料の幾何學的軸の方位が決定された譯であるが、猶通常第3の $[100]$ 軸に對する角 γ も求め得られるから、これ

Fig. 3 Illustration of the procedure in the method of light figures.

に依つて方向決定を check 乃至補正することが出来る。これ等の角度に依つてステレオ投影網 (stereographic net) の上に試料の結晶方向を表はす點を描記すれば相互の比較に便利である。尙、 (110) 或ひは (111) 面の光像を用ひて、即ち $[110]$ 或ひは $[111]$ 軸に對して、結晶方向を決定した場合には、これをステレオ投影網の上で $[100]$ 軸に對する場合に變換す

Table 2. Examples of the determination of the crystal orientation with the method of light figures.

Crystal specimen		α	β	γ	Σ
(A) Nickel, No. 3. $[100]$.	1.	89.5°	89.0°	—	—
	2	89.2	89.4	—	—
	3	89.6	89.2	—	—
	Mean	89.4	89.2	—	—
(B) Nickel, No. 20. $[110]$.	1	80.2°	50.2°	—	—
	2	80.0	50.4	—	—
	3	80.2	50.6	—	—
	Mean	80.1	50.4	—	—
(C) Iron, No. 116. $[110]$.	1	83.2°	47.0°	43.3°	1.009
	2	83.2	47.4	43.8	0.993
	Mean	83.2	47.2	43.6	1.000
(D) Iron, No. 136. $[111]$.	1	57.6°	57.2°	51.2°	0.973
	2	57.5	57.0	50.2	0.995
	Mean	57.6	57.1	50.6	0.986

(16) ステレオ投影法に就ては本誌の本號に所載の著者の講義を見られたい。

ることは容易である。(16)

(D) 光像法に依る結晶方向決定の實例とその正確度

上述の手續きに依つて結晶方向を決定した實例を Table 2 に示した。表中の Σ は $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$ を表はすが、これは 1 に等しかるべきものであるから、それよりの偏倚の程度がその方向決定の正確度を示すことになる。又、 α , β , 及び γ の値は毎回結晶試料をチェックに付け直して測定したものである。これ等の例より、光像の方法に依る結晶方向の決定は十分 1°

Fig. 4 Stereographic representation of the examples, tabulated in Table 2.

以内の正確度を以て行ひ得ることが諒解されるであらう。尙、Table 2 に掲げた實例を stereographic triangle の上に描記すれば Fig. 4 に示す如くである。

總 括

結晶方向を決定する爲の光學的諸方法に就て系統的に敘述した後、著者が發展させつゝあるところの「光像の方法」に就て、その原理、裝置、適當な腐蝕法、結晶方向を決定する手續き、及び正確度を詳細に説明した。光像に依る方法は簡單且つ迅速であつて然も 1° 以内の正確度をもち、現在ニッケル、銅、鐵及びアルミニウムの單結晶に應用されて満足な結果を與へて居るが、更に如何なる金屬及び合金の單結晶にも應用され得る可能性をもつ。

擲筆するに當り、著者は本多光太郎先生の懇篤な御指導に感謝し、又研究費用の一部を提供された齋藤報恩會に對して深謝する次第である。

合金系液相の静電氣的識別法*

平 田 秀 樹**

Hideki Hirata: The Electro-static Method of Discriminating the Liquid Phase of Alloys. It has long been known from the experimental results obtained by former investigators that the water drops falling down from an orifice undergo a periodic deformation, together with the fact that the amalgamation or the separation of these drops would take place by their electrification. Especially, with regard to the aforesaid deformation of the drops, the functional relation of its frequency ν to the surface tension T and to the volume V ($=\frac{4}{3}\pi a_0^3$) of each drop, was theoretically deduced by Lord Rayleigh and others.

** 京都帝國大學化學研究所

* 本研究は昭和 15 年 10 月 14 日京都に於て開催せられた日本金屬學會秋期大會で發表したものである。

By way of collating and expatiating the results of these previous investigations, the present writer performed a calculation to find the influence of a definite amount of the electric charge E carried by each drop of a given liquid upon the periodic deformation. As the consequence of this calculation, it became clear, in the first place, that the frequency of the periodic deformation executed by each drop, decreases at the rate of $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{E^2}{32\pi a_0^3 T}$ due to the electrification, when the amount of the electric charge E is comparatively small. In such a stage of the electrification, the drops were inferred to have the more remarkable tendency to amalgamate with each other by the collision, the more they are electrified. But, it was also found, in the second place, that these drops usually tend to separate again more minutely than before, through the electrification increasing so large without giving rise to any electric discharge, as to be expressed by $E^2 \geq 17.7 a_0^3 T$. Moreover, the equilibrium of continuing the periodic deformation is confirmed to be completely violated, when the electric charge E increases to an amount satisfying the condition $E^2 \geq 50.3 a_0^3 T$. Consequently, the permanent deformation or the separation of each drop should be inevitable, in the extreme case lastly mentioned.

The considerations above given, enables us to examine the surface tensions of various liquids, least of all, of the melts of metals, by electrifying their drops. Accordingly, we may construct an arrangement following to these considerations, which will be available to the discrimination of the liquid phase of several alloys.

(Received January 24, 1941)

序 論

合金の融液に關し、我が本多教授等⁽¹⁾によつてその磁氣的性質が驗べられて以來、今日迄に行はれたこの X 線査察⁽²⁾及びその他の實驗結果⁽³⁾から推すと、或る種の金屬間化合物は融液内に於ても安定であると考へられる。従て、現在單一相として取扱はれて居る金屬——殊に合金——の液相はおそらく固相と同様に幾つかの相より成り得るものと想像せられぬでもない。而して、この問題の究明は今後の金相學上に殘された最も重要な研究題目の一つではあるまいかと思はれる。然るに從來の金相學上の研究には、金屬並に合金の固相のみを對象とする種々なる方法が案出せられたに係らず、液相に就てはこれに適用すべき装置すら松山、⁽⁴⁾Sauerwald、⁽⁵⁾Portevin⁽⁶⁾等⁽⁷⁾の諸氏によつて考案せられたもの數種を擧げ得るに過ぎぬ。これ、金屬の融液のみならず、一般に液體の物理學的性質を精密に測定する方法が、永い間殆ど改良せられずに今日に及んだ結果と思惟せられる。例へば、液體の重要な性質の一つである表面張力を測定するに當つても、現在迄汎く行はれて來た様な機械的な方法によつては、金屬融液の如き高温度の物質に就

