_{1\theta_1} \cos\theta_1 - v_1 \sin\theta_1) \sec\varphi (v_{1\theta_1} \sin\theta_1 + v_1 \cos\theta_1)] E(t) \delta\theta_1 dt \quad (14)$$

をうる。この(14)式に(9)式と(12)式を代入すれば

$$[\delta\lambda, \delta\varphi]_T E(T) = [k_1, k_2] \delta p \quad (15)$$

となる。ここで

$$[k_1, k_2] = \int_0^T [-m, l] E(t) \sec\varphi |E(t)| \left\{ \frac{v_1^2 + v_{1\theta_1}^2}{l^2 \sec^2\varphi + m^2} \right\}^{\frac{3}{2}} \frac{dt}{v_1^2 + 2v_{1\theta_1}^2 - v_1 \cdot v_{1\theta_1}} \quad (16)$$

とする。(15)式より

$$[\delta\lambda, \delta\varphi]_T = \frac{\delta p}{|E(T)|} [k_2, k_1] \begin{bmatrix} -m_1 & l_1 \\ m_2 & -l_2 \end{bmatrix}_T \quad (17)$$

がえられる。最終時間 T を ΔT だけ変動させたとき、目的地の λ, φ の変動は

$$[\delta\lambda, \delta\varphi]_T = [\Delta\lambda, \Delta\varphi]_T - [\dot{\lambda}, \dot{\varphi}] \Delta T \quad (18)$$

で表わされる。ただし $\Delta\lambda, \Delta\varphi$ は T における計算値と目的地の λ, φ のずれを表わす。(17)式を(18)式に代入すれば

$$[\Delta\lambda, \Delta\varphi]_T = \frac{1}{|E(T)|} [k_2, k_1] \begin{bmatrix} -m_1 & l_1 \\ m_2 & -l_2 \end{bmatrix}_T \delta p + [\dot{\lambda}, \dot{\varphi}]_T \Delta T \quad (19)$$

となるが、この式は Newton Raphson の式で、これからえられる ΔT および δp が繰返し計算を制御する T および p の修正量を与えてくれる。

計算はまず p と T を推測し、そのときの λ, φ を時間 T まで求め、 λ, φ のずれ $\Delta\lambda, \Delta\varphi$ を求め、 $\Delta\lambda^2 + \Delta\varphi^2$ が一定基準値より大きければ、(19)式より $\delta p, \Delta T$ を求め、 p の代りに $p + \delta p$ を、 T の代りに $T + \Delta T$ を用い、計算を $\Delta\lambda^2 + \Delta\varphi^2$ が基準値より小さくなるまで繰返す。

λ, φ を求めるには漸長緯度航法を用い、出発点を λ_0, φ_0 とし、速力を v 、針路を θ で t 時間航行したとすれば

$$\varphi = \varphi_0 + v t \sin\theta$$

$$\lambda = \lambda_0 + r \cot \theta \int_0^{\varphi} \sec \varphi \, d\varphi \quad \dots\dots\dots (20)$$

を用いて計算する。ただし r は地球半径とする。 v , θ は

$$v = \{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\}^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_1 \sin \theta_1 + v_2 \sin \theta_2}{v_1 \cos \theta_1 + v_2 \cos \theta_2} \right)$$

を用いて求める。

4. 計 算 例

4.1 フィールドモデル

波フィールドモデルとしては、前報告と同様〔2〕、米国で実際ファクシミリ電送している北太平洋の12時間予想図を受信して、そのうちの5枚を用いた。すなわち、1966年1月30日00Zのものを現状図（時間 $t=0$ のときの状態図）に見立て、以下1月31日00Z、2月1日00Z、2月2日00Zおよび2月3日00Zの予想図を、それぞれ36時間、72時間、108時間予想図および2月の気候図に見立てて、これを利用した。座標は下縁を北緯25度、上縁を北緯53度、左縁を東経140度、そして右縁を西経140度とした。

