デジタル計算機による天文航法

I 球面三角形の解法

広 田 実*

Astronomical Navigation with a Digital Computer

Part I, Spherical Trigonometry

M. Hirota

Abstract

With rapid development of electronics, the miniturized digital computer will be equipped on a ship near future. Under necessities of astronomical navigation with a digital computer, programs of distance and initial and final courses have been set up and tested between two points on the great circle. According to HITAC 5020 (FORTRAN IV), compilation requires 7 sec., and computation 0.2 sec. each set of the distance and the courses. Computation is executed in 7-figure, the accuracy will be sufficient for astronomical observations at sea.

は し が き

近年電子計算機の発達が著しく、小型化し急速に進んでいるので船載も可能となろう。天測計算をデジタル計算機で行う場合を予想して、地球上の二点の方位及距離計算のプログラムを組みテストしてみた。東京大学大型計算機 (HITAC 5020, FORTRAN IV) によれば、主計算機の使用時間はコンパイルに7秒、一組の計算に0.2秒であつた。計算は7桁で実施しているので、海上の測定に対して充分の精度を持つものと考えられる。

1. 計算対象と計算公式の選定

天文航法としては、位置の線航法が便利であるから、これに必要な計算を行うことにする。天測計算に必要な時間の大部分は(1)D. R. の計算、(2)天測暦を繰る、(3)米村表による高度、方位計算、(4)高度改正、(5)作図による最確位置の決定に分けられる。さし当つて、このうち最も長い時間を要する高度と方位の計算を計算機で実施しよう。

真球と仮定した地球の中心と天体とを結ぶ直線が地球面と交わる点を天体の地位という。以下に述べる計算は、船の D. R. 位置から、天体の地位に向けて航行するときの大圏距離と、起程針路、着達針路、を求めるものである。前二者はそれぞれ計算高度の余角と計算方位とに一致することは明らかで、計算のプログラムはそのまま天測の計算に役立つ。

球面三角形を解くのに Napier の正切法則を用いる理由

(1) 米村表では $\text{hav}(90^\circ - a_c)$, $\sin z$ より a_c , z を求めているから、 $a_c = 90^\circ$, $z = 90^\circ$ 附近で精度が不良になる。

(2) $\sin z = \sin(180^\circ - z)$ が成立つので、計算結果から方位の所属象限の N, S を判別できない。

*神戸商船大学 (神戸市東灘区本庄町深江)

(実際には d と l が同符号で、 $d < l$ のとき「東西圏上高度表」或は「方位象限判別図」を使用して判別し、それ以外の場合は d と同符号を付ける)。

(3) これに対して、 $\tan \theta$ より θ を求める計算では特に精度の落ちるところはない。

(4) 正切法則は総て積、商の形になっているので、浮動小数点型の計算にとって好都合で、差をとることによる相対精度の低下(有効桁数の低下、所謂桁落ち)が起らない。

(5) 現在の HITAC 5020 には逆三角関数の標準 External 関数には $\arctan$ しか用意されていない。

2. 計算公式と記号

起程点 (L_1, l_1)