て信頼すべき數量的結果を得ることが極めて困難と謂はねばならぬ。

斯る理由により、筆者は先づこの表面張力測定法の改良を企圖したのであつた。而して漸く靜電氣的にこれを驗べる方法を發見したので、未だ實驗はして居らぬが、その原理の概略を次に述べよう。

I. 落下する滴の振動

空中を落下する水滴が一種の振動をなしつゝ落ちて來ると云ふ事實は昔から注意せられて居た現象である。Lenard、⁽⁸⁾Lord Rayleigh⁽⁹⁾及びその他の人々⁽¹⁰⁾が落下する水滴を電光で照射し、寫眞に撮つたり、廻轉鏡に映したりして查べた結果、この形狀は Fig. 1 に示す如く、鉛直な方向を軸とした廻轉體であつて、その振動は橢圓體振動(Ellipsoidal Vibration)を主振動(Principal Vibration)とし、これに多くの小さな分振動(Partial Vibration)の重合したものであることが發見せられ、⁽¹¹⁾これに對する理論的説明も亦與へられた。⁽⁸⁾⁽⁹⁾尙、Lord

- (1) K. Honda, Ann. Physik., **23** (1910), 1027; 遠藤彦造, 磯部滿武, 金屬の研究, **3** (1926), 505.
- (2) e. g., K. Banerjee, Indian J. Phys., **3** (1929), 399.
- (3) e. g., H. E. Ives, J. Franklin Inst., **201** (1926), 47.
- (4) 松山芳治, 金屬の研究, **3** (1926), 45; Science Rep., Tohoku Imp. Univ., **16** (1927), 555.
- (5) F. Sauerwald, G. Drath, Z. anorg. allg. Chem., **154** (1926), 79; **162** (1927), 301; K. Bornemann, F. Sauerwald, Z. Metallk., **14** (1922), 145; E. Widawski, F. Sauerwald, Z. anorg. allg. Chem., **192** (1930), 145.
- (6) A. Portevin, P. Bastien, Compt. rend., **194** (1932), 599.
- (7) e. g., T. R. Hogness, J. Amer. Chem. Soc., **43** (1921), 1621; S. W. Smith, J. Inst. Metals, **12** (1914), 168.

- (8) P. Lenard, Wied. Ann., **30** (1887), 209.
- (9) Lord Rayleigh, Scientific Papers, **1** (1899), 377; Proc. Roy. Soc., (London), A, **29** (1879), 71.
- (10) e. g. F. Savart, Ann. de Chim. et Phys., **53** (1833), 337; H. G. Magnus, Pogg. Ann., **95** (1855), 1; **106** (1859), 1; G. H. Quincke, Pogg. Ann., **105** (1858), 1; **134** (1868), 156; **135** (1868), 621; **137** (1869), 141; **139** (1870), 1; **160** (1877), 337 & 560; Wied. Ann., **2** (1877), 145.
- (11) 例へば、Lenard が載り口の圓形で先端の尖つた硝子管を鉛直に立て、この細くなつた口から水及びその他種々なる液體を滴下して實驗した結果によると、滴の振動は橢圓體振動を主振動とし、これに多くの短週期の分振動の附隨したものであるが、長く空中を通過すれば(水の場合約 85cm) 全く純粹な橢圓體振動のみとなる事が報告せられて居る。尙 Lenard は雨滴を電光で夜撮影して居るが、この場合も滴は大體橢圓體振動をなし、これに 7 次の分振動を伴つた様な形狀のものであつた。

Rayleigh は貯水器から噴出する水滴が荷電を帯びると、荷電量の小なる場合には併合し、これの大なる場合には更に分裂することも實驗的に確めて居る。⁽¹²⁾

Fig. 2

先づ何故斯様な水滴の振動が起るか云ふに、滴が荷電を帯びない場合に就ては一考へても判る通り、水に限らず一般に液體が表面張力に因り、その同一容積に對して出來得る限り小さい表面積を有たうとする傾向のあるためと解される。即ち、始め長軸廻轉橢圓體 (Prolate Spheroid) に近い形をした滴も表面張力のため次第に球形に近付き、それに連れて表面張力による位置のエネルギーは次第に滴の振動による運動のエネルギーに變化してゆくことになる。斯くして離心率 (Eccentricity) が次第に減少し、遂に球形となれば、その表面積は最小、從て位置のエネルギーは極小であると考へられるが、Fig. 2 の矢で示した方向に慣性により表面が運動する運動のエネルギーは極大となるべきであらう。その結果、一旦球形となつた滴は表面張力に逆つて扁平廻轉橢圓體 (Oblate Spheroid) に近いものとなり、次第にその離心率——從て表面積——を増すことになるから、運動のエネルギーが次第に位置のエネルギーに變化し、表面の運動は再び緩慢となつて、遂に静止状態に達する瞬間がなければならぬ。斯る瞬間に於ては、表面積が極小、從て位置のエネルギーは極大、運動のエネルギーは極小となつて居る。而して、この状態から後は前の長軸廻轉橢圓體の場合と同様に變化して、離心率が減少を始め、位置のエネルギーが運動のエネルギーに變化しつゝ

Fig. 1

再び球形となり、更に運動のエネルギーが位置のエネルギーに變化しつゝ元の長軸廻轉橢圓體に復して一週期の振動を終へ、再び前と同じ變化を繰り返すべきであらう。なほ、液體が水その他粘性 (Viscosity) の特に大なるものに非ざる限り、上記の滴の振動はエネルギーの總量の増減を伴はず、從て一種の自由振動と見做して差支へない。⁽¹³⁾ それ故、滴の運動のエネルギーと位置のエネルギーとの間には、恰も振子運動に於て見るが如き交換状態が繼續せられ、曩に述べた様な振動が認められるものと解せられる。⁽¹⁴⁾

次に荷電の影響に就て考察して見るに、若し滴が例へば雨滴の様に荷電を帯びて居る場合には、その荷電が滴の表面に集まつて反撥し合ふことは明かである。從て、滴の振動及びその他の状態も前記の場合と幾分異つて來ることだけは思考出来る。併し乍ら、この問題に對する嚴密な結論を得るには、更に次に述べるが如き數量的な査檢を必要とする。

II. 滴の週期的振動を攪亂するに必要な荷電量

滴の表面上の任意の一點 P に中心 O から引いた徑線 (Radius Vector) r は、若し滴が Lord Rayleigh や Lenard の觀測した様なものとすれば、その緯度角 (Colatitude) θ 及び計つた瞬間の時間 t の函數である故に [Fig. 3 参照]

