個数基準の新しい Rosin-Rammler 分布と 各種平均粒径の算出

伊藤 孝至* 鰐部 吉基* 坂尾 弘**

J. Japan Inst. Metals, Vol. 51, No. 10 (1987), pp. 956-964

New Number Based Expression and Various Mean Particle Diameters for Rosin-Rammler Distribution

Takashi Itoh*, Yoshimoto Wanibe* and Hiroshi Sakao**

The present study deals with the characterization in the particle size distributions of metallic powders. The Rosin-Rammler distribution is used as a particle size distribution function for its good applicability. First, a new number based expression is introduced for a modified Rosin-Rammler distribution which has been led in the previous paper, and compared with the previous expression. Next, the calculating equations are presented for the various mean particle diameters of the powders, having the distributions. Furthermore, the calculation can be extended to the cases of classification and blending of those powders.

The results are summarized as follows:

(1) New number based approximate equation (16) is at least ten times more accurate for the expression of the modified Rosin-Rammler distribution than the equation (11) in the previous paper.

(2) The equations for the calculation of the various mean particle diameters of the distributions are tabled in Table 3.

(3) The various mean particle diameters can be also calculated in the cases of classification and blending of the powders, having the distributions.

The present results are also applicable to other distributions such as grain, pore sizes, etc.

(Received May 20, 1987)

Keywords: powder, particle size distribution, Rosin-Rammler distribution, number base approximation, mass base approximation, mean particle diameter, classification, blending

I. 緒 言

粉体は粒度分布をもつ粒子群によって構成されるため、その分布は基本的な特性の1つとして重要である。粒度分布を表す分布関数として Rosin-Rammler 分布⁽¹⁾(以降は R-R 分布と記述する)が対数正規分布とともに広く用いられている。前報⁽²⁾で報告したように R-R 分布は、金属粉が通常測定される質量基準での粒度分布状態を表現するのに適しているが、それに対応する個数基準の表現や各種平均粒子径の算出について不備点がある。そこで本研究では、前報⁽²⁾で導入した修正 R-R 分布における個数基準の表現としてより正確な近似式を提出し、各種の平均粒子径さらには粉体の分級や配合におけるそれらの算出式を導出し、金属粉の粒度特性を的確に把握することを目的とする。

II. 修正 R-R 分布における個数基準の表現式の導入

1. 修正 R-R 分布式の質量基準から個数基準への理論的変換

既に前報⁽²⁾で導入したように、修正 R-R 分布式(質量基準)は、従来の R-R 分布式を有限な粒度範囲($D_{\min} \sim D_{\max}$)で基準化したもので、

$$R(D_p) = \frac{100}{\alpha - \beta} \left[\exp \left\{ - \left(\frac{D_p}{D_0} \right)^m \right\} - \beta \right] \quad (1)$$

で表される。ここで、 R は積算ふるい上質量百分率(%), D_p は粒子径(μm), $m^\dagger$ と D_0 はともに修正 R-R 分布関数式のパラメータで、 m は均等数(-), D_0 は粒度特性数(μm)で積算ふるい上 36.8% 粒子径に相当する。また

[†] 均等数の記号としては通常 n を用いるが、ここでは質量基準(mass base)を踏まえて m の記号で表し、個数基準(number base)のそれを n と表す。

* 名古屋大学工学部(Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya)

** 名古屋大学名誉教授(Emeritus Professor of Nagoya University)

$D_{\min}$ は最小粒径(μm), $D_{\max}$ は最大粒径(μm)で、それぞれ従来の R-R 分布式における積算ふるい上 99.9% ($\alpha = 0.999$) と 0.1% ($\beta = 0.001$) に相当する。Fig.1 は式 (1) に基づいて R.R.S. 線図に修正を加えたもので、均等数 $m = 2.5$ 、粒度特性数 $D_e = 70.0 \mu\text{m}$ の場合について示している。破線は従来の R-R 分布、実直線は修正 R-R 分布である。この線図では、積算ふるい上の 100% および 0% 付近が大きく拡大されるため両者の違いが明瞭に現れるが、通常の積算分布曲線の形で表すとその違いはほとんど無視できるほどのものである。それはすなわち、R-R 分布にこの程度の修正を加えてもその本質はほとんど変化しないことを意味する。

質量基準で表わされた式 (1) から個数基準の式を理論的に導出するために、式 (1) を微分すると次式を得る。

$$-\frac{dR}{dD_p} = \frac{100}{\alpha - \beta} \frac{m}{D_e} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-1} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} \quad (2)$$

