チタン板の相当応力-相当歪関係に関する一考察*

田 辺 龍 彦** 大久保忠恒** 五 弓 勇 雄***

Tatsuhiko Tanabe, Tadatsune Okubo and Isao Gokyu: A Study of the Equivalent Stress-Equivalent Strain Relation of Titanium Sheets. From the results of tensile tests of titanium sheets which have an intensity maximum of the basal pole at an angle θ inclined from the sheet normal to the transverse direction, the equivalent stress-equivalent strain relation has been discussed. The results are as follows.

(1) When several slip systems and/or twin systems are activated simultaneously, the yield criterion for titanium sheet is given by

$$f = P \{ (\sigma_X - \sigma_Z)^2 + (\sigma_Y - \sigma_Z)^2 + 2 \tau_{XY}^2 \} + q \{ \tau_{YZ}^2 + \tau_{ZX}^2 \} + H \{ (\sigma_X - \sigma_Y)^2 + 4 \tau_{XY}^2 \}.$$

Here $\sigma_X, \sigma_Y, \dots, \tau_{YZ}$ are related to the principal axes of anisotropy and the axis (Z-axis) can be assumed to be located at the maximum intensity of the basal pole on the basal pole figure.

(2) The above equation coincides with the criterion of Hill that is introduced when yielding occurs symmetric ally about the axis.

(3) When the parameters in the above equation vary without the rotation of the principal axis of anisotropy as deformation proceeds, the ratio of the contribution of each activated system to the deformation varies.

(4) In analyzing the equivalent stress-equivalent strain relation obtained from the above criterion by the same method as Hill did, a good agreement between the equivalent stress-equivalent strain curves, plotted for the tensile directions in the plane of the titanium sheet is observed in those in the 45, 67.5 and 90° directions; the curves in the 0 and 22.5° directions did not agree with each other nor did with those in the directions mentioned above. As this inconsistency is due to the difference of parameters in the above criterion by the tensile directions, it can be said that the anisotropy of work hardening exists among those directions.

(Received November 30, 1973)

I. 緒 言

著者等は第4報⁽¹⁾および第5報⁽²⁾においてチタン板の降伏応力および塑性歪比の面内異方性を説明するために降伏条件式を提案した。そこで本報告ではその発展として工学的に重要な相当応力 - 相当歪関係について考察する。

II. 実 験 方 法

供試材、引張試験片形状、引張試験片採取方法等は前報⁽²⁾と同じである。即ち結晶粒径 10~140 μ にわたる6種類の板から板面内の各方向の試料を採取して TOM 5000 X で引張試験を行なった。その際引張速度は 5 mm/min であり、荷重 - 伸び曲線を X-Y recorder に記録して応力歪曲線を求めた。

III. 実 験 結 果

一軸引張試験によって得られた各結晶粒径の試料の応力歪曲線の面内異方性の特徴を示している例を Fig. 1 に示す。これらの図からチタン板の応力 - 歪曲線の特徴を次のようにまとめることができる。

(1) 応力 - 歪曲線の面内異方性は結晶粒径が大きくなるほど大きくなる。

(2) 引張方向別に見ると、45°, 67.5°, 90° 方向の応力 - 歪曲線は結晶粒径の大小によらず、互いにかなり平行を保ちながら歪と共に上昇してゆく。また flow stress の大小関係は $\sigma(90^\circ) > \sigma(67.5^\circ) > \sigma(45^\circ)$ である。一方 0° および 22.5° 方向の flow stress は低歪領域においては $\sigma(45^\circ)$ よりも小さいが歪が大きくなると $\sigma(90^\circ)$ よりも大きくなる。結晶粒径が大きくなると 67.5°, 90° 方向の一樣伸びが著しく小さくなるので 0°, 22.5° 方向の応力歪曲線がそれらの応力歪曲線と交わることはないが傾向は同じとみることができる。

(3) 0° 方向と 22.5° 方向の応力 - 歪曲線はほぼ同じような硬化を示すが、0° 方向の方が 22.5° よりも硬化が大きいのので歪が大きくなると flow stress は $\sigma(0^\circ) > \sigma(22.5^\circ)$ となる。

次に代表例として結晶粒径 36 μ の試料について Hill に従って⁽³⁾異方性の主軸を従来通り圧延方向、輻方向、板厚方向にとって相当応力 - 相当歪曲線を求めたものが Fig. 2

** 東京大学工学部附属総合試験所 (Engineering Research Institute, Faculty of Engineering, University of Tokyo, Tokyo)

*** 東京大学工学部金属工学科 (Department of Metallurgy and Materials Science, Faculty of Engineering, University of Tokyo, Tokyo)

* チタン板の塑性異方性に関する研究 (第6報)

Fig.1 Planar anisotropy of the stress-strain curves.
tensile direction: ○ 0°, △ 22.5°, ● 45°, □ 67.5°, × 90°
(a) Grain size 12 μ
(b) Grain size 139 μ

Fig.2 Equivalent stress-equivalent strain curve of the specimen with grain size 36 μ based on Hill's theory. F, G and N were given in Table 1.