Lord Rayleigh 等の行つたのと同様に (1) 式で表さるべき筈である。

$$r_{\theta} = \alpha_0 + \alpha_1 P_1(\mu) + \alpha_2 P_2(\mu) + \dots + \alpha_n P_n(\mu) \quad (1)$$

茲に $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ は t のみの函數で、 α_1 以下は α_0 に比べて非常に小さな振幅に對應する。又 $P_1, P_2, \dots, P_n$ は Legendre の函數であつて、 $\mu = \cos \theta$

Fig. 3

である。

上式 (1) から、嘗て Lord Rayleigh が滴に荷電のない場合に適用したのと殆ど同じ計算法により、 t なる瞬間に 1 個の滴の有する位置のエネルギー P 及び運動のエネルギー K はそれぞれ次の (5) 及び (7) 式によつて表すことが出来る。

(13) この場合、液體の粘性によるエネルギーの減少は外氣の抵抗に起因する滴の離心率の増加と互に相殺し合ふものと假定して、度外視出来る。

(14) 種々なる形状の噴水孔を有する貯水器から進出する水柱は落下するに従ひその截り口を週期的に變化せしむるものであるが、この際に於ける振動の節 (Node) と節との間の距離は液體の性質——從つて表面張力——によつて異なる事が、Lord Rayleigh (Loc cit.) によつて實驗的に發見せられて居る。斯る事實から推しても上記の見解は先づ正しいものと思はれる。

(12) Lord Rayleigh, Scientific, Papers, 1 (1899), 372; Proc. Roy. Soc. (London), A, 28 (1879), 406.

$$P = P_s + P_e = 4\pi a_0^2 T + 2\pi T \sum (n-1)(n+2)(2n+1)^{-1} \alpha_n^2 + P_e \quad (5)^{(15)}$$

$$K = 2\pi \rho a_0^3 \sum (2n+1)^{-1} n^{-1} (d\alpha_n/dt)^2 \quad (7)^{(16)}$$

茲に、 T は液體の表面張力、 ρ はその比重、 a_0 は滴と等しい體積 $V (= \frac{4}{3} \pi a_0^3)$ なる球の半径をそれぞれ表す。更に、 P_s 及び P_e はそれぞれ表面張力及び滴の帯びた荷電量 E に因る位置のエネルギーであつて、就中 P_e は滴の電圧及び電気容量をそれぞれ $\mathfrak{B}$ 及び $\mathfrak{C}$ とすれば、次の關係 (8) を満足すべきものと解される。

$$P_e = \int \mathfrak{B} dE = \int \frac{E}{\mathfrak{C}} dE = \frac{1}{2} \frac{E^2}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{2} \mathfrak{C} E^2 \quad (8)$$

然るに、Lenard 等の實驗結果によれば、滴の振動は或る時間経過すれば純然たる橢圓體振動となるべきであるから、⁽¹¹⁾ $n=2$ の場合を考へればよい。それ故、位置及び運動のエネルギーはそれぞれ次の (5a) 及び (7a) 式によつて與へられることになる。

$$P = \frac{8\pi}{5} T \alpha_2^2 + P_e \quad (5a)$$

$$K = \frac{\pi}{5} \rho a_0^3 (d\alpha_2/dt)^2 \quad (7a)$$

更に (5a) 式の P_e 近似値として、(1) 式によつて表された表面を有する廻轉體とその體積が等しく、且つその廻

(15) (1) なる表面内に包含せられた容積、即ち滴の體積を V とすれば、

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_{-1}^{+1} r_{10}^3 d\mu = \frac{4}{3} \pi a_0^3 [1 + 3 \sum (2n+1)^{-1} \frac{\alpha_n^2}{a_0^2}]$$

となる。又 a_0 を滴と等しい體積の球の半径とすれば、

$$V = \frac{4}{3} \pi a_0^3$$

である。

$$\therefore a_0^3 = a_0^3 [1 + 3 \sum (2n+1)^{-1} \frac{\alpha_n^2}{a_0^2}] \quad (2)$$

更に、 t なる瞬間に於ける表面積 S_t は次の (3) 式によつて表される。

$$\begin{aligned} S_t &= 2\pi \int r_{10} \sin \theta \sqrt{r_{10}^2 + \left(\frac{dr_{10}}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ &= 2\pi \int \left\{ r_{10}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dr_{10}}{d\theta}\right)^2 \right\} \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (3)$$

然るに、一般に

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} (1-\mu^2) \frac{dP_m(\mu)}{d\mu} \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} d\mu &= n(n+1) \\ \int_{-1}^{+1} P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu & \end{aligned}$$

なる關係が成立する。この關係を上式 (3) の第二項に代入して計算すれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \left(\frac{dr_{10}}{d\theta}\right)^2 \sin \theta d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (1-\mu^2) \sum \alpha_n^2 \\ &\quad \left(\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}\right)^2 d\mu \end{aligned}$$

轉軸と他の主軸との長さの比も等しい完全な廻轉橢圓體の一定量の荷電 E による位置のエネルギーの値を求めて見る。然るときは、上記の廻轉橢圓體が長軸なるか將を扁平なるかに従ひ、その離心率 e_1 は廻轉軸の長さ a 及びこの軸に垂直な他の主軸の長さ b によつてそれぞれ次式 (9) の如く表され、

$$\left. \begin{aligned} e_1^2 &= \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad a > b, \quad \text{即ち長軸廻轉橢圓體なる場合} \\ e_1^2 &= \frac{b^2 - a^2}{b^2}; \quad a < b, \quad \text{即ち扁平廻轉橢圓體なる場合} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

更に體積 V は

$$V = \frac{4}{3} \pi a_0^3 = \frac{4}{3} \pi a b^2 \quad (10)$$

となる。従つて、次の關係が成立せねばならぬ。

$$\left. \begin{aligned} a &= \left\{ \frac{3V}{4\pi(1-e_1^2)} \right\}^{\frac{1}{3}} = \frac{a_0}{(1-e_1^2)^{\frac{1}{6}}} \\ b &= \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} (1-e_1^2)^{\frac{1}{6}} = a_0 (1-e_1^2)^{\frac{1}{6}}; \quad a > b \\ a &= \left\{ \frac{3V(1-e_1^2)}{4\pi} \right\}^{\frac{1}{3}} = a_0 (1-e_1^2)^{\frac{1}{6}} \\ b &= \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} (1-e_1^2)^{-\frac{1}{6}} = \frac{a_0}{(1-e_1^2)^{\frac{1}{6}}}; \quad a < b \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