また、質量基準と個数基準との間には、微小区分において次式の関係がある。

$$dR = \left(\frac{D_p}{D_v}\right)^3 dY \quad (3)$$

ここで、 D_v は平均体積径(μm)、 Y は積算ふるい上個数百分率(%)である。平均体積径 D_v は、定義より修正 R-R 分布の場合次式となる。

$$\left(\frac{1}{D_v}\right)^3 = \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{m}{D_e^4} \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-4} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p \quad (4)$$

式 (2), (3), (4) より個数基準の頻度分布関数式すなわち微分式を得る。それを D_p から $D_{\max}$ まで積分し整理すると、積算ふるい上個数百分率 Y

Fig.1 The modification illustrated in the R.R.S. diagram; m is the distribution constant, D_e the absolute size constant, $D_{\max}$ the maximum particle size and $D_{\min}$ the minimum one, respectively.

$$Y(D_p)$$

$$= 100 \frac{\int_{D_p}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-4} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-4} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p} \quad (5)$$

が求まる。これが、修正 R-R 分布における個数基準の理論的表現である。Fig.2 は式 (1) と (5) より求めた両基準の修正 R-R 分布の一例である。実線が質量基準、破線が個数基準の粒度分布を表している。式 (5) の有限積分の計算には、高橋、森⁽³⁾⁽⁴⁾の二重指数関数型積分公式に基づく自動積分法を用いている。

Fig.2 A comparison of the cumulative modified R-R distributions as determined on the mass (solid line) and number (broken line) bases.

2. 修正 R-R 分布における個数基準式のいろいろな表現

(1) 理論的に導出が可能な表現式

修正 R-R 分布における個数基準の理論式である式 (5) に代わる表現式として、先ず理論的に導出できるものを 2 つ示す。

第 1 は、第 2 種不完全ガンマ関数を使って表現する方法で、均等数 $m \geq 3$ において式 (5) は理論的に次式の形で表すことができる。

$$Y(D_p) = 100 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{m}, \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^m\right) - \Gamma\left(\frac{3}{m}, \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{m}, \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^m\right) - \Gamma\left(\frac{3}{m}, \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^m\right)} \quad (6)$$

しかし、実際の金属粉のほとんどが均等数 $m \leq 3$ であること⁽²⁾、また第 2 種不完全ガンマ関数が手軽に計算できないことが式 (6) の欠点である。

もう 1 つの理論的表現式は次のような手順によって導かれる。式 (5) は $X = (D_p/D_e)^m$ と置くことによって、

$$Y(X) = 100 \frac{\int_{X_{\min}}^{X_{\max}} X^{-3/m} \exp(-X) dX}{\int_{X_{\min}}^{X_{\max}} X^{-3/m} \exp(-X) dX} \quad (7)$$

となる。ここで、 $X_{\min} = (D_{\min}/D_e)^m = -\ln(\alpha)$, $X_{\max}$

$= (D_{\max}/D_e)^m = -\ln(\beta)$ である。式(7)の積分において、 $\exp(-X)$ は均等数 m に依存することなく理論的に無限級数と次式で表されるから、

$$\exp(-X) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!} X^{i-1} \quad (8)$$

式(7)に式(8)を代入して積分を実施した後、 X , $X_{\min}$, $X_{\max}$ のそれぞれを元の式に戻すと、

$$Y(D_p) = 100$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!} \frac{1}{-3/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e} \right)^{-3+m \cdot i} - \left(\frac{D_p}{D_e} \right)^{-3+m \cdot i} \right\}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!} \frac{1}{-3/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e} \right)^{-3+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e} \right)^{-3+m \cdot i} \right\}} \quad (9)$$

を得る。ただし、 $-3/m+i=0$ となる項が存在する場合は、その項のみ次式に置き換えられる。

$$\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!} \frac{1}{-3/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e} \right)^{-3+m \cdot i} - \left(\frac{D_x}{D_e} \right)^{-3+m \cdot i} \right\} \\ \rightarrow \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!} \left\{ \ln \left(\frac{D_{\max}}{D_e} \right) - \ln \left(\frac{D_x}{D_e} \right) \right\}$$

ここで、 D_x は D_p もしくは $D_{\min}$ を意味する。この式(9)は、有限積分で表される式(5)を原始関数式の形で表現したもので、いかなる値の均等数 m にも適用することができる。