着達点 (L_2, l_2) $((-h, d))$

起程針路 $\text{COI} = A$

着達針路 $\text{COF} = B' = 180^\circ - B$

$L_2 - L_1 = C$ $((-(\text{船位に於ける天体の時角 } h)))$

$90^\circ - l_1 = b$ $((=90^\circ - l))$

$90^\circ - l_2 = a$ $((=90^\circ - d))$

大圏距離 c $((=90^\circ - a_0))$

ここに

$0^\circ \leq |l| \leq 90^\circ$ 緯度, 赤緯
Nを $\oplus$ とする

$0^\circ \leq |L| \leq 180^\circ$ 経度
Eを $\oplus$ とする

$0^h \leq h \leq 24^h$ 時角
Wを $\oplus$ とする

(())内は、起程点を船のD. R. 位置とし、着達点を天体の地位で表わした場合を示し、 a_0 は計算高度、 z は計算方位である。

以上の要素を正切法則に代入して次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{1}{2}(B-A) &= \sin \frac{1}{2}(l_2-l_1) \sec \frac{1}{2}(l_2+l_1) \cot \frac{1}{2}(L_2-L_1) \dots\dots\dots(11) \\ \tan \frac{1}{2}(B+A) &= \cos \frac{1}{2}(l_2-l_1) \csc \frac{1}{2}(l_2+l_1) \cot \frac{1}{2}(L_2-L_1) \dots\dots\dots(12) \\ \tan \frac{1}{2}c_1 &= \tan \frac{1}{2}(l_2-l_1) \sin \frac{1}{2}(B+A) \csc \frac{1}{2}(B-A) \dots\dots\dots(13) \\ \tan \frac{1}{2}c_2 &= \cot \frac{1}{2}(l_2+l_1) \cos \frac{1}{2}(B+A) \sec \frac{1}{2}(B-A) \dots\dots\dots(14) \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

ここで $c_1 = c_2$ であるが、別途に計算して $|c_1 - c_2| < 0.05'$ あれば、計算距離は $0.1'$ 程度に正しいものとする。

3. 方位符号

球面三角形の総ての角 A, B, C と弧 a, b, c は正で 180° を越えないと考える。ところで(1)式には角と弧の差の項があるので、計算は総て正であるとは限らない。それで正負によつて符号を判定する。

$C/2 = (L_2 - L_1)/2$ は $-180^\circ \sim 180^\circ$ であるが計算式(11), (12)に代入するとき、 $0^\circ \sim 90^\circ$ の範囲に

図1 球面三角形

限ることとし、 $|\cot\{(L_2-L_1)/2\}|$ を代入する、
COI, COFの符号を表1のように定めなければならない。或は次のようにしてもよい。

$$\begin{aligned} \tan\frac{1}{2}(L_2-L_1) \geq 0 &\dots\dots\dots E \\ > 0 &\dots\dots\dots W \end{aligned}$$

このように定めると (11), (12) 式の左辺 $\tan\{(B-A)/2\}$, $\tan\{(B+A)/2\}$ の正負はそれぞれ $(l_2-l_1)/2$, $(l_2+l_1)/2$ の正負によつて定まる。次に $\arctan$ の計算は角度をその主値 ($-90^\circ \sim 90^\circ$) の範囲に定めている。 $(B-A)/2$ はこの範囲にある。 $180^\circ \geq (B+A)/2 \geq 0^\circ$ であるから、 $\arctan$ が負の値を得たときは 180° を加えなければならない。従つて N, S の判別は次のようになる。

$A \leq 90^\circ$ なら COI = A とし N を付ける。

$A > 90^\circ$ なら COI = $180^\circ - A$, S を付ける。

$B \geq 90^\circ$ なら COF = $180^\circ - B$, N を付ける。

$B < 90^\circ$ なら COF = B とし S を付ける。

4. 距離計算範囲の制限と計算方法の追加

計算に當つて四則演算が、(1) 不定値を得る場合、即ち $0/0, 0 \times \infty, \infty/\infty$, (2) 無限大になる場合 (overflow), (3) 0 で割る場合 (zero-div) を除かねばならない。(1) 式で計算不能になる場合を表2に示す。

表 2 電子計算機で計算不能となる組み合わせ

	I	I'	II	II'	III	III'
I 同名極 $l_2+l_1=\pm 180^\circ$	1		1	1	1	
I' 異名極 $l_2-l_1=\pm 180^\circ$		1'	1'	1'		1'
II 子午線通過 $L_2-L_1=0^\circ$	1	1'	(4)		2	(4)
II' " $L_2-L_1=\pm 180^\circ$	1	1'		(4')	(4')	2'
III $l_2-l_1=0^\circ$	1		2	(4')	(5)	3
III' $l_2+l_1=0^\circ$		1'	(4)	2'	3	(5', 6)

先づ、二つの条件の成立によつて距離 Dist, 方位 A_z が容易に求められる場合を除く。

(1) $|l_1|=90^\circ$, $|l_2|=90^\circ$

(1) 二点は同一点 (Dist=0, A_z : 不定) であるか

(1)' 互に対蹠点 (Dist= 180° , A_z : 不定) である。

(2) $l_2-l_1=0^\circ$, $L_2-L_1=0^\circ$ 同一点

(2') $l_2+l_1=0^\circ$, $L_2-L_1=\pm 180^\circ$ 対蹠点

(3) $l_1=0$, $l_2=0$ 二点は赤道にある。

Dist = $|L_2-L_1| \leq 180^\circ$ 又は Dist = $360^\circ - |L_2-L_1| \leq 180^\circ$