である。ただしこの図では異方性パラメータ F, G, N は $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 方向の引張歪 5% における φ 値から計算し、また 0° 方向の相当応力-相当歪曲線を 0° 方向の真応力-引張歪曲線と一致させるようにした。曲線相互の一致の程度を見るにはこの取扱いで充分である。したがって相当歪を全歪理論で近似すると、相当応力 $\bar{\sigma}$ および相当歪 $\bar{\epsilon}$ は

$$\bar{\sigma} = C(\alpha)\sigma(\alpha), \quad \bar{\epsilon} = \epsilon(\alpha)/C(\alpha)$$

$$C(\alpha) = \sqrt{\cos^4 \alpha + \frac{F+1}{G+1} \sin^4 \alpha + \frac{2(N-1)}{G+1} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

となる。ここで $\sigma(\alpha)$ は α° 方向の真応力で、 $\epsilon(\alpha)$ は α° 方向の引張歪である。Table 1 には Fig.2 を求めるのに使った φ 値、 r 値および F, G, N の値を示す。この図から Hill の式によつては各方向から計算した相当応力-相当歪曲線が一つにまとまらないことがわかる。ただ面白いことに相当応力-相当歪曲線が二つのグループ A ($0^\circ, 22.5^\circ$) および B ($45^\circ, 67.5^\circ, 90^\circ$) に分かれ、それぞれのグループ内では各方向から求めた曲線がかなりよく一致している。このような傾向は結晶粒径が 36μ 程度のものまでは観察された。

Table 1 Determination of the values of F, G and N in the Hill's theory from the φ values of $0^\circ, 45^\circ$ and 90° at $\epsilon=0.05$.

	36 μ		36 μ
φ_0	0.70	r_{90}	5.67
r_0	2.33	F	0.18
φ_{45}	0.77	G	0.43
r_{45}	3.35	N	2.35
φ_{90}	0.85		

IV. 考 察

Fig.2 から明らかなように Hill の式によつて相当応力-相当歪曲線の一つにまとめる試みは失敗した。そこで第4報⁽¹⁾の Fig.2 で代表されるような底面の集合組織を持つチタン板の唯一の異方性主軸を底面の集合組織の最大のところに置いた場合相当応力-相当歪関係がどのように表わされるをまず検討する。この目的のためには降伏条件式を完全にしておく必要がある。何故なら今まで求めた降伏条件式

$$f = (\sigma_X - \sigma_Y)^2 + 4\tau_{XY}^2 + q(\tau_{YZ}^2 + \tau_{ZX}^2) \quad (1)$$

では異方性の主軸方向 (Z 軸方向) の伸び縮みが表わされていないからである。このような変形を与えるのは室温では $\{10\bar{1}2\}, \{11\bar{2}1\}, \{11\bar{2}2\}$ 双晶あるいは $\{11\bar{2}2\}$ 逆転等である。これらの変形機構の逆転面 (双晶面)、逆転方向 (双晶方向) と六方晶単結晶の C 軸 (Z 軸) との関係は Fig.3 のようなものであるので前報と同様 C 軸のまわりで降伏に関して等方的であるとして、これらの系に対する降伏条件式を求め

Fig.3 Geometry of the deformation systems in the crystalline co-ordinates.

てみよう。今通り面法線と Z 軸のなす角を β とし、結晶座標 X, Y, Z に対する通り面法線と通り方向の方向余弦を (l, m, n) , (l', m', n') とすれば明らかに次の関係が成立つ。

$$l^2 + m^2 + n^2 = l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1$$

$$ll' + mm' + nn' = 0,$$

$$n = \cos \beta, \quad n' = \sin \beta$$

したがって

$$l = \sin \beta \cos \omega, \quad l' = -\cos \beta \cos \omega$$

$$m = -\sin \beta \sin \omega, \quad m' = \cos \beta \sin \omega$$

となる。ここで ω は C 軸のまわりでの回転角である。故に結晶座標で表わされた応力テンソルによって通り面の通り方向への剪断応力は

$$\begin{aligned} \tau = & \sin \beta \cos \beta \{ (\sigma_Z - \sigma_X) \cos^2 \omega + (\sigma_Z - \sigma_Y) \sin^2 \omega \\ & + 2 \tau_{XY} \sin \omega \cos \omega \} \\ & + (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) (\tau_{XZ} \cos \omega - \tau_{YZ} \sin \omega) \end{aligned}$$

となる。ここで τ^2 を α に関して平均すると

$$\begin{aligned} f = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau^2 d\omega = \frac{1}{2} \left[(\sin^2 \beta - \cos^2 \beta)^2 (\tau_{XZ}^2 + \tau_{YZ}^2) \right. \\ & + \sin^2 \beta \cos^2 \beta \{ (\sigma_Z - \sigma_X)^2 + (\sigma_Z - \sigma_Y)^2 + 2 \tau_{XY}^2 \} \\ & \left. - \left[\frac{1}{4} (\sigma_X - \sigma_Y)^2 + \tau_{XY}^2 \right] \sin^2 \beta \cos^2 \beta \right] \quad (2) \end{aligned}$$

となる。この式は Hill の異方性降伏条件式で降伏が異方性の主軸 (Z) のまわりで回転対称であるとした式

$$f = F \{ (\sigma_X - \sigma_Z)^2 + (\sigma_Y - \sigma_Z)^2 + 2 \tau_{XY}^2 \} + H \{ (\sigma_X - \sigma_Y)^2 + 4 \tau_{XY}^2 \} + 2L (\tau_{XZ}^2 + \tau_{YZ}^2) \quad (3)$$