しかし、式(9)もまた積算ふり上個数百分率 Y の算出においてかなり面倒な計算が必要であり実用的ではない。

(2) 近似による表現式

そこで、本研究では、手軽に計算できなおかつ広い範囲の均等数 m に適用できる式(5)に代わる近似式の導入を試みた。先ず最初に前報⁽²⁾で導出した近似式を示す。

$$Y(D_p) \approx \frac{100}{\alpha' - \beta'} \left[\exp \left\{ - \left(\frac{D_p}{D'_e} \right)^n \right\} - \beta' \right] \equiv Y'(D_p) \quad (10)$$

ここで、 n は個数基準の均等数、 D'_e は個数基準の粒度特性数で、 m と n および D_e と D'_e との間にはそれぞれ関係式が用意されており、 n と D'_e は m および D_e から算出することができる⁽²⁾。また、 $\alpha' = \exp \{ -(D_{\min}/D'_e)^n \}$, $\beta' = \exp \{ -(D_{\max}/D'_e)^n \}$ と表される。この式は、理論的根拠に欠けるが応用上の利便を考慮して表したもので、適用範囲は均等数 m が1から5の範囲である。

更に、式(10)に補正項を加えた次式も導入した。

$$Y(D_p) \approx 100 \{ y' + a y' \cdot (y' - 1) \cdot (y' - b) \} \equiv Y_{11}(D_p) \quad (11)$$

ここで、 $y' = Y'/100$ を意味し、 a と b は共に定数で均等数 m によってのみ変化する。 a および b と m との関係は図としてそれぞれ与えられている⁽²⁾。この式は、式(10)以上に良い近似精度を得ている。しかしながら、式(11)であってもその近似精度はまだ不十分で、後で述べる各種平均粒子径の算出においてかなりの誤差が生じるものがあった。そこで、全く異なる考え方によって式(5)の近似式の導入を試みる。

今回新たに試みる近似方法は、式(9)の導出手順を基に

するもので、式(8)に代わる多項式による $\exp(-X)$ の近似式を導入し、最終的に式(5)の近似式を導出するものである。 $\exp(-X)$ の近似式としては、無限級数と形である式(8)を変形し第 k 項までの和とする

$$\exp(-X) \approx \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!} X^{i-1} \quad (12)$$

が考えられる。そこで、式(12)の近似精度に及ぼす項数 k の影響について検討する。その結果を Fig.3 に示す。この図で、横軸は項数 k を、縦軸は式(12)の近似精度として次式で与えられる二乗平均誤差 σ_{12} を対数表示で表している。

$$\sigma_{12}^2 = \frac{1}{X_{\max} - X_{\min}} \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!} X^{i-1} - \exp(-X) \right\}^2 dX \quad (13)$$

なお、この計算には式(5)の積分値計算と同様な方法⁽³⁾⁽⁴⁾を用いている。

Fig.3 より、例えば、二乗平均誤差 $\sigma_{12} = 0.003$ とするためには式(12)において第20項までの和が必要であり、それに基づいて導出される式(9)に代わる近似式もまた、積算ふり上個数百分率 Y を算出するのに依然として面倒な計算が必要である。

そこで本研究では、 $X_{\min}$ から $X_{\max}$ までの範囲で $\exp(-X)$ を比較的少ない項数の多項式で精度よく近似することを検討し、その式の導入を試みる。今回、検討の対象とする多項式は6項から成り次式で定義される。

$$\exp(-X) \approx \sum_{i=1}^6 a_{i-1} X^{i-1} \quad (14)$$

ここで、 a_{i-1} は定数で $a_0 = 1$ である。これは $X = 0$ において $\exp(-X) = 1$ となることから決定している。 a_0 以外

Fig.3 The relationship between the number of term k and the mean square error σ_{12} (see eq. (13)), where one-dot chain shows the σ_{14} (eq. (15)).

† 近似多項式の項数は、計算の容易さと近似精度という相反する要求の両方を満たす必要がある。そこで試行錯誤の結果、6項を多項式の項数として採用した。

Table 1 Constant term and coefficients in eq. (14).

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1.	-9.2135×10^{-1}	3.6011×10^{-1}	-7.2132×10^{-2}	7.2526×10^{-3}	-2.8966×10^{-4}

の a_{i-1} の数値は、逐次近似による最小二乗法⁽⁵⁾を用いて $\exp(-X)$ の曲線に最も近いものになるように決定する。その結果を Table 1 に示す。

この様にして定数を得た式(14)の近似精度を式(13)と同様な式

$$\sigma_{14}^2 = \frac{1}{X_{\max} - X_{\min}} \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} \left\{ \sum_{i=1}^6 a_{i-1} X^{i-1} - \exp(-X) \right\}^2 dX \quad (15)$$

