位置の論理

杉崎 昭 生*

The Logic of Position

Akio M. Sugisaki

Abstract

The writer showed what is the position, the meaning of position, the structure of position and the content of the theory of position including the position-finding and the error of position, using his proposal term "element of position" that contains the lines of position and is obtained by observing references and abstracting the characteristic from the observations.

1. 序

位置という言葉はすでに日常用語として理解されているが、社会のなかでの位置がきわめて広範囲に使用されていることを見れば、ある程度やむをえないものだろう。航法のなかで位置は行動の判断基準の一つとしての役割を占めており、一時は航法の中心的でかつ支配的な立場であったこともある。そこで位置とはいったい何なのかを示し、位置づけの意味を明らかにし、位置を求めることの何たるかを体系的に示して見ることとする。これによつて在来から数多くの人たちによつて研究されてきた位置を求めるための観測、位置の線、位置の誤差などの位置づけをはつきりできるであろう。

2. 位置の論理

位置とは一般には物理的な物質によつて占められる空間内の点または領域をいい、主観的にはあるものが他に対する場所を表わしている。これを表現するのに通常では座標系を用いるが、この座標系はその位置を把握しようとするものにとつてよければ、いかなるものであつても構わない。

位置は上述のように物理空間のみについて用いるのではなく、意識空間などについても同様に用いられるが、すべて以下に述べる距離空間のものに変換可能であるとし、距離空間についての位置について見ることとする。なおここでいう変換は一種の写像と考えることもできる。

n 次元 Euclid 空間を R^n とし、位置を表わす点 p を、

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n), (p_1, \dots, p_n \in R^n) \dots\dots\dots (1)$$

とする。このように定義された点の集合 P はその要素 p 間の距離 d とによつて定まる空間 (P, d)

を構成している。この空間は距離空間といわれるもので、

* 東京商船大学（東京都江東区越中島町2の1の6）

$$(R^n, d^n)$$

とも表わされる。ここで d^n は n 次元の要素をもつ距離を表わしている。

このような空間にあつて、位置を求めるということは、現実に位置している空間の点 p の集合 P をたとえば人間にわかり易い形で表現された点 q の集合 Q への写像を求めることに他ならない。すなわち f を写像とすれば、

$$f: P \rightarrow Q \dots\dots\dots (2)$$

であり、

$$q = f(p) \dots\dots\dots (3)$$

となる。つまり q によつて人間に把握されるのである。また f は通常では観測によつて得られる情報の処理などを意味していると考えればよい。

一方、位置をできるだけ人間にわかり易いものとするため、ある基準を想定して、そこからの距離などを利用しているのが一般である。

写像 f について調べて見ると、単射であることが望ましいが、必ずしも現実にそうではない。

しかし少なくとも全射であることが位置をはつきりさせるための必要条件であることは間違いない、というより全射にさせなければならないだろう。写像 f が単射でないために誤差が問題となる（単射であつても誤差の入りこむ余地はある）。この写像 f を用いたときの位置の関係を示したのが図1である。さらに実在 E からの写像 f_0 を考えれば、

図 1

$$f_0: E \rightarrow P \dots\dots\dots (4)$$

となり、ここでは原則的に単射となつている。 f , f_0 はたとえ単射であつても誤差となりうるのは、 f および f_0 が正しい写像ではないこと、つまり関数として見れば 1 価の関数形ではあるが、関数形そのものに問題があることは当然ありうることである。

以上一般的な位置について述べたが、現実に位置を求めることについても言及しよう。まず現在の位置を求める方法は位置の点方式ではなく、位置の線方式であることにポイントを合せて見るとき、つぎのようになる。

位置の線は位置を含むある条件を満たした点 l の集合 L として定義できる。したがつて厳密に言えば、集合 L のなかには、位置に対応する要素（点） l が一つあればよい。逆に複数個を含むときはあいまいさをもたらす、一義的に位置が定まらないことすらありうる。この集合 L を位置の n 次元の線にまで拡張したものを位置素ということにする。位置素は別の集合 K_n の要素 k_n の演算によつて集られた集合 K の集合 P への写像 g として見られ、

$$L = g(K) \dots\dots\dots (5)$$

として表わされる。ここで集合 K は集合 $K_1, \dots, K_n$ のうちの必要なもののそれぞれの要素間に演算子を作用させた結果できたものを要素とする集合である。