海潮流フィールドモデルとしては、現在のところ時間関数として扱うのは、まだ精度などの点で問題のあるところから、気候的フィールドのみを考え、米水路部の海流図〔3〕の2月のものから当該水域について抽出したデータを利用した。

4.2 計 算

計算は3.に述べた数式を図1、図2のフローチャートに示すような手順に従って、東京大学大型計算機 HITAC 5020 により行なつた。

第 1 図

第 2 図

フローチャートで示される計算は START から GC までの計算 (図1) が、最短時間航路を決めるためのもので、GC から STOP までの計算 (図2) は参考のため最短距離航路 (大圏) の航海時間を求めるためのものである。ここで示される計算では出発地点は北緯30度、東経140度にとり、到達地点は北緯30度、西経140度をとった。船の速力は20ノット (平水) とし、速力の変動率をきめる(2)式の定数 c_1 , c_2 はそれぞれ0.05, 0.025とした。また図1の繰返し計算は80のステップからなっている。

プログラムは FORTRAN HARP を用い、コンパイルのために約50秒、繰返し計算1回につき約20秒であるので、最短時間航路は初期条件の与え方にもよるが、だいたい3~4分で求まる。最短距離航路の航海時間の実計算時間はほぼ5~6秒である。最短時間航路は最大波高区域の位置により左右されるから、前2回のときのように高波高区域を周航する航路となる。

〔註〕 フローチャートにおいて、丸形は開始、終了、フローチャートの継ぎ印として用い、矩形は演算実行、小判形は比較、六角形はサブルーチンを表わしている。サブルーチンのうち WAVEVD は波高と波向およびそれらの λ , φ 偏微分を、CURRENT は海潮流の流力および流向およびそれらの λ , φ 偏微分を、RTERMS は随伴方程式の係数項の数値を、SUMFNS は(10)式の k_1 , k_2 の値を求めるためのものである。

5. 結 論

連続な波および海潮流フィールドでの最短時間航路が選定しうることを示したが、まだこの中には多くの問題を含んでいる。その中の最大なものは、変分法を用いているために定常 (極値) となるものがえられ、最適であることは別に判別しなければならない。今回用いた方法で判別するとすれば、一応定常として求めた航路とは大圏航路の反対側にも定常となる航路が考えられるので、海面全体で定常をみつけるいわゆるスキャン方式で解決しなければならない。他の方法は大局的変分法の力を借りて、定常の数を求める方法で解決するのである。

別の問題は、これに類似の問題であるが、陸岸などの挿入が定常となる航路をふやすおそれが十分考えられる。大陸のようなもの場合は、それ以上の接近は不可能であるので、航行できないようなプログラムを組んでおけば解決できる。しかし、島嶼や小さな高波高区域避航が入ってくると、定常となる航路はこれらをはさんで出てくる可能性は十分ある。そこで前の問題以上に細かいスキャンをする必要がでてくる。これらのスキャンにより時間は少々かかってはくる。

航路の選定が電子計算機の力を借りて可能となってきたが、まだ長期間の予報の欠如から、実用になつてきていない。そこでこの方式を航路選定用シミュレータとして用いることが、この方式の有効な利用法となると考えられる。これにはまだ解決しなければならない問題もあるので、次の機会に詳述したいと思う。

6. 結 び

最短時間航路の選定の問題をより実際的な立場から数式の発展および解き方を示した。しかしあくまでも一般的な現象を対象としている点では、未だ改良すべき点が残されているが一応まとめてみた。

最後にこの研究にあたり、東大工学部元岡達助教授をはじめ元岡研究室の皆様の御忠言に対してここに謝意を表します。

参 考 文 献

- [1] Computer Produced Synoptic Analyses of Surface Currents and Their Application for Navigation
: W. E. Hubert, Navigation Vol. 12 No. 2 Summer 1965
- [2] 最適航の基礎研究—II. 杉崎昭生 日本航海学会誌第35号 41年7月
- [3] Atlas of Surface Currents Northeastern Pacific Ocean : U. S. H. O. No. 570
Atlas of Surface Currents Northwestern Pacific Ocean : U. S. H. O. No. 569