上式 (11) 及び裏に與へた (8) 式から、この場合の P_e の値として次の (8a) 式が導かれる。

$$= \frac{1}{2} \sum n(n+1) \alpha_n^2 \int_{-1}^{+1} P_n(\mu) d\mu \quad \text{となる。又、第一}$$

$$\text{項に就ては、} \int_{-1}^{+1} r_{10}^2 d\mu = 2a_0^2 + 2 \sum (2n+1)^{-1} \alpha_n^2$$

が得られる。それ故、 $S_t = 4\pi a_0^2 + 2\pi \sum (2n+1)^{-1} (n^2 + n + 2) \alpha_n^2$ となる。然るに、(2) 式より $a_0^2 = a_0^2 - 2 \sum (2n+1)^{-1} \alpha_n^2$

なる關係が導かれ、この關係を上の S_t を表す式に代入すれば、

$$S_t = 4\pi a_0^2 + 2\pi \sum (n-1)(n+2)(2n+1)^{-1} \alpha_n^2 \quad (4)$$

が得られる。従つて、上式 (4) から直ちに本文の (5) 式を導く事が出来る。

(16) ϕ を速度ポテンシヤル (Velocity Potential) とする。

$$\phi = \beta_0 + \beta_1 r_{10} P_1(\mu) + \dots + \beta_n r_{10}^n P_n(\mu) \quad (6)$$

今、液の比重を ρ とすれば、運動のエネルギー K は

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \iint \phi \frac{d\phi}{dr_{10}} dS_t \\ &= 2\pi \rho a_0^3 \sum (2n+1)^{-1} n a_0^{2n-1} \beta_n^2 \end{aligned}$$

によつて表す事が出来る。然るに、(1) 及び (6) 式に於ける $d\phi/dr_{10}$ の値を比較すれば、

$$n a_0^{n-1} \beta_n = d\alpha_n/dt$$

なる關係が得られる。而して、この關係を上の運動のエネルギーを表す式に代入すれば、本文の (7) 式となる。

$$\left. \begin{aligned}
 P_e &= \frac{E^2}{4a_0} (1-e_1^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\log\left(\frac{1+e_1}{1-e_1}\right)}{e_1} \\
 &= \frac{E^2}{2a_0} (1-e_1^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_1^{2n}}{2n+1} \quad a > b \\
 P_e &= \frac{E^2}{2a_0} (1-e_1^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin e_1}{e_1} \\
 &= \frac{E^2}{2a_0} (1-e_1^2)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1, 3, \dots, 2n-1}{2, 4, \dots, 2n} \right. \\
 &\quad \left. \frac{e_1^{2n}}{2n+1} + 1 \right) \quad a < b
 \end{aligned} \right\} (8a)^{(17)}$$

然るに、(1) 式により

$$Ca = r_{10} \div \alpha_0 + \alpha_2 P_2(1) = \alpha_0 + \alpha_2$$

$$Cb = n \frac{2}{\pi} \div \alpha_0 + \alpha_2 P_2(0) = \alpha_0 - \frac{1}{2} \alpha_2$$

茲に C は恒数：

である。この関係を (8a) 式に代入すると、滴が長軸廻轉楕圓體となると扁平廻轉楕圓體なるとに關せず、 P_e は次の (8b) 式の様に表すことが出来る。

$$P_e \div \frac{E^2}{2a_0} \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{5a_0^2} \right) \quad (8b)$$

そこで、(5a)、(7a) 及び (8a) 式によつて與へられたエネルギーの値を、 α_2 に關する Lagrange の運動方程式、即ち

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\alpha}_2} \right) + \frac{\partial P}{\partial \alpha_2} = 0 \quad (15)$$

に代入すれば、この方程式 (15) は次の様になる。

$$2\pi\rho a_0^3 \frac{d^2 \alpha_2}{dt^2} + 16\pi T \alpha_2 - E^2 \frac{\alpha_2}{a_0^3} = 0 \quad (16)$$

今、 $\alpha_2 = \text{Const.} \cos(pt + \epsilon)$ と置く、然るときは、(16) 式を次の (15) 式の様に表すことが出来る。

$$16\pi a_0^3 T - E^2 - 2\pi\rho a_0^6 p^2 = 0 \quad (17)$$

上式 (17) に於て τ を振動の週期とすれば、 $p \equiv \frac{2\pi}{\tau}$ で

あるから

$$(16\pi a_0^3 T - E^2) \tau^2 - 8\pi^3 \rho a_0^6 = 0 \quad (18)$$

なる關係が得られる。

(17) 今、滴の電氣容量 $\mathcal{C}$ を楕圓體坐標系によつて表せば、

$$\mathcal{C} = \frac{2}{\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta\lambda}} \quad (12)$$

となる。茲に $\Delta\lambda = \sqrt{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)^2}$ である。

上式 (12) の $\mathcal{C}$ の値を (8) 式に代入すると、

$$P_e = \frac{E^2}{2} \frac{1}{\frac{2}{\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta\lambda}}} = \frac{E^2}{4} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda} (b^2 + \lambda)} \quad (13)$$

となり、この (13) 式から (9) 式により、直ちに本文の (8a) 式が導かれる。

この (18) 式から τ の値を算定し、振動数 $\nu \left(= \frac{1}{\tau} \right)$ の値を求めると、個々の滴の帯びる荷電量 E の小なる場合は、 ν が E なる荷電の存在に因り $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{E^2}{32\pi a_0^3 T}$ なる

割合丈減少し、従つてその滴の振動はそれ丈緩慢となることが判る。更に (18) 式を見ても明かな様に斯る場合、滴の帯びる荷電の斥力は表面張力と相殺する方向に作用する故、荷電量の増加するに連れて益々二つの滴が衝突した際に Lord Rayleigh の所謂“反跳”(rebound) するのを妨げる理であらう。これ、曩に述べた事實——即ち同じ経路に沿つて斷續滴下する水滴に少量の荷電を與へると、これ等の水滴が相併合して遂に連續した水柱となると云ふ事實——の少くとも主要な原因をなすものと想像せられる。雷雨の際の雨滴が一般に大きい理由も、亦上述の見解から説明出来ぬでもない。