位置はこのようにして求められた集合 L の複数個によつて定義される。つまり n 個の要素によつて位置が定義されているときは n' 個の位置素（集合 $L_{n'}$ ）があるとき、一つの位置がきめられるのが普通で、位置 p は各位置素の要素 $l_{n'n}$ の積によつて求められる。すなわち、

$$p = f(p'(\bigcap_n l_{1n}, \dots, \bigcap_n l_{n'n})) \dots\dots\dots (6)$$

で表わされる。ここで p' は位置素によつてきまる位置でかならずしも物理的にきまる位置の写

像そのものではない。ここで p' の要素で論理積がとれないときは位置が定まらないことを意味している。同様に n より小さな値である m 個しか位置素がなければ、そこで定まる位置は $(n - m)$ 次元体でしか定まらない。つまり一般には定まってしまう、さきの論理積のとれない場合と同様に実効的には扱うべきものとなる。^{*}

すでにちよつと触れたが、ここで精度の問題について考えて見る。精度の問題を大別して一つは集合そのものによるものであり、他は写像によるものとなる。まず問題とすべきは p で表現できる位置は点ではなく、大きさつまり点 p の集合 P' で与えられていることからくる。つまり P' は P の部分集合で、その f 写像は当然 f そのものが単射であつても、広がりをもつてき、 Q の部分集合 Q' が位置として正確には把握されるべきである。しかし位置素から求まるものは通常点となるもので、 Q' のうちのいずれであるかがわからない。これを1点とするところに問題はでてくる。

位置素の写像 g の精度および複数の写像の精度のばらつき、 L 相互間の関係などが上述の問題にも関係して考慮しなければならない。

別の問題は集合 Q がかならずしも正しいものでないことである。この例としては、地球を球として扱うこと、海図上の歪みをそのまま利用することなどがあげられる。

精度の問題に結局のところ総合的に考慮しなければならないものなので、実在と q との差が誤差ということになるだろう。

ここで位置とは直接関係はないが、位置づけということを考察して見る。位置づけはある基準となる位置 q_0 から求められた位置 q までの距離(測度)を知り、距離順に並べることをいう。

3. 具 体 例

位置の論理のなかで述べたものの具体例を若干ここで示してみる。まず位置素であるがレーダは二つの位置素をもっている。一つは方位であり、他に距離であるが、前者は平面という集合の二つの積集合によつて定義されたものであり、後者は距離が一定という条件によつて規定された集合として定義されるもので、レーダによる位置決定はこれらのものの積集合によつて与えられる。

同様に考えれば、双曲線位置の線や等方位曲線なども集合として扱えることがわかる。通常航海では位置素として、位置の線を用いているが、厳密には位置の面と考えた方が妥当であろう。

4. 結 論 と 結 び

位置が明らかになつて、はじめて精度の高い行動がとれるのであるが、その位置について在来は、方法論的なものにのみ注意が向けられてきたと考える。そこで位置を本質的に見ることによつて、いままで行なわれてきたことの位置づけをはつきりさせたいと考え、上記試論をまとめてみた。そこではつきりしたことは、位置を直接認識することはむずかしく、間接的な手段や方法によつて把握されることが容易であることをまずあげられる。それに合せて位置素の定義をしたが、この位置素の抽出にともなつて誤差の問題がでてき、根本的には位置そのものに大きさがあつたりするためによるもの、写像の精度(方法に依存することが大きい)によるもの、写像の対

^{*} 一般に位置は広がり(n 次元体)をもっており、点として表現するものとしての位置と区別するために、 n 次元体(たとえば平面とか、球面体など)によつて表現できる位置を拡大された位置という。つまり観測すれば拡大された位置がえられるが、別の表現をすればあいまいさがあるともいっている。

象集合によるものがあげられ、これらがいわゆる誤差論の対象であることもわかってきた。なお最初の大きさ（集合としての扱いをしなければならないもの）による場合は誤差というより対応のとれないことといった方が妥当と思われるものといえる。確率的な扱いには集合の稠密性によつて十分説明でき、確率が1であるということは唯一の集積点であることを示していることも明らかである。

上記試論がこの方面にいささかなりとも寄与できれば幸いである。

参考文献

現代数学概説Ⅰ，弥永品吉，小平邦彦，岩波書店

現代数学概説Ⅱ，河田敬義，三村征雄，岩波書店

他