と同じ形である。さらに先の式 (1) も上の式の特例 (即ち $F=0$ とした場合) であるのでチタン板の降伏条件式は上式で完全に記述できることになる。上の二つの式を比較するとわかるように Hill の式における異方性パラメータ F, H および $2L$ は特定の通り面 (双晶面) に対しては一定の値になる。したがってこれらのパラメータが特定の通り面 (双晶面) に対応した値にはならない時は複数の通り系あるいは双晶系が活動していると解釈することができよう (線型降伏条件式概念)。さて式 (3) を塑性ポテンシャルとすると塑性歪増分は異方性主軸に関して

$$\begin{aligned} d\epsilon_X = & \{ H(\sigma_X - \sigma_Y) + F(\sigma_X - \sigma_Z) \} d\lambda \\ d\gamma_{XY} = & \{ (F + 2H) \tau_{XY} \} d\lambda \\ d\epsilon_Y = & \{ F(\sigma_Y - \sigma_Z) + H(\sigma_Y - \sigma_X) \} d\lambda \\ d\epsilon_Z = & \{ F(2\sigma_Z - \sigma_X - \sigma_Y) \} d\lambda \\ d\gamma_{ZX} = & L \tau_{ZX} d\lambda \\ d\gamma_{YZ} = & L \tau_{YZ} d\lambda \quad (4) \end{aligned}$$

となる。これらの式を使って Hill に従って⁽³⁾ 次の式から相当応力および相当歪増分を定義する。即ち異方性主軸 (Z 軸) に関する塑性仕事増分 dW_p が

$$dW_p = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} = \sigma_{ij} \cdot d\epsilon_{ij} = \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda$$

の形に書けると仮定する。この時相当応力 $\bar{\sigma}$ は

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = & [(\sigma_X - \sigma_Y)^2 + 4 \tau_{XY}^2 + p \{ (\sigma_X - \sigma_Z)^2 + (\sigma_Y - \sigma_Z)^2 \\ & + 2 \tau_{XZ}^2 + 2 \tau_{YZ}^2 \} + q (\tau_{XZ}^2 + \tau_{YZ}^2)]^{1/2} \\ p = & F/H, \quad q = 2L/H \quad (5) \end{aligned}$$

となり、相当歪増分 $d\bar{\epsilon}$ は

$$\begin{aligned} d\bar{\epsilon} = & \left[p \left\{ \frac{(d\epsilon_Z - p d\epsilon_X)^2 + (p d\epsilon_Y - d\epsilon_Z)^2}{(p^2 + 2p)^2} + \left(\frac{d\gamma_{XY}}{p+2} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(d\epsilon_X - d\epsilon_Y)^2 + 4 d\gamma_{XY}^2}{(p+2)^2} + 4 \frac{(d\gamma_{YZ}^2 + d\gamma_{XZ}^2)}{q} \right\} \right]^{1/2} \quad (6) \end{aligned}$$

となる。今簡単な場合として $\{10\bar{1}0\}$ 通りおよび $\{10\bar{1}1\} <11\bar{2}0>$ 通りの場合の $\bar{\sigma}$ と $d\bar{\epsilon}$ を求めておく。

$\{10\bar{1}0\}$ 通り

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(\sigma_X - \sigma_Y)^2 + 4 \tau_{XY}^2} \quad (7)$$

$$d\bar{\epsilon} = \sqrt{d\epsilon_X^2 + d\gamma_{XY}^2} \quad (8)$$

$\{10\bar{1}1\} <11\bar{2}0>$ 通り

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(\sigma_X - \sigma_Y)^2 + 4 \tau_{XY}^2 + 1.2 (\tau_{XZ}^2 + \tau_{YZ}^2)} \quad (9)$$

$$d\bar{\epsilon} = \sqrt{d\epsilon_X^2 + d\gamma_{XY}^2 + \frac{2}{0.6} (d\gamma_{YZ}^2 + d\gamma_{XZ}^2)} \quad (10)$$

前にも述べたように式 (5) 中の係数 p および q は通り系 (双晶系) が定まるとそれに対応した一定の値になるが、通り系や双晶系が同時にある割合で活動しても一定の値になる。このことは線型降伏条件式の概念からいっても当然である。一方変形が進むにつれて通り系や双晶系の変形に対する寄与の割合が変化してゆくと p や q は変形と共に変化してゆくことになる。この変化の様子を板面内の引張試験の場合に知るには塑性歪比 φ を考えれば良い。即ち第 4 報⁽¹⁾ の Fig. 2 の様に異方性主軸が極点図上で板厚方向から板幅方向に θ° 傾いた位置にある時式 (4) を異方性主軸に関する塑性歪増分とすると板面内にある方向 α の引張試験では、異方性主軸に関する塑性歪増分は

$$\begin{aligned} d\epsilon_X = & \{ (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta) \\ & + p (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta) \} H \sigma d\lambda \\ d\epsilon_Y = & \{ (\sin^2 \alpha \cos^2 \theta - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta) p \\ & + (\sin^2 \alpha \cos^2 \theta - \cos^2 \alpha) \} H \sigma d\lambda \\ d\epsilon_Z = & \{ (2 \sin^2 \alpha \sin^2 \theta - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta) p \} H \sigma d\lambda \\ d\gamma_{XY} = & \{ (p+2) \sin \alpha \cos \alpha \cos \theta \} H \sigma d\lambda \\ d\gamma_{XZ} = & \left\{ \frac{q}{2} \sin \alpha \cos \alpha \sin \theta \right\} H \sigma d\lambda \\ d\gamma_{YZ} = & \left\{ \frac{q}{2} \sin^2 \alpha \sin \theta \cos \theta \right\} H \sigma d\lambda \end{aligned}$$