尚、上式 (16) に於ける τ は

$$E^2 \geq 16\pi a_0^3 T = 50.27 a_0^3 T \quad (19)$$

なる條件の成立する場合、虚數値を取る事になる。それ故、(19) 式の成立せぬ間は表面張力の影響が常に荷電のそれに打ち克つため、滴は從來の振動を持続し得るが、(19) 式の成立する程度に荷電量が表面張力に較べて大きくなれば、表面張力により滴の表面積が收縮しようとしても荷電の斥力に妨げられる結果、收縮が十分に行はれず、從來通りの振動の平衡は必然的に破れるものと見做さねばならぬ。例へば 15° の水滴の場合に於ては、 $T = 73$ と置き得るが故に、(19) 式は $E^2 \geq 3669 a_0^3$ となり、従つて振動の平衡は $E \geq 60.58 a_0^{\frac{3}{2}}$ のとき必ず破れるものと解せられる。

III. 荷電に因る滴の分裂

以上の所論は、滴の荷電量が如何程大きくなつても、分裂の起らぬことを假定して進めたものである。併し乍ら實際は滴が或る程度以上の荷電を帯びて、その表面張力の影響が激減すれば、僅かの原因によつても容易に分裂すべきは曩に述べた Lord Rayleigh の實驗結果に徴しても、これを想像するに難くない。

今簡單の爲に、滴を悉く完全な球形のものと假定する。而して、一定體積 V の滴に荷電 E を與へた場合、その滴が m 個の體積の等しい小滴に分裂したとしよう。然る

(18) 茲に掲げた (18) 式は N. Bohr 及び J. A. Wheeler [Phys. Rev., 56 (1939), 426] 等が、最近の原子核に中性子 (Neutron) が衝突した場合に就て與へた振動式と本質的には殆んど變りがない。併し乍ら、上記の場合に於ては荷電として陽子 (Proton) の有つものが考慮せられてある故に、いま考へて居る場合に於ける如く自由な流動性を缺き、且つ其の量が不連續的に増減する事になる。其の結果、式の形にも多少の差異が認められる。

ときは, (18) 式により分裂後 m 個の小滴全體の有する P_e 及び P_s の値はそれぞれ次の (20) 及び (21) 式の如く表すことが出来る.

$$P_e = m \frac{\left(\frac{E}{m}\right)^2}{2} \left(\frac{4\pi}{3\frac{V}{m}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{E^2}{2a_0} m^{-\frac{2}{3}} \quad (20)$$

$$P_s = m 4\pi T \left(\frac{3\frac{V}{m}}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = 4\pi T m^{\frac{1}{3}} a_0^2 \quad (21)$$

従て, 斯る場合に於ける位置のエネルギーの總量は

$$P = P_e + P_s = \frac{E^2}{2a_0} m^{-\frac{2}{3}} + 4\pi T m^{\frac{1}{3}} a_0^2 \quad (22)$$

とならねばならぬ. この (22) 式から, 1 個の滴が 2 個の相等的な滴に分裂する爲の條件として,

$$\frac{E^2}{2a_0} 2^{-\frac{2}{3}} + 4\pi T a_0^2 2^{\frac{1}{3}} \leq \frac{E^2}{2a_0} + 4\pi T a_0^2$$

$$\text{即ち } E^2 \geq 17.7 a_0^3 T \quad (23)$$

なる關係が導かれる. 而して, 上式 (23) を曩に與へた (19) 式と比較すると, 荷電により 1 個の滴が完全に振動の平衡を失ふ以前, 既に分裂し様とする傾向を帯びて居るものと解されることは注意すべきであらう.

但し茲に附言すべきは, 斯くの如く滴が分裂或は變形して從來の振動を持続し得ざる程度の荷電を帯びた場合と雖も, この荷電に因る電圧が火花の飛ばぬ範囲内になければならぬことである. 然るに, 常壓で火花の飛ばぬ電場は約 30000 V/cm であつて, この數値を C. G. S. 靜電單位に換算すると 100 となる. それ故, 上記の範囲を限定する條件として

$$\frac{E}{a_0^{\frac{1}{2}}} \leq 100$$

$$\therefore E \leq 100 a_0^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

なる關係が導かれる. 上式 (24) 及び曩に得た (23) 式より, 滴の分裂が起る爲の必要な條件として

$$4.2 a_0^{\frac{3}{2}} T^{\frac{1}{2}} \leq E \leq 100 a_0^{\frac{1}{2}}$$

なる關係が與へられる故, E の半徑は次の (25) 式を満足せねばならぬ.

$$a_0^{\frac{1}{2}} \geq 0.042 T^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

従て, 金屬並に合金の融液の如き表面張力の大きな液體に於ては, その滴の半徑が數 cm に及ぶ程大きくなればこの分裂は先づ起らぬものと解せられる. 併し乍ら, 表面張力の小さい液體, 例へば水の場合には, (25) 式が

$$a_0 \geq (0.3593)_{\text{cm}}^2 = 0.129 \text{ cm} \quad (25a)$$

の如く表され, その滴の半徑は雨等に於て普通に見受けられる程度のものであつてもこの分裂は起り得ることに

なる.⁽¹⁹⁾ それ故, Lord Rayleigh の實驗結果から想像したところは茲に確證せられ, 水滴の分裂現象の機構が説明出来たわけである. 氣象學上極めて強く帯電をした雨滴は却てその半徑が小さいと云ふ事が知られて居る⁽²⁰⁾が, 斯る事實も前述の考察結果と先づ一致する.⁽²⁰⁾

IV. 荷電に因る滴の變形

前節に於て述べた所により, 滴は荷電が加はるに連れてその振動の平衡を完全に失ふ以前, 先づ (23) 式が成立するに到れば分裂しようとする傾向を帯びて来る事が判明した. 併し乍ら, 分裂すべき機會の絶無な場合には, その後も振動は準安定状態を保つた儘依然持續せられ, (19) 式の成立するに到つて始めて完全に攪亂せられるものと解せられたのであつた. 茲に於て振動の平衡の破れた後, 滴は如何なる状態をとるか云ふ事が問題となる. この問題を解決する爲に, 先づ滴の有つ位置のエネルギーが滴の離心率と共に如何様に變化するかを調べて見よう.

今, P_e 及び P_s を滴の容積 V 及び離心率 e_1 の項で表す

- (19) 例へば, W. A. Bentley [Mon. W. Rev., 32 (1904), 450] が 344 回の降雨に就ての大きさを測定した結果によると, 雨滴には大小の差が著しく, 大なるものは直徑が 6.4 mm 位もあるが, 小なるものに到れば直徑が 0.5 mm にも達せぬ. 併し, 前記の 344 回の降雨を雨滴の大きさによつて區分すれば, その直徑 $2a_0$ の 0.8 mm ~ 3.4 mm なる場合が大部分を占める事になつて居る.

