鋳物と金型の接触面での熱抵抗が鋳物の凝固に与える影響

西 田 義 則*

Yoshinori Nishida : The Influence of the Heat Resistance at the Mold-Ingot Interface on the Solidification of Ingots. The influence of the contact heat resistance at the mold-
ingot interface on the solidification of ingots is discussed. The numerical values of the heat resistance are calculated using the solution which is obtained when the heat through the interface is given. The solidified layers and the temperature distributions are presented in the cases of practical variations of the heat resistance.

For the case of pure aluminium as an ingot and cast iron as a mold, the growth of the solidified layers with respect to time are given in Fig.2, Fig.5 and Fig.8, when the heat resistance varies with time as in Fig.1, Fig.4 and Fig.7 respectively. In Fig.3, Fig.6 and Fig.9 are shown the temperature distributions when the heat resistances are approximately constant.

(Received July 1, 1970)

I. 緒 言

鋳造においての熱の移動を最も実際の現象に近く簡単な解析方法で取り扱うことを考えて、著者は前報⁽¹⁾で鋳物と鋳型の接触面における熱抵抗が鋳物の冷却に大きな影響を与えることを指摘し、凝固を考えない場合の鋳物の冷却について積分法で近似解を求めて報告した。そして実際の鋳

物の冷却の現象を数式的に説明するには接触面で接触熱抵抗を考慮しなければならないことを示した。

今回の研究は接触熱抵抗が凝固に与える影響を調べることが主目的として行なった。本来は接触熱抵抗を時間の函数 $R(t)$ として含み鋳物および鋳型の温度分布と凝固速度を示す解を求めるべきであるが、このような解は得られなかった。しかし接触面を通過する熱量の函数 $Q(t)$ を与えた場合に得られる解を用いて逆に $R(t)$ を算出し、実際の $R(t)$ を与える $Q(t)$ を見つけることが容易であることを示している。

* 名古屋工業技術試験所 (Government Industrial Research Institute, Nagoya, Nagoya)

(1) 西田, 鈴木: 金属学会誌, 32(1968), 882.

II. モデルの説明および解

鋳物の初期温度は一樣に凝固温度にあり、溶けており温度勾配はないとする。鋳物も鋳型も 1 次元で考え半無限体であり、熱は鋳型との接触面からのみ移動し、熱伝導のみによるとする。凝固温度は一定で、計算に用いられた物理定数は温度によって変化しないとする。

この場合に鋳物と鋳型の接触面を通過する熱量を $Q(t)$ として鋳物および鋳型の温度分布を与える解を求める。この解から鋳物および鋳型の接触面温度を求め、それと $Q(t)$ から接触面の熱抵抗 $R(t)$ を算出する。

熱伝導の方程式は

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad t \geq 0 \quad (1)$$

接触面での境界条件は

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x} U(0, t) = Q(t) \quad (2)$$

1. 鋳物側の解

温度の基準として鋳物の凝固温度をゼロにとる。(1)式が $x=0 \sim S$ までの間で成立するように x に関し (1) 式を積分すると

$$\frac{d}{dt} \left(H_1 + \frac{k_1 \rho_1 L}{\lambda_1} \cdot S \right) = \frac{k_1}{\lambda_1} Q(t) \quad (3)$$

$$H_1 = \int_0^S U_1(x, t) dx$$

時間が経過するに従って移動する凝固界面での境界条件は

$$\frac{\partial}{\partial x} U_1(S, t) = \frac{\rho_1 L}{\lambda_1} \cdot \frac{dS}{dt} \quad (4)$$

$$U_1(S, t) = 0 \quad (5)$$

(5) 式を t に関し微分すると

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} \cdot \frac{dS}{dt} + \frac{\partial U_1}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

(4) と (6) 式から dS/dt を消去し (1) 式を用いると

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right)^2 = \frac{k_1 \rho_1 L}{\lambda_1} \cdot \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \quad x=S \quad (7)$$

鋳物の温度分布が x に関し 2 次式で近似できるとすると、

$$U_1(x, t) = A_1(x-S)^2 + B_1(x-S) \quad (8)$$

(2), (3), (7), (8) 式から次の関係式が得られる。

$$\beta = \frac{\alpha}{6} \{ \alpha + 5 + (1 + 4\alpha)^{1/2} \} \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{SQ(t)}{k_1 \rho_1 L} \quad (10)$$

$$\beta = \frac{Q(t)}{k_1 \rho_1 L^2} \int_0^t Q(t) dt \quad (11)$$

$$A_1 = - \frac{\lambda_1}{2 k_1 \rho_1 L} B_1^2 \quad (12)$$

$$B_1 = \frac{Q(t)}{\lambda_1} \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2\alpha} \right) \quad (13)$$