となる。この式と第 4 報⁽¹⁾ の式 (13) から各方向の φ 値を求めると

$$\varphi(\theta) = \frac{\cos^2 \theta + p \sin^2 \theta}{1+p}$$

$$\varphi(22.5) = \frac{1.25 \cos^2 \theta - 0.125 \cos^4 \theta - 0.125 + q_2(\theta) - p_2(\theta)}{0.729 + 0.25 \cos^2 \theta + 0.021 \cos^4 \theta + p_1(\theta) + q_1(\theta)}$$

$$\varphi(45) = \frac{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + q \sin^4 \theta - R_2(\theta)}{\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta + R_1(\theta) + q \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta)}$$

$$\varphi(67.5) = \frac{1.25 \cos^2 \theta - 0.125 - 0.125 \cos^4 \theta - S_2(\theta) + T_2(\theta)}{0.021 + 0.25 \cos^2 \theta + 0.729 \cos^4 \theta + S_1(\theta) + T_1(\theta)}$$

$$\varphi(90) = \frac{\cos^2 \theta + p \sin^2 \theta}{\cos^4 \theta + q \sin^2 \theta \cos^2 \theta + p(\cos^4 \theta + 2 \sin^4 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta)} \quad (11)$$

ただし

$$p_1(\theta) = p \cdot [0.729 + 0.25(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 0.021 \cos^4 \theta + 0.043 \sin^2 \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)]$$

$$q_1(\theta) = q \sin^2 \theta (0.125 + 0.021 \cos^2 \theta)$$

$$p_2(\theta) = 0.125 p \sin^2 \theta (\sin^2 \theta - 4 - 4 \cos^2 \theta)$$

$$q_2(\theta) = 0.125 q \sin^4 \theta$$

$$R_1(\theta) = p[\cos^2 \theta (3 + \cos^2 \theta) - \sin^2 \theta (1 + 2 \cos^2 \theta) + 2 \sin^4 \theta]$$

$$R_2(\theta) = p[2 \sin^4 \theta - \sin^2 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta]$$

$$S_1(\theta) = p[0.021 + 0.25(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 0.729 \cos^4 \theta + 1.458 \sin^2 \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)]$$

$$T_1(\theta) = q \sin^2 \theta (0.125 + 0.729 \cos^2 \theta)$$

$$S_2(\theta) = p[0.125 - 0.75 \sin^2 \theta + 0.125 \cos^4 \theta - 0.25 \cos^2 \theta (1 + \sin^2 \theta) + 0.25 \sin^4 \theta]$$

$$T_2(\theta) = 0.125 q \sin^4 \theta$$

となる。この式によって $\varphi(\alpha)$ は極点図上での異方性主軸の位置および異方性パラメータ p, q によって変化することがわかる。式(11)を使うと、ある方向の試料において底面の集合組織によって異方性の主軸を定めた場合、塑性歪比 φ の変動で追跡すると、その時どの様ななり系、双晶系が活動したかを大体知ることが出来る。今、 $\alpha=0^\circ$ とすると

$$\varphi(0) = \frac{\cos^2 \theta + p \sin^2 \theta}{1 + p} \quad (12)$$

であるが、この時引張試験中に底面の集合組織の変化が無視出来る様な歪領域について考えると、この領域では異方性主軸の回転はないとして良い。したがって $\varphi(0)$ が引張歪によって変化するなら、これは $p \neq 0$ を表わすので双晶変形が起っていることになる。また、 $p=0$ なら $\varphi(0) = \cos^2 \theta$ となり、これは異方性主軸が回転しないかぎり $\varphi(0)$ が一定値で、しかも $\varphi(0)$ から異方性主軸の位置が判別できることになる。しかし、このことだけから柱面なりや $\{10\bar{1}1\} \langle 11\bar{2}0 \rangle$ なりおよび底面なりがどの程度生じているか判明することはできない。 $\alpha=90^\circ$ の場合、 $p=0$ 即ち双晶が観察されない[†]歪領域では

$$\varphi(90) = \frac{1}{\cos^2 \theta + q \sin^2 \theta} \quad (13)$$

となり柱面なりで $q=0$, $\{10\bar{1}1\} \langle 11\bar{2}0 \rangle$ で $q=1.2$ となるので $\varphi(90)$ の値によってなり系の区別ができる。しかし、双晶が観察された場合には式(13)中に p が入ってくるので未知数が二つになり、 90° 方向の φ 値だけから異方性パラメータ p, q を決めることはできない。この場合には他の方向、例えば 67.5° 方向の φ 値を併用することにより

p, q を決定できる。ところで、前述のことが成立するためには、次のことを前提としなければならない。即ち、「板面内の引張試験において、どの方向から引張った場合も各なり系或いは双晶系の活動状況が同じである」この前提は p および q が引張方向 α に依存せず一定であるとしたことと同等である。