$L_2-L_1 > 0^\circ$ A_z : E $L_2-L_1 < 0^\circ$ A_z : E

$L_2-L_1 < 0^\circ$ A_z : W $L_2-L_1 > 0^\circ$ A_z : W

$L_2-L_1=0^\circ$ A_z : 不定 $L_2-L_1=0^\circ$ A_z : 不定

残された組み合わせのうち、天測の Meri. Pass. は重要である。

(4) $L_2-L_1=0^\circ$ Upper Meridian Passage

$$\text{Dist} = |l_2 - l_1|$$

$$l_2 - l_1 > 0^\circ, A_z : N; l_2 - l_1 < 0^\circ, A_z : S; l_2 - l_1 = 0^\circ, A_z : \text{不定}$$

(4') $L_2 - L_1 = \pm 180^\circ$ Lower Meridian Passage

$$\text{Dist} = 180^\circ - |l_2 + l_1|$$

$$l_2 + l_1 > 0^\circ, A_z : N; l_2 + l_1 < 0^\circ, A_z : S; l_2 + l_1 = 0^\circ, A_z : \text{不定}$$

(5) $l_2 - l_1 = 0^\circ$

c_1 を計算せず, $\text{Dist} = c_2$ とする。理由:

$$B - A = 0^\circ \text{ となり } \tan c_1 / 2 = 0/0 \text{ (不定)}$$

(5') $l_2 + l_1 = 0^\circ$

c_2 を計算せず, $\text{Dist} = C_1$ とする。理由:

$$B + A = 0^\circ \text{ となり } \tan c_2 / 2 = 0/0 \text{ (不定)}$$

次の計算方法は主旨が他と異なる。

(6) $\arctan(x/y)$ の形で与え, $y=0$ ならばその値を 90° とする。理由: (5') で $l_2 + l_1 = 0^\circ$ であるから, $B + A$ を求めるとき zero-div が起る。この規則によつて $B + A = 180^\circ$ を得ることができる。

5. 天測計算に適用するための考察

天測計算を行うのが主たる目的であるからその場合について計算方式を考察してみる。

緯度, 赤緯, 経度は $0.1'$, 時角は 1 秒 ($0.25'$) で与えられるので, 精度は $0.1'$ でよいと考えられる。 $0.1' = 0.29089 \times 10^{-4} \text{ rad} = 1/34377 \text{ rad}$ であり, 考慮の対象となる角度の最大値は $180^\circ = 10800'$ であるから, 有効桁数最大約 6.0 桁であつて, 7 桁で計算を行えば精度は充分と考えられる。

この計算機の overflow は 10^{127} 以上, underflow は 10^{-128} 以下で起きる。正切法則では, 角度計算は半角の加減算しかないので, $0.05'$ が最小で, その $\tan$ 及 $\cot$ は 0.15×10^{-4} 及 6.9×10^4 であるから overflow, underflow 共に起らない。

角度が $0'$, 90° 等のとき, zero-div, overflow 等があり得るが, この生起確率は非常に小さい。天体の地位及船位が全地球面上に一樣に分布しているとき, それらの緯度, 経度が $\pm 0.05'$ 以内で互に重なり合う確率は $(0.29 \times 10^{-4} \text{ rad})^2 / 4\pi \text{ sterad} = 1/(1.5 \times 10^{10})$ である。緯度経度のみが重なり合う確率は $0.1'/10800' \approx 10^{-5}$ である。両者共考慮の対象とならぬ位小さい。たまたま起きたとしても, 船位及天体の地位は時間と共に変るから, 再び重なり合うことはないと考えてよい。

Meri. Pass. は意識的に測定するので確率が大きい。しかし天体の Max 或は Min 高度を測定した時刻は, 船の速度に南北成分がない場合にのみ正確な南中時に一致する。若し南中時の前後 5 分以内の高度を Meri. Pass. の代用とし, 時刻を 1 秒刻みとすれば, 一樣分布として $1/600$ の確率で南中時が起きる。しかしながら, 計算機で解き得るのに特に Meri. Pass. を重視する意味が残っているだろうか。