鋳物側のこのモデルに関しては Goodman⁽²⁾ が融解現象について解いたものと全く同じである。

2. 鋳型側の解

(1) 式が $x=\delta \sim 0$ の間で成立するように x に関しこの間で積分する。鋳型の初期温度分布を $f(x)$ とすると

$$\frac{d}{dt} (H_2 - F_2) = k_2 \left[\frac{\partial}{\partial x} U_2(0, t) - \frac{\partial}{\partial x} U_2(\delta, t) \right] \quad (14)$$

$$H_2 = \int_0^\delta U_2(x, t) dx$$

$$F_2 = \int_0^\delta f(x) dx$$

ここで $U_2(x, t)$ を x に関し 2 次曲線で近似し境界条件を次のようにおく、

$$U_2(x, t) = A_2 x^2 + B_2 x + C_2 \quad (15)$$

$$U_2(\delta, t) = -\theta_2 \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} U_2(\delta, t) = 0 \quad (17)$$

鋳型の初期温度分布 $f(x)$ は $\delta_0 \sim 0$ までは 2 次曲線で近似できると考える。

$$f(\delta) = -\theta_2, \quad \delta \leq \delta_0$$

とする、そうすると

$$F_2 = \int_{\delta_0}^0 f(x) dx - \theta_2(\delta_0 - \delta) \quad (18)$$

(2) と (14) ~ (18) 式より δ が $Q(t)$ の関数として求まる。

$$\delta = - \left[\frac{6 \lambda_2}{Q(t)} \left\{ -\theta_2 \delta_0 + \int_{\delta_0}^0 f(x) dx + \frac{k_2}{\lambda_2} \int_0^t Q(t) dt \right\} \right]^{1/2} \quad (19)$$

$$A_2 = -Q(t)/2 \lambda_2 \delta$$

$$B_2 = Q(t)/\lambda_2$$

$$C_2 = -\theta_2 - \delta Q(t)/2 \lambda_2$$

ところで鋳物と鋳型の接触面での熱抵抗は

$$R(t) = \{U_1(0, t) - U_2(0, t)\}/Q(t) \quad (20)$$

で与えられる。この $R(t)$ として実際的な値を与える $Q(t)$ を見つけ、その時の凝固界面の進行の様子および温度分布の算出を行なった。

III. アルミニウム鋳物の凝固計算結果および考察

鋳物と鋳型の接触面を通過する熱量 $Q(t)$ の式としては、減少関数であればよいので種々の関数が考えられるが、ここでは次の型の双曲線関数を用いた。

$$Q(t) = K_0 (Pt + 1)^{-1/n} \quad (21)$$

定数 K_0 は接触熱抵抗の初期値 R_0 と初期の鋳型表面温度により決定される定数である。この式において P と n を適当に選ぶことによって欲する型の $R(t)$ を得ることができる。

鋳型の初期温度分布 $f(x)$ としては (22) 式を用いた。これは鋳込後に鋳物の鋳型との接触面温度が凝固温度に達した時までのできる温度分布を表わしている。これは前報⁽¹⁾の式より計算した。

$$f(x) = 13295 x^2 / R_0^2 + 3111.1 x / R_0 - 328.0 \quad (22)$$

(2) T.R. Goodman : Trans. ASME, 80 (1958), 335.

計算に用いた数値は Table 1 のようである。計算は 3 種類の R_0 について行なった。Fig. 1~9 までがその結果である。Fig. 1, Fig. 4, Fig. 7 のグラフのように $R(t)$ が与えられた時

に Fig. 2, Fig. 5, Fig. 8 のようにそれぞれ凝固は進行する。 $R(t)$ が時間によってほとんど変化しない場合の温度分布を表わすのが Fig. 3, Fig. 6, Fig. 9 である。

Table 1 Properties used in calculation

	Density (g/cm ³)	Heat conductivity (cal/cm·sec·°C)	Thermal diffusivity (cm ² /sec)	Latent heat (cal/g)	Initial temperature (°C)	Melting point (°C)
Aluminium as an ingot (solid)	2.56	0.500	0.734	96	660	660
Cast iron as a mold	7.10	0.103	0.104	—	150	—

Fig. 1 Variations of the contact heat resistance with time ($R_0=10$, $n=2.2$) Fig. 4 Variations of the contact heat resistance with time ($R_0=50$, $n=2.2$)

Fig. 2 Increase in the thickness of the solidified layer with time for some variations of the contact heat resistance

Fig. 5 Increase in the thickness of the solidified layer with time for some variations of the contact heat resistance

Fig. 3 Temperature distributions within the solidified layer and the mold ($R_0=10$, $p=0.25$, $n=2.2$)

ところで鋳型の表面温度が時間によって変わる場合の報告は少しある。初期に一樣に凝固温度で溶けている鋳物があり、その表面温度が時間の函数で与えられた場合の解を Tien⁽³⁾ が積分法で得ている。しかしこの解も鋳造の実際の現象に適用するには表面温度の時間変化がわかっていなければならない。その表面温度や熱量は鋳型にうばわれる熱量によって決まるはずである。ここではそのような考えで解析を行なったのである。

Fig. 3, Fig. 6 から知られることは、凝固初期の部分を除いて凝固進行は時間の平方根に正比例に近いことである。初期の部分において増加がゆるやかなのは、鋳物の表面温度が急激には一定温度に下らず徐々に下ってゆくからである。もし時間ゼロに突然一定温度に下ったならば初期の部

(3) R.H. Tien : Trans. Met. Soc. AIME, **233** (1965), 1887.