上記の前提をおくと異方性パラメータ p および q について次の二つの場合が考えられる。まず第1は、引張変形中に p および q が一定の場合である。この時異方性主軸が変形中に移動しない限り、式(5), (6)の相当応力-相当歪関係をそのまま使うことができ、全歪理論から求めた関係は歪増分理論から求めたものと一致する。しかし、実際のチタン板の φ 値は第5報⁽²⁾の Fig.1 から見てわかる様に引張歪によって変動する。そこで第2として p および q が変形の進行によって変化するが、その変化の仕方が板面内の各方向の引張の場合に同じである場合が考えられる。この場合に時々刻々の p および q を使って相当応力-相当歪関係を追跡することは、歪増分理論を適用することである。また、或歪のところでの p および q を使って相当応力-相当歪関係を求めることは、全歪理論による近似を意味する。全歪理論による近似は特にとり上げた歪近傍における p および q の変動が小さい場合には、その歪近傍で良い近似を与えられると思われる。また、歪増分理論による取扱いが複雑であるので「全歪理論による近似でいかに各方向の相当応力-相当歪曲線が一致するか」ということに苦心が払われてきたので⁽⁵⁾、著者等も全歪理論による近似を使っていくことにする。

上記の前提条件が成立しているか否かは、二つの方法で吟味することができる。一つは、与えられた p および q (これ等を決定するには、板面内の2方向の φ 値を測定すればよい) を使って求めた各方向の相当応力-相当歪曲線が一致するかしないかを見ることであり、他の一つは、与えられた p および q を使って式(11)から求めた φ 値が実験値と一致するかどうかである。これ等二つは同時に満足されねばならない。また、これ等の二つが同時に満足されない場合には、負荷方向によって活動なり或いは双晶系の寄与の仕方が異なることになるので加工硬化に異方性があるということになる。以上のことを基礎にして異方性主軸の回転が無視できると思われる10%前後の引張歪までについて実験データを解析する。前述の如くチタン板の相当応力-相当歪関係は変形双晶が変形中に発生しているか否かによって大きく変わってくるので、まず引張変形後の一様伸び部の金属組織を観察した。その結果を Table 2 に示す。また、参考のために Table 3 には各試料の一様伸びを載

[†] 双晶が観察されなくても $\langle 11\bar{2}3 \rangle$ なりを起せば $p \neq 0$ となる。しかし Paton 等⁽⁴⁾の data から a+c 転位は 300°C 以下では $\{11\bar{2}2\}$ 双晶に伴ってごくわずかに観察されるだけであるので室温で双晶が観察されない時には $p=0$ として良いと思われる。

Table 2 Variation of the amount of deformation twins with grain size and tensile direction in the plane of the sheet. Observation was made at the end of uniform elongation with an optical microscope.
amounts of twins: ○ large, △ middle, × smaller nothing.

G.S. (μ)	0°	22.5°	45°	67.5°	90°
12	×	×	×	×	×
20	×	×	×	×	×
36	△	×	×	×	×
76	○	○	×	×	×
108	○	○	○	×	×
139	○	○	○	×	×

Table 3 Variation of the uniform elongation with grain size and tensile direction in the plane of the sheet. (unit%)

G.S. (μ)	0	22.5	45	67.5	90
12	22.5	20	12	13	11
20	20	20	14	11	10
36	29	20	12	10	11
76	51	50	11	9	10
108	51	54	37.5	8	9
139	50	52.5	50	9	10

せておいた。Table 2 からわかる様に結晶粒径 36μ 以下のものではすべての引張方向において双晶がほとんど観察されなかったのでもうこれ等の試料の相当応力-相当歪関係について解析する。

1. 結晶粒径 36μ 以下

双晶変形が起きていないので式(5), (6)中で $p=0$ と置くことができる。したがって相当応力-相当歪関係は全歪理論で近似すると異方性主軸に関して

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(\sigma_X - \sigma_Y)^2 + 4\tau_{XY}^2 + q(\tau_{YZ}^2 + \tau_{ZX}^2)} \quad (14)$$

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{(\epsilon_X - \epsilon_Y)^2}{4} + \gamma_{XY}^2 + 4\frac{(\gamma_{XZ}^2 + \gamma_{YZ}^2)}{q}} \quad (15)$$

となる。ただし、異方性主軸の位置は前報の結果をそのまま使うことにする。ここで $q=1.2$ 即ち $\{10\bar{1}1\} \langle 11\bar{2}0 \rangle$ になりが生ずるとした場合の相当応力-相当歪曲線を Fig. 4 に示す。ただし、これ等の図中で相当歪は対数歪から求めたものでなく、引張歪をそのまま使った(以後この歪を相当歪と呼ぶ)。相当応力-相当歪曲線相互の程度を見るにはこの方法で充分である。この取扱および式(14)によって 0° 方向の相当応力-相当歪曲線はこの場合 ($p=0$)、 0° 方向の真応力引張歪曲線と一致する。