尚又, 天体が天頂或は対蹠点にあるときは天測の対象となり得ないし, 船位が南北の極にあることも考えられないことに注意しよう。

以上を要約して, 4 節で与えた距離計算範囲の制限と追加計算方法は, 天測を対象とする限り必要ないと結論できよう。

6. プログラムと計算結果

4 節の部分を除いた距離及方位計算を FORTRAN IV (HARP 5020) によつてプログラムし

\$
C
HARP
SHORTEST DISTANCE ON THE
EARTH
DOUBLE PRECISION NAME1,
NAME2
INTEGER YD, XD
DIMENSION ID(4), YD(2), YM(2), IX(2), Y(2),
YR(2), XD(2), XM(2), IX(2), X(2), XR(2),
NAME1(2), NAME2(2)
ID(1) = IHN
ID(2) = IHS
ID(3) = IHE
ID(4) = IHW
1 READ(6, 100) INDEX, (YD(J), YM(J), IX(J),
XD(J), XM(J), IX(J), NAME1(J), NAME2(J),
J=1, 2)
FORMAT (I5, 2(I5, F5.0, IX, A1, 3X), 2(A10),
/5X, 2(I5, F5.0, IX, A1, 3X), 2(A10) /)
IF(INDEX.EQ. 0) STOP
MIS=0
DO 10 J=1, 2
Y(J) = FLOAT(YD(J)*60) + YM(J)
IF(Y(J).EQ. ID(1)) GO TO 5
IF(X(J).EQ. ID(2)) GO TO 6
MIS=1
Y(J) = -Y(J)
YR(J) = Y(J)*6.283185/21600.0
X(J) = FLOAT(XD(J)*60) + XM(J)
IF(X(J).EQ. ID(3)) GO TO 7
IF(X(J).EQ. ID(4)) GO TO 8
MIS=MIS+2
X(J) = -X(J)
XR(J) = X(J)*6.283185/21600.0
IF(MIS.NE. 0) GO TO 30
10 CONTINUE
YHD = (YR(2) - YR(1))/2.0
YHS = (YR(2) + YR(1))/2.0
XHD = (XR(2) - XR(1))/2.0
ABSXHD = ABS(XHD)
IF(ABSXHD.GT. 1.570796) GO TO 12
IF(XHD.GE. 0.0) GO TO 13
GO TO 14