分から時間の平方根に正比例するであろう。時間の平方根に正比例に近くなっている部分は、表面温度の変化が小さくなってからである。Fig.9の凝固の場合は接触熱抵抗が大きいので表面温度がすぐには定まらず変化が続いているので、この時間内では平方根に正比例しているとはいえない。しかしもう少し時間が経てば正比例に近くなるはずで

初期には鋳物表面温度が連続的に大きく変化することが原因で S が小さく、直線からはずれている。これは pour out 法などによる実験では知ることが出来なかったのではないかと考えられる。また (23) 式の時間 t は、鋳込から鋳物の表面温度が凝固温度に達するまでの時間を除いてある。したがって (23) 式の定数項はもう少し大きくなるはずである。

Fig.6 Temperature distributions within the solidified layer and the mold ($R_0=50$, $p=0.01$, $n=2.2$)

Fig.7 Variations of the contact heat resistance with time ($R_0=100$, $n=2.5$)

ある。またこれらの勾配は接触熱抵抗の初期値 R_0 が大きくなるほど小さくなっているが、むしろ $R(t)$ の増加割合に大きく依存している。そして R_0 が大きいもの程凝固が直線的増加に到達するのが遅れている。

[Fig.3 より $R_0=10$, $P=0.5$ の場合の直線部分の式は次の式に近い。

$$S = 0.432 \sqrt{t} - 0.778 \quad (23)$$

ところで凝固厚さと時間との間に (24) 式の型の式が経験的に成立つことが知られている⁽⁴⁾。

$$S = q\sqrt{t} - C \quad (24)$$

(24) 式の定数 C にあたる項が (23) 式にあらわれている。Fig.3 のグラフから知られることは、

(4) R.W. Ruddle : *The Solidification of Castings*, The Institute of Metals, (1950).

IV. 結 言

(1) 鋳物と鋳型の接触面の熱抵抗が鋳物の凝固に与える影響を解析するために、鋳物と鋳型が半無限体の場合について物性値が温度によらず一定であるとして、鋳物と鋳型内の温度分布および凝固相界面の進行に関して考察した。

(2) 実際の接触熱抵抗 $R(t)$ を得るために $Q(t)$ として双曲線函数を選んだが十分満足できる結果を得た。

(3) 鋳物が純アルミニウムで鋳型が鋳鉄の場合について計算を行ない Fig.1~9 がその結果である。

(4) 接触熱抵抗が存在する場合でも鋳物表面温度の変化が小さくなってからは、凝固相の厚さ S は $\sqrt{t}$ に正比例に近い変化をするように

Fig.8 Increase in the thickness of the solidified layer with time for some variations of the contact heat resistance

Fig.9 Temperature distributions within the solidified layer and the mold ($R_0=100$, $p=0.003$, $n=2.5$)

なった。その比例定数 q は R_0 および $R(t)$ の増加割合に大きく依存している。

(5) 経験的に成り立つことが認められている (24) 式の C の値は鋳物と鋳型との接触熱抵抗が存在するために鋳物表面温度が初期に連続的に大きく変化することが原因で実験式に現われると考えられる。

終りに、本研究の遂行にあたり有益なる御助言をいただいた早稲田大学教授加藤栄一博士に、そして種々御指導いただいた著者の上司である鈴木鎮夫部長に深く感謝いたします。

記 号

添字1: 鋳物の意味

添字2: 鋳型の意味

x : 鋳物と鋳型の接触面からの距離、鋳物側に対して $x \geq 0$ 、鋳型側に対して $x \leq 0$ (cm)

t : 接触後の時間 (sec)

$U_1(x, t), U_2(x, t)$: x, t における温度 ($^{\circ}\text{C}$)

$Q(t)$: 鋳物と鋳型との接触面を通過する熱量
(cal/sec·cm²)

$R(t)$: 鋳物と鋳型の接触面での熱抵抗 (cm²·sec· $^{\circ}\text{C}$ /cal)

R_0 : 鋳物と鋳型の接触面での初期の熱抵抗
(cm²·sec· $^{\circ}\text{C}$ /cal)

S : 鋳物と鋳型の接触面から凝固界面までの距離
(cm)

δ : 鋳型内の熱拡散層 (cm)

δ_0 : 初期の鋳型内の熱拡散層 (cm)

θ_2 : 初期の鋳型温度 ($^{\circ}\text{C}$)

λ_1, λ_2 : 熱伝導率 (cal/cm·sec· $^{\circ}\text{C}$)

ρ_1, ρ_2 : 密度 (g/cm³)

k_1, k_2 : 熱拡散係数 (cm²/sec)

L : 鋳物の凝固潜熱 (cal/g)