Fig. 4 から明らかに結晶粒径 12μ の試料では、降伏は $\{10\bar{1}1\} \langle 11\bar{2}0 \rangle$ になり生ずるとしたので、降伏応力は各方向共良い一致を示すが、その後の曲線は応力歪曲線の説明のところで述べたと同様に二つのグループ A ($0^\circ, 22.5^\circ$) および B ($45^\circ, 67.5^\circ, 90^\circ$) に分かれる。この傾向は結晶粒径 20μ でも 36μ のものでも成立する(ただし、 20μ および 36μ のものでは降伏応力を定めた q 値がそれぞれ $0.80, 0.60$ であったので、 $q=1.2$ とした場合には当然こ

Fig. 4 Equivalent stress-equivalent strain curve of the specimen with grain size 12μ when $q=1.2$.

の点で一致が悪くなる)。そこで、代表的な例として結晶粒径 12μ の試料についてこれ等のグループを各々別個に考えて見る。

(1) Bグループの相当応力相当歪関係

このグループは第5報⁽²⁾の Fig. 1 から解る様に φ 値が引張によって変化するので、相当応力-相当歪関係を導く場合、どの歪での φ 値を使ったら最も良いかという問題が出てくるが、幸い引張歪 $5\sim 10\%$ での φ 値の変動が少ないので引張歪 10% 前後の φ 値を使うことにする。

Fig. 5 は 90° 方向に 10% 程度引張った時の φ 値から式(13)を使って求めた q 値を式(14), (15)に代入して得た相当応力-相当歪曲線である。この図に参考のためにAグループの曲線を記入した。これ等の図から明らかにBグループの各方向の曲線は相当歪 $4\sim 5\%$ 以上で完全に一つの相当応力-相当歪曲線にまとめることができる。またこのことは結晶粒径 20μ および 36μ のものについても成立した。引張歪 10% での φ 値を使ったので降伏応力および低

Fig. 5 Equivalent stress-equivalent strain curve of the specimen with grain size 12μ . The q value was estimated from the φ value of the transverse direction at $\epsilon=0.1$, $q=1.82$, tensile direction. ○ 0° , △ 22.5° , ● 45° , □ 67.5° , × 90°

歪のところでの相当応力が一致しなくなったのは当然である。一方、AグループはBグループとも一致せずBグループ内の一致に比べてAグループ内の一致も余り良くない。したがってAグループとBグループは加工硬化の仕方が違うということになる。

(2) Aグループの相当応力-相当歪曲線

このグループの特徴は応力歪曲線において或る歪のところでは flow stress の大小関係が逆転することおよび φ 値が引張歪によって大きく変化しないことの2点である。もし 0° 方向と 22.5° 方向において加工硬化の異方性がないとすると q 値は 22.5° 方向の塑性歪比 φ の式から決定できる。そこで $\varphi(22.5^\circ) = 0.73$ および 0.71 の場合の q 値を計算して相当応力-相当歪曲線を求めたのが Fig. 6 である。この図から解るように結晶粒径 12μ の試料では $\varphi(22.5^\circ)$ が 0.73 よりも 0.71 とした場合の方が 0° 方向との一致が良い。しかし、 0.71 の場合にも flow stress の逆転関係がまだ残っていることおよび実際に 0° 方向と 22.5° 方向の相当応力が一致する $4\sim 5\%$ から $12\sim 13\%$ の相当歪の所までの 22.5° 方向の φ 値は $0.73\sim 0.72$ であるので、 0° 方向と 22.5° 方向では若干加工硬化に異方性があると考えた方が良いと思われる。このような加工硬化の異方性は結晶粒径 20μ および 36μ のものについても認められた。

Fig. 6 Equivalent stress-equivalent strain curve of group A. Grain size 12μ

2. 結晶粒径 76μ 以上のもの

結晶粒径が 76μ 以上になると引張方向によって変形中に双晶が発生する。したがって双晶の発生するものとしなないものでは相当応力-相当歪関係が異なる。Table 2 によってこの区別をすると A ($0^\circ, 22.5^\circ$), B ($67.5^\circ, 90^\circ$) の2グループに分かれる。 45° 方向の引張りでは引張歪 10%

程度では 0° 方向および 22.5° 方向に較べて双晶の発生量が著しく少ないことおよび応力歪-曲線は $67.5^\circ, 90^\circ$ 方向のものとかかなり平行を保っているので、 45° 方向のこの程度の歪まではBグループに含めて考えることにする。ここでは典型的な例として結晶粒径 139μ のものについて考察するが、 76μ および 108μ のものについても全く同じ傾向がみられた。

(1) Bグループの相当応力-相当歪曲線

まず、降伏応力の面内異方性を計算するのに使った 90° 方向の φ 値から相当応力-相当歪曲線を求めたものが Fig. 7 である。この結果からいづれの粒径においても歪が大きくなるにつれ各方向から計算した相当応力の差が大きくなるのがわかる。ただし、 67.5° 方向および 90° 方向から計算したものは、かなり良く一致しているが、第5報⁽²⁾の Fig. 2 から解る様にこれ等の方向では、引張歪による φ 値の変動が大きいため、これ等の曲線が正しい相当応力-相当歪関係になっているとはいえない。そこで前と同様、引張歪 10% 前後における 90° 方向の φ 値から q 値を求めて、式(14), (15) に代入した結果を Fig. 8 に示す。この図から明らかに 45° 方向も含めてBグループは一つの相当応力-相当歪曲線にまとめることが解る。