表 3

12 IF(XHD.GE. 0.0) GO TO 14
13 IAX=ID(3)
DO TO 15
14 IAX=ID(4)
15 CONTINUE
HDA = ATAN(SIN(YHD))/COS(YHS)/ABS
(TAN(XHD))
HSA = ATAN(COS(YHD))/SIN(YHS)/ABS
(TAN(XHD))
IF(HSA.LT. 0.0) GO TO 11
POSHA = HSA
GO TO 16
11 POSHA = 3.141593 + HSA
16 CONTINUE
AIR = POSHA - HDA
AID = AIR*360.0/6.283185
IF(AID.GT. 90.0) GO TO 17
IAYI = ID(1)
GO TO 18
17 IAYI = ID(2)
AID = 180.0 - AID
18 CONTINUE
AFR = POSHA + HDA
AFD = AFR*360.0/6.283185
IF(AFD.GT. 90.0) GO TO 19
IAYF = ID(2)
GO TO 20
19 IAYF = ID(1)
AFD = 180.0 - AFD
20 CONTINUE
HAD1 = ATAN(SIN(POSHA)*TAN(YHD)
/SIN(HDA))
HAD2 = ATAN(COS(POSHA)/TAN(YHS)
/COS(HDA))
DMI = HAD1*43200.0/6.283185
DM2 = HAD2*43200.0/6.283185
DHAD = DMI - DM2
IF(ABS(DHAD).LT. 0.05) GO TO 30
MIS=4
WRITE(6, 200) INDEX, (YD(J), YM(J), IX(J),
XD(J), XM(J), IX(J), NAME1(J), NAME2(J),
J=1, 2)
200 FORMAT(1H0, 15, 2(I5, F5.1, IX, A1, 3X),
2(A10))
IF(MIS.EQ. 0) GO TO 35
GO TO (31, 32, 33, 34), MIS
31 WRITE(6, 231) INDEX, J
FORMAT(1H, 15, 12, 15H WRITE N OR S)
GO TO 1
32 WRITE(6, 232) INDEX, J
FORMAT(1H, 15, 12, 13X, 15H WRITE E
OR W)
GO TO 1
33 WRITE(6, 233) INDEX, J
FORMAT(1H, 15, 12, 25H WRITE N OR S
AND E OR W)
GO TO 1
34 WRITE(6, 234) DHAD
FORMAT(1H, 50H COMPUTATION
ERROR OF DISTANCE MAY BE AS
LARGE AS E15.7, 10H MINUTE.)
35 WRITE(6, 210) DMI, DM2, IAYI, AID, IAX
IAYF, AFD, IAX
210 FORMAT(1H, 5X, 12H DISTANCE IS F10.2,
2X, 2HOR, F10.2, 18H NAUTICAL MILES
20H INITIAL COURSE IS, A1, IX, F6.2,
1X, A1, 20H, FINAL COURSE IS, A1, IX,
F6.2, IX, A1, IH)
GO TO 1
END
\$
DATA
1 41 20.0 S 171 5.0 E A-POINT
48 3.0 S 171 15.0 W B-POINT
2 20 9.0 S 57 29.0 E MAURITIUS
5 54.0 N 95 20.0 E SUMATRA
3 45 47.0 S 170 45.0 E NEW ZEALAND
12 4.0 S 77 14.0 W PERU-CALLAO
4 56 50.0 S 70 0.0 W CAPE HORN
34 30.0 N 140 0.0 E NOJIMA-ZAKI
5 35 0.0 N 140 50.0 E NOZIMA-ZAKI
37 50.0 N 122 35.0 W SAN FRANCISCO
33 48.0 S 151 44.0 E SYDNEY KOGAI
6 32.0 N 79 36.0 W PANAMA.KO

た結果を表3に示す。最後の DATA は岩永・樽美著天文航法（下巻）の計算例である。これを計算した結果を表4に示す。

表 4

答（米村表による計算値）				計算機の答			
No.	Distance	COI	COF	Distance		COI	COF
1	851.7			851.74	851.75	S 55.82E	S 68.31E
2	2,724.8	N 59.0E	N 54.0E	2,724.96	2,724.99	N 58.98E	N 53.98E
3	5,764.5	S 65.7E	N 40.6E	5,764.48	4,764.48	S 65.74E	N 40.55E
4	8,990.1	S 55.1W	N 33.0W	8,990.12	8,990.12	S 55.09W	N 32.98W
5	4,432.8	N 54.8E	S 57.9E	4,432.84	4,432.84	N 54.76E	S 57.89E
6	7,523.3	S 72.1E	N 52.7E	7,523.30	7,523.30	S 72.09E	N 52.74E

計算時間は1組につき0.2秒であつた。専用の計算機を設計するなら、1分程度でよいから小型で安価であることが望ましい。

計算によつて生ずる誤差の見積りは計算機内部の関数の近似計算とも関連するので、後に改めて報告したい。又、4節で示した計算不能部分を補つたプログラム及ここで発表したプログラムを東大大型計算センターのライブラリーに登録する予定である。

天文航法を計算機化するには、このあと高度改正と最小自乗法による船位決定及天測暦データの近似計算が必要となる。

この計算及プログラムチェックは東大大型計算センターの計算機によつて行いました。

参 考 文 献

森口繁一：FORTRAN IV入門（東大出版会，昭40年）

岩永，樽美：天文航法（下巻）（成山堂，昭38年）

附 記

表3のプログラム及計算結果は写真製版する予定であつたが、編集の都合で活字となつたため、1行の長さがプログラムシートの長さに一致していない。その為、continuation mark が落ち、途中の空白が無くなつたりしているので、このプログラムを利用する方は注意して欲しい。

尚，DATA のうち N, E 等を除いた場合，計算を実行せずエラーメッセージが出る例も取り除いた。