- (20) G. C. Simpson, Phil. Mag., 30 (1915), 1.

- (21) 水の場合には $T = 73$ と置き得るが故に, 前掲の (23) 式は

$$E^2 \geq 1290 a_0^3 \quad (23a)$$

となる. 従つて

$$E \geq 35.93 a_0^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \frac{E}{V} \geq \frac{3 \times 35.93}{4\pi a_0^{\frac{3}{2}}} = \frac{8.59}{a_0^{\frac{3}{2}}} \quad (26)$$

なる關係が導かれる.

地上に於て測定せられた雨の帯びて居る荷電は普通甚だ少量で, 例へば F. Schinderhauer [Abh. d. Königl. Preuss. Met. Inst., 4 (1913), 1] 等の研究結果を見ても 2~3 E. S. U./cm³ 以下である. それ故, たとへその半徑が (25a) 式を満足しても, (23) 式——従て (26) 式——を満足せず, 先づ雨滴に荷電に因る分裂が一般には起らぬものと解されぬでもない. 併し乍ら, この荷電の値は多くの滴に就て得た平均値なるのみならず, 特殊な場合には雨滴が 43.6 E. S. U./cm³ にも及ぶ非常に大なる荷電を有する事も, A. Baldit [Ann. Soc. Mét., 59 (1911), 105; La Radium, 9 (1912), 92] によつて観測せられて居る.

假にこの値を上式 (26) に代入して見ると,

$$a_0 = 0.339 \text{ cm}$$

となり, 雷雨の場合に實に得る數値が與へられる. 従て, 斯る場合には或は雨滴の荷電による分裂が起り, その體積も小さくなり得べきであらう. 何れにせよ, 雨の場合の測定結果が本文に述べた見解の決定的な證明とはならぬが, 少くともこれと些し矛盾せぬものと謂ひ得るのである.

式を求めると、これ等の式は滴が長軸廻轉楕圓體であるか或は扁平廻轉楕圓體であるかに従て、次の(27a), (28a) 及び(27b), (28b) の如く異つた型をとる。即ち、長軸廻轉楕圓體なる場合には、

$$P_s = 2\pi T \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{(1-e_1^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ (1-e_1^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\arcsin e_1}{e_1} \right\} \\ = 2\pi T \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \left\{ (1-e_1^2)^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1, 3, \dots, 2n-1}{2, 4, \dots, 2n} \frac{e_1^{2n}}{2n+1} \right) \frac{1}{(1-e_1^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad (27a)$$

$$P_e = \frac{E^2}{4} \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{\frac{1}{3}} (1-e_1^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\log \left(\frac{1+e_1}{1-e_1} \right)}{e_1} \\ = \frac{E^2}{2} \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{\frac{1}{3}} (1-e_1^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_1^{2n}}{2n+1} \quad (28a)$$

又扁平楕圓體なる場合には

$$P_s = 2\pi T \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} (1-e_1^2)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{1-e_1^2} + \frac{\log \frac{1+e_1}{1-e_1}}{2e_1} \right) \\ = 2\pi T \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} (1-e_1^2)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{1-e_1^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_1^{2n}}{2n+1} \right) \quad (27b)$$

$$P_e = \frac{E^2}{2} \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{\frac{1}{3}} (1-e_1^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin e_1}{e_1} \\ = \frac{E^2}{2} \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{\frac{1}{3}} (1-e_1^2)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1, 3, \dots, 2n-1}{2, 4, \dots, 2n} \frac{e_1^{2n}}{2n+1} + 1 \right) \quad (28b)$$

となるのである。(22)

以上、(27a) (28a) 及び (27b) (28b) 式によつて表されたエネルギー値は、滴が如何なる離心率となつた際に極

(22) 廻轉楕圓體の表面積 S 及び表面張力による位置のエネルギー P_s は、その楕圓體が長軸なるか或は扁平なるかに従ひ、それぞれ次の如く表される。

$$S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{e_1} \arcsin e_1 = 2\pi ab \\ \left(\frac{b}{a} + \frac{\arcsin e_1}{e_1} \right); a > b \quad (29a)$$

$$\therefore P_s = ST = 2\pi ab T \\ \left(\frac{b}{a} + \frac{\arcsin e_1}{e_1} \right); a > b \quad (30a)$$

$$S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2}{e_1} \log \frac{b(e_1+1)}{a}; a < b \quad (29b)$$

$$\therefore P_s = ST = 2\pi T \\ \left\{ b^2 + \frac{a^2}{e_1} \log \frac{b(e_1+1)}{a} \right\}; a < b \quad (30b)$$

上式(29a), (30a) 及び(29b), (30b) の a 及び b に裏に掲げた(11)式の値を代入すれば、本文の(27a) 及び(27b) 式が誘導出来る。

更に、(8a) 式を書き換へると、直ちに(28a) 及び(28b) 式が得られる。

小であるかを査べる爲に、これ等を e_1 で微分した微分係数 $\frac{dP_s}{de_1}$ 及び $\frac{dP_e}{de_1}$ を求めて見る。然るときは、先づ長軸廻轉楕圓體の場合、上記の微分係数の内 $\frac{dP_s}{de_1}$ は

$$\frac{dP_s}{de_1} = 2\pi T \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \left[\frac{1}{(1-e_1^2)^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1, 3, \dots, 2n-1}{2, 4, \dots, 2n} \frac{e_1^{2n-1}}{2n+1} \right. \\ \left. + \frac{2n}{2n+1} e_1^{2n-1} + \frac{e_1}{3} (1-e_1^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \\ = 2\pi T \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} (1-e_1^2)^{-\frac{1}{2}} e_1 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1, 3, \dots, 2n-1}{2, 4, \dots, 2n} \frac{e_1^{2n}}{2n+1} \right. \\ \left. + \frac{2n}{2n+1} e_1^{2n-2} (1-e_1^2) + \frac{1}{3} \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1, 3, \dots, 2n-1}{2, 4, \dots, 2n} \frac{e_1^{2n}}{2n+1} - \frac{2}{3} (1-e_1^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ = \frac{32}{3} \pi T \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} (1-e_1^2)^{-\frac{1}{2}} e_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1, 3, \dots, 2n-3}{2, 4, \dots, 2n-2} \frac{e_1^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \quad (31a)$$