Fig. 7 Equivalent stress-equivalent strain curve of the specimen with grain size 139μ calculated from the q value at yielding. $q=0.0$ tensile direction: $\circ$ 0° , $\triangle$ 22.5° , $\bullet$ 45° , $\square$ 67.5° , $\times$ 90°

Fig. 8 Equivalent stress-equivalent strain curve of group B. grain size 139μ . The q value was estimated from the φ value of the transverse direction at $\varepsilon=0.1$. $q=1.20$ tensile direction: $\bullet$ 45° , $\square$ 67.5° , $\times$ 90°

(2) Aグループの相当応力相当歪曲線

このグループでは変形中に双晶が発生するので $p \neq 0$ としなければならない。ここで、もし 0° 方向と 22.5° 方向に加工硬化の異方性がない場合には、 0° 方向の φ 値と 22.5° 方向の φ 値を与える式を連立させることにより、異方性パラメータ p, q が決定される。前報の塑性歪比-引張歪曲線において、引張歪 10% における φ 値から p, q を求めた結果は例えば結晶粒径 139μ のものについては

$$\bar{\sigma} = 0.941 \sigma(22.5^\circ)$$

となった。この値を使って求めた相当応力-相当歪曲線を Fig. 9 に示す。この結果も明らかに 0° 方向と 22.5° 方向では曲線が一致しないので、 0° 方向と 22.5° 方向では加工硬化の仕方が異なるということがいえる。したがって、 p および q は 0° 方向と 22.5° 方向で異なった値を持っていることができる。

Fig. 9 Equivalent stress-equivalent strain curve of group. A grain size 139μ . The p and q values were estimated from the φ values of 0° and 22.5° directions at $\epsilon = 0.1$. $p = 0.13$, $q = 0.05$. tensile direction: $\circ$ 0° , $\triangle$ 22.5° .

3. 塑性歪比による検討

前にも述べたように相当応力-相当歪関係を求める際に定めたパラメータ p, q の値は加工硬化に異方性のないかぎり各方向について同じでなければならない。したがって各方向の塑性歪比 φ は p, q が決まると必然的に求まってしまうものである。今までの結果ではBグループについては 90° 方向から求めた q 値(この方向では双晶変形を無視できるとしたので $p = 0$ である)によって相当応力相当歪曲線がかなりよく一致したので q 値を使って各粒径各方向の φ 値の理論値と実験値を比較してみた(Table 4)。この表から明らかにBグループでは塑性歪比の理論値と実験値がよく一致していることがわかる。またAグループ($0^\circ, 22.5^\circ$)では粒径の小さいものではかなりよく一致しているが、上で述べたようにこの場合は相当応力-相当歪曲線が一致しない。また粒径が大きくなるとAグループ特に 0° 方向では理論値と実験値が異なってくるが、これは双晶変形が起きている、即ち $p \neq 0$ となっているので当然である。

以上の結果からもBグループ内では加工硬化に異方性がないと考えてよいと思われる。

Table 4 The theoretical and experimental values of φ at $\epsilon = 0.1$. The theoretical values were estimated from φ of 90° at $\epsilon = 0.1$.

$\varphi(\text{Th})$: theoretical
 $\varphi(\text{Ex})$: experimental

Grain size	q at 10% strain	φ	α°	0	22.5	45	67.5	90
12	1.82	$\varphi(\text{Th})$ $\varphi(\text{Ex})$		0.71 0.71	0.73 0.72	0.76 0.75	0.80 0.79	0.81 0.81
20	1.76	$\varphi(\text{Th})$ $\varphi(\text{Ex})$		0.71 0.70	0.73 0.72	0.76 0.77	0.80 0.80	0.82 0.82
36	1.71	$\varphi(\text{Th})$ $\varphi(\text{Ex})$		0.71 0.69	0.73 0.72	0.77 0.77	0.81 0.80	0.83 0.83
76	1.49	$\varphi(\text{Th})$ $\varphi(\text{Ex})$		0.67 0.63	0.70 0.67	0.76 0.77	0.83 0.82	0.86 0.86
108	1.47	$\varphi(\text{Th})$ $\varphi(\text{Ex})$		0.63 0.60	0.66 0.66	0.73 0.76	0.81 0.81	0.85 0.85
139	1.20	$\varphi(\text{Th})$ $\varphi(\text{Ex})$		0.63 0.59	0.66 0.64	0.75 0.75	0.87 0.87	0.93 0.93

4. Hill の降伏条件式との比較

さて Hill の降伏条件式⁽³⁾で相当応力-相当歪関係を導いた場合、結晶粒径が小さい場合は著者等の降伏条件式による解析結果と同じ様に、AグループとBグループに分かれ、各々のグループ内では相当応力-相当歪曲線がかなり良く一致した。このことは、著者等の式と Hill の式が近似的に等しいという可能性を表わしているものと思われる。そこで、 $\bar{\sigma} = C \cdot \sigma(\alpha)$ における C 値を著者等の式(14)と Hill の式から求めた(Table 5)。この結果、Hill の C の値は著者等のものと非常に良く一致していることがわかる。Table 5 には 36μ の場合について示したが、 12μ と 20μ の場合にも両者の一致は非常によい。この様に著者等の式と Hill の式が一致した原因は、 0° 方向の φ 値が歪によってほとんど変わらなく、 45° 方向と 90° 方向では、加工硬化の異方性がないと考えられたからである。即ち、第5報で示した様に、 $p = 0$ の場合には r 値が正確に測定されれば著者等の式は Hill の式と一致するが、上記のことは、これを表わしているにすぎない。したがって、チタン板において、各引張方向で双晶の発生がなく、また、加工

Table 5 Comparison of coefficients C in $\bar{\sigma} = C(\alpha)\sigma(\alpha)$ based on the theories of the present authors and Hill. C : Hill's theory, $C.T.T$: Authors' theory.

	G.S	36 μ
α°	C Hill	$C.T.T$
0	1.0	1.0
22.5	0.991	0.992
45	0.964	0.965
67.5	0.928	0.931
90	0.911	0.914

硬化に異方性がない場合には Hill の異方性降伏条件式で異方性主軸を従来通り圧延方向、幅方向、板厚方向にとっても相当応力 - 相当歪関係を求めることができる。

V. 結 言

底面の集合組織の集積が板厚方向から板幅方向に θ° 傾いているチタン板の一軸引張試験結果から相当応力 - 相当歪関係を考察した結果次のことがわかった。

(1) チタン板が変形する際、種々の迂り系あるいは双晶系が同時に働いているとすると降伏条件式は次の式で表わされる。

$$f = p \{ (\sigma_X - \sigma_Z)^2 + (\sigma_Y - \sigma_Z)^2 + 2\tau_{XY}^2 \} + q \{ \tau_{XZ}^2 + \tau_{YZ}^2 \} + H \{ (\sigma_X - \sigma_Y)^2 + 4\tau_{XY}^2 \}$$

ただし $\sigma_X, \sigma_Y, \tau_{YZ}$ は異方性主軸に関するもので、上記の底面の集合組織の場合、唯一の異方性主軸 (Z 軸) を底面の集積の最大のところにとることができる。

(2) 上記の降伏条件式は Hill の異方性降伏条件式において中心軸のまわりで降伏に関して対称的であるとした式と一致する。

(3) 異方性主軸 θ の回転が無視できる歪領域で上記のバ

ラメータ p, q 等が変形の進行と共に変化する場合は各活動系の変形に対する寄与の割合が変化しているといえることができる。

(4) 上式を使って Hill と同様に相当応力 - 相当歪関係を求めた場合、チタン板の板面内の各方向から求めた相当応力 - 相当歪曲線が一致するのは $45^\circ, 67.5^\circ$ および 90° 方向のものであり、 0° 方向と 22.5° 方向は互いに一致せずまた上記の方向とも一致しなかった。この不一致はパラメータ p, q 等がそれらの方向で異なっていることに起因するので、それらの方向間に加工硬化の異方性が存在しているといえることができる。

文 献

- (1) 田辺龍彦, 大久保忠恒, 五弓勇雄: 金属学会誌, **38** (1974), 499.
- (2) 田辺龍彦, 大久保忠恒, 五弓勇雄: 金属学会誌, **38** (1974), 505.
- (3) R. Hill: *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford Press, Chap. 12, (1950), 320.
- (4) N.E. Paton and W.A. Backofen: *Met. Trans.*, **1** (1970), 2844.
- (5) 福田 実: 塑性と加工, **7** (1966), 355.

酸化鉛による純金属の高温加速酸化*

大 林 幹 男**

Mikio Obayashi: A Study of Accelerated Oxidation of Element Metals Caused by Lead Oxide. Lead oxide (PbO) is generally known to cause accelerated oxidation in heat-resisting alloys. To make clear this phenomenon, the oxidation behavior and the oxidation products were investigated for element metals such as iron, nickel, copper, and tungsten subjected to accelerated oxidation by PbO.

The results obtained are summarized as follows.

(1) At temperatures above the melting point of PbO, the accelerated oxidation of all the metals studied was observed to proceed by the same mechanism; oxidation of metals by molten PbO and subsequent dissolution of the oxides into the melt.

At temperatures below the melting point of PbO, however, the oxidation behavior was divided into the three types according to its characteristics of oxidation.

- (i) Formation of low melting point eutectic oxide: Fe, W, Mo, Ti, Si, etc.
- (ii) Dissolution and grain boundary attack of the metals by molten Pb: Ni.
- (iii) Complex reaction involving both types (i) and (ii): Cu.

(2) The starting temperature of the accelerated oxidation was found to be closely related with the temperature of formation of a molten phase between metal oxide and lead oxide. This suggests that the accelerated oxidation is caused mainly by molten PbO-base oxides.

(Received December 6, 1973)

** 株式会社豊田中央研究所 (Toyota Central Research & Development Lab., Inc., Nagoya)

* 酸化鉛による高温異常腐食の研究 (第 5 報)