となり、 $\frac{dP_e}{de_1}$ は

$$\frac{dP_e}{de_1} = E^2 \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{\frac{1}{3}} e_1 (1-e_1^2)^{-\frac{3}{2}} \left\{ (1-e_1^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne_1^{2n-2}}{2n+1} \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_1^{2n}}{2n+1} \right\} \\ = E^2 \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{\frac{1}{3}} e_1 (1-e_1^2)^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \\ \left(\frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{2n+1} \right) e_1^{2n} \\ = -\frac{2}{3} E^2 \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{\frac{1}{3}} e_1 (1-e_1^2)^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \\ \frac{n}{(2n+3)(2n+1)} e_1^{2n} \quad (32a)$$

となる。而して、上式(31a) 及び(32a) で表された $\frac{dP_s}{de_1}$ 及び $\frac{dP_e}{de_1}$ を 0 或は $\pm\infty$ とする様な e_1 の値のみが、それぞれ表面張力及び荷電による位置のエネルギー P_s 及び P_e に極限値を與ふべき疑問のある値と解せられる。斯る e_1 の値の内、 P_s に極限値を與ふべきものとしては、 $e_1=0$, $e_1=1$ 及び $0 < e_1 < 1$ なる疆域内に於て

$$f_1(e_1) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1, 3, \dots, 2n-3}{2, 4, \dots, 2n-2} \frac{e_1^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}$$

を 0 とする様な値が、又 P_e に極限値を與ふべきものとしては、 $e_1=0$, $e_1=1$ 及び $0 < e_1 < 1$ なる疆域内に於て

$$f_2(e_1) \equiv -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)(2n+3)} e_1^{2n}$$

を 0 とする様な値がそれぞれ思考出来る。然るに、 $f_1(e_1)$

及び $f_2(e_1)$ は $0 < e_1 < 1$ なる疆域内で常にそれぞれ正の有限値及び負の有限値を取り、決して 0 となる事がない。それ故、この場合 P_s に就ても亦 P_e に就ても、結局 $e_1 = 0$ 及び $e_1 = 1$ 丈が考慮すべき値として残る事になる。

更に扁平廻轉楕圓體の場合、 $\frac{dP_s}{de_1}$ 及び $\frac{dP_e}{de_1}$ を表す式として次の関係が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{dP_s}{de_1} &= 4\pi T \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} e_1 (1-e_1^2)^{-\frac{1}{3}} \left\{ (1-e_1^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} \right. \\ &\quad \left. e_1^{2n-2} - \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_1^{2n}}{2n+1} + \frac{1}{3} (1-e_1^2)^{-1} \right\} \\ &= \frac{4}{3} \pi T \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} (1-e_1^2)^{-\frac{1}{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{4n+3}{(2n+1)(2n+3)} + 1 \right\} e_1^{2n} \\ &= \frac{16}{3} \pi T \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} (1-e_1^2)^{-\frac{1}{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} e_1^{2n} \quad (31b) \\ \frac{dP_e}{de_1} &= \frac{E^2}{2} \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1, 3, \dots, 2n-1}{2, 4, \dots, 2n} \right. \\ &\quad \left. \frac{2n}{2n+1} e_1^{2n-1} (1-e_1^2)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} (1-e_1^2)^{-\frac{2}{3}} e_1 \right. \\ &\quad \left. \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1, 3, \dots, 2n-1}{2, 4, \dots, 2n} \frac{e_1^{2n}}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{E^2}{2} \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{\frac{1}{3}} (1-e_1^2)^{-\frac{2}{3}} e_1 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1, 3, \dots, 2n-1}{2, 4, \dots, 2n} \right. \\ &\quad \left. \frac{2n}{2n+1} e_1^{2n-1} (1-e_1^2)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \right. \\ &\quad \left. \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1, 3, \dots, 2n-1}{2, 4, \dots, 2n} \frac{e_1^{2n}}{2n+1} \right) \right\} \\ &= -\frac{4}{3} E^2 \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{\frac{1}{3}} (1-e_1^2)^{-\frac{2}{3}} \\ &\quad e_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1, 3, \dots, 2n-1}{2, 4, \dots, 2n} \frac{n}{(2n+1)(2n+3)} e_1^{2n} \quad (32b) \end{aligned}$$

上式 (31b) 及び (32b) で表された $\frac{dP_s}{de_1}$ 及び $\frac{dP_e}{de_1}$ を 0 或は $\pm\infty$ とする様な e_1 の値の内、 P_s に極限値を與ふべきものとしては、 $e_1 = 0, e_1 = 1$ 及び $0 < e_1 < 1$ なる疆域内に於て

$$f_3(e_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} e_1^{2n}$$

を 0 とする様な値が、又 P_e に極限値を與ふべきものとしては、 $e_1 = 0, e_1 = 1$ 及び $0 < e_1 < 1$ なる疆域内に於て

$$f_4(e_1) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1, 3, \dots, 2n-1}{2, 4, \dots, 2n} \frac{n}{(2n+1)(2n+3)} e_1^{2n}$$

を 0 とする様な値がそれぞれ思考出来る。然るに、 $f_3(e_1)$ 及び $f_4(e_1)$ は $0 < e_1 < 1$ なる疆域内で常にそれぞれ正の有限値及び負の有限値を取り、決して 0 となる事がない。

それ故、長軸廻轉楕圓體の場合と同じく、 P_s に就ても亦 P_e に就ても結局 $e_1 = 0$ 及び $e_1 = 1$ 丈が考慮すべき値として残る事になる。

以上述べた所を綜合すると、長軸楕圓體の場合に於ても將た扁平楕圓體の場合に於ても、離心率 e_1 の増加するに連れて表面張力による位置のエネルギー P_s は常に増加し、荷電による位置のエネルギー P_e は常に減少するものと解せられる。而も、 P_s 及び P_e の兩者共 $e_1 = 0$ 及び $e_1 = 1$ なる場合に極大値或は極少値をとる事になる。更に詳言すれば、長軸楕圓體の場合も扁平楕圓體の場合も、

$$\left. \begin{aligned} \lim_{e_1=0} P_s &= 4\pi T \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}}, & \lim_{e_1=1} P_s &= \infty \\ \lim_{e_1=0} P_e &= \frac{E^2}{2} \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{\frac{1}{3}}, & \lim_{e_1=1} P_e &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

の示す如く、 P_s は球形のとき最小で $4\pi T \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}}$ であるが、離心率の増加と共に如何程でも増大してゆく、これに反して P_e は球形のとき最大で $\frac{E^2}{2} \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{\frac{1}{3}}$ となり、離心率の増加と共に減少する一方で、 $e_1 = 1$ のとき 0 となつて居る。斯くの如く、 $\frac{dP_s}{de_1}$ は常に正の値を、又 $\frac{dP_e}{de_1}$ は常に負の値をとる結果、球形の滴に就て考へれば、これ等の總和 $\frac{dP}{de_1} \left(= \frac{dP_s}{de_1} + \frac{dP_e}{de_1} \right)$ は E が増加するに連れ、最初 (19) 式の成立せぬ間は正の値をとるが、この限度に達するや否や 0 となり、更にこれを超えると、負の値をと

るべきであらう。従て、滴は相當量の荷電を帯びると、球形の場合よりも或る一定の離心率を有つた廻轉楕圓體の方が、却てその位置のエネルギーが最小、即ち安定状態とならねばならぬ。

Fig. 4 及び Table 1

は今述べた離心率と位置のエネルギーとの間の關係をその體積の 0.268 cm^3 —即ち球形に換算した場合の半径大凡 0.4 cm の水滴が 15.5 C. G. S. 靜電單位の荷電を帯びて居る場合に就て示したものであるが、位置のエネルギーの最小となるのは球形

どころか、その離心率の値が 0.9 附近の所である。尙、滴にその電壓が火花の飛ばぬ範圍—即ち (24) 式を満足する範圍—で更に帯電せ

Fig. 4 Diagram representing the Relation between the Potential Energy and the Eccentricity.

しめると、エネルギー最小となるべき廻轉楕圓體の離心率は更に大きくなつて来る。

Table 1 The Relation between the Potential Energy and the Eccentricity.

e_1	$a > b$			$a < b$		
	P_e	P_s	P	P_e	P_s	P
1.0	000.00	∞	∞	000.00	∞	∞
0.9	282.33	162.61	445.44	283.28	167.32	450.60
0.7	297.23	149.40	446.63	296.80	149.91	446.71
0.5	299.70	147.29	446.99	299.72	147.34	447.06
0.3	300.19	146.83	447.03	300.25	146.84	447.09
0.1	300.26	146.78	447.04	300.30	146.79	447.09
0.0	300.32	146.78	447.10	300.32	146.78	447.10

上記の如く、或る液體の一定體積の滴に就て、球形を安定状態とする平衡の破れるのは、この分裂の場合の如く何等他の影響なしに、一定の荷電量さへ與へられれば直ちに起るものと想像せられる。それ故、一般に液體の表面張力の測定が、この荷電に因り攪亂の始まる状態を観測して、最も正確に行ひ得るものと思はれぬでもない。併し乍ら、火花の飛ぶ事なしに斯る平衡の破れる程度迄滴に帯電せしめるためには、曩に滴の分裂の場合に述べたのと同様な理由に基き、(19) 及び (24) 式により、

$$(50.27 a_0^3 T)^{\frac{1}{2}} \leq E \leq 100 a_0^2$$

從て、

$$a_0^{\frac{1}{2}} \geq 0.071 T^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

なる條件が満足せられねばならぬ。それ故、金屬並に合金の融液の如き表面張力の大きな液體に就ては勿論、水の如き表面張力の比較的小なる液體に就てすら (34) なる條件が

$$a_0 \geq 0.367 \text{ cm} \quad (34a)$$

の如く表され、非常に滴の大きな事を必要とするため、前述の測定法の適用は極めて困難である。

結 論

以上述べた所を綜合すると、一定體積 $V \left(= \frac{4}{3} \pi a_0^3 \right)$ の滴が帯びる荷電量 E の増加するに連れ、これが落下する際に行ふ週期的振動は次の變化過程をとるものと稱せられる。即ち、先づ各滴の有つ荷電量 E の小なる間は、滴の振動数 ν が $\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{E^2}{32 \pi a_0^3 T}$ の割合で減少し、且つ滴は帯電するに従ひ、他の滴と衝突した場合に互に併合せんとする傾向を表して来る。然るに、上記の荷電量が $E^2 \geq 17.7 a_0^3 T$ なる限度に達すると、却て滴は稍もすれば分裂せんとするに到り、更に高い $E^2 \geq 50.3 a_0^3 T$ なる限度に達すると、前述の週期的振動は全く攪亂せられて、必然的に滴の分裂或は變形を起さずには措かぬのである。

これ等の過程の内、最初に挙げた荷電に因る滴の振動数の減少は、金屬及び合金の融液等に於ても起し得るものと想像せられる。それ故、金屬の融液等を適當な大きさの滴とし、蓄電器その他によつて帯電せしめつゝ恒温槽の様仕掛けのある管内に滴下して、その振動数一從つて振動週期一の變化を嘗てこの方面の研究に屢々用ひられた様な光學的方法⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾で読み取れば、容易に表面張力が判る理であらう。滴の大きさの測定は氣象學で雨の場合屢々行はれて居るが、非常に精密に出来る。從て、蓄電器の電壓を入念に計りさへすれば、この方法で可なり正確な表面張力の測定値が得られるのではないかと思ふのである。

終りに臨み、本研究に終始懇篤な御援助を賜つた宇野傳三教授に謝意を表したい。更に、屢々極めて有益な御助言を與へて下さつた吉田卯三郎教授にも深謝する。尙、

本研究は日本學術振興會の御援助の下に進めつゝある「金屬並に合金の非晶性狀態」に關する考察の一部なるを附記し、この機會に同會にも謹んで謝意を表する。

黃銅の疲勞破壊に關する顯微鏡的研究* (第1報)

深 井 誠 吉**

Seikiti Hukai: A Micrographic Study on Fatigue Fracture of Brass (Report 1). The author discusses the mechanism of the fracture of metal under a cyclic stress. He paid a special attention to the relation between the repeated stress vs. slip-phenomenon, slip-phenomenon vs. start of fracture, growth of fracture vs. crystalline boundary, etc. The specimens used were a sheet of Super-Duralumin for the preliminary test and α -Brass for the final test. The surface of these specimens were polished and etched before setting them on Schenck's Vibratory Endurance Testing Machine. Thus, the author observed the structural change of the specimen by microscope at the various stages of stress and the stress due to number of repetitions of testing.

(Received February 8, 1941)

** 住友金屬工業株式會社車鋼所研究部

* 本報告は昭和15年10月京都で開催された本學會第8回講演大會で發表した。