から求めると、二乗平均誤差は $\sigma_{14} = 0.005$ となりほぼ式(10)の第 20 項までの和に相当する精度が得られていることがわかる。また、式(14)による $\exp(-X)$ の近似状況を Fig.4 に示す。この図において横軸は X を、縦軸は $\exp(-X)$ および式(14)から算出される数値を表しており、実線が $\exp(-X)$ 、破線が式(14)によるものである。

以上のことから、式(14)は比較的少ない項数で精度よく $\exp(-X)$ を近似できる多項式であることがわかる。したがって、式(14)を $\exp(-X)$ の近似式として採用し式(9)に代わる近似式を求めると、

$$Y(D_p) \equiv 100 \frac{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-3/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e} \right)^{-3+m \cdot i} - \left(\frac{D_p}{D_e} \right)^{-3+m \cdot i} \right\}}{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-3/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e} \right)^{-3+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e} \right)^{-3+m \cdot i} \right\}} \equiv Y_{16}(D_p) \quad (16)$$

となる。ただし、 $-3/m+i=0$ となる項が存在する場合は、その項のみ次式に置き換えられる。

$$\frac{a_{i-1}}{-3/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e} \right)^{-3+m \cdot i} - \left(\frac{D_x}{D_e} \right)^{-3+m \cdot i} \right\} \rightarrow a_{i-1} \left\{ \ln \left(\frac{D_{\max}}{D_e} \right) - \ln \left(\frac{D_x}{D_e} \right) \right\}$$

ここで、 D_x は D_p もしくは $D_{\min}$ を意味する。こうして得られた式(16)は、有限積分式で表される式(5)を原始関

Fig.4 The adaptability of eq.(14); solid line based on $\exp(-X)$ and broken line on eq. (14).

数式の形で近似したもので、いかなる値の均等数 m にも適用することができ、なおかつ式(16)による積算ふるい上個数百分率 Y の算出も精度良く比較的簡単にできる。

Fig.5 において式(11)と式(16)の式(5)に対する近似精度の比較を試みた。近似精度はやはり二乗平均誤差で評価し、均等数 m に対するその値の変化という形で図示している。式(11)における二乗平均誤差は、

$$\sigma_{11}^2 = \frac{1}{X_{\max} - X_{\min}} \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} \{Y_{11}(D_p) - Y(D_p)\}^2 dD_p \quad (17)$$

で与えられ、式(16)においては

$$\sigma_{16}^2 = \frac{1}{X_{\max} - X_{\min}} \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} \{Y_{16}(D_p) - Y(D_p)\}^2 dD_p \quad (18)$$

で与えられる。この結果から式(16)の近似精度は、均等数 m によって異なるが、式(11)のそれよりもほぼ 10 倍以上良いことがわかる。

Fig.5 The precision of eq. (11) (solid line) and eq. (16) (broken line) as approximation.

III. 修正 R-R 分布における各種平均粒子径の算出

粉末冶金の分野において、粉体の粒度を論じる時に平均径と称して中位径(50% 粒子径)を使用することが多い。しかし、この中位径は粒度を測定する基準(例えば個数基準や質量基準など)によってかなり異なった数値となる。また、ある特性と平均径との関係を議論する場合には、その特性がもつ物理的な意味を考慮して適した平均粒子径を選択する。したがって、各種平均粒子径を知ることが必要である。しかしながら、修正 R-R 分布においてそれらの解析的な計算式の導出は行われておらず、その点で対数正規分布に劣っている。そこで本研究では、修正 R-R 分布における各種平均粒子径の算出式の導出を検討する。

Table 2 Mean particle diameter's table.

Name of mean particle diameter	Symbol	Definition		Physical meaning
		Number base	Mass base	
Number mean diameter	D_1	$\frac{\sum (nd)}{\sum n}$	$\frac{\sum (w/d^2)}{\sum (w/d^3)}$	$\sum (nd) / D_1$: Total number of particles $D_1 \cdot \sum n$: Total length of particles
Length mean diameter	D_2	$\frac{\sum (nd^2)}{\sum (nd)}$	$\frac{\sum (w/d)}{\sum (w/d^2)}$	
Surface mean diameter	D_3	$\frac{\sum (nd^3)}{\sum (nd^2)}$	$\frac{\sum w}{\sum (w/d)}$	$S_w = \phi / (\rho_p \cdot D_3)$: Specific surface area
Volume mean diameter	D_4	$\frac{\sum (nd^4)}{\sum (nd^3)}$	$\frac{\sum (wd)}{\sum w}$	
Mean surface diameter	D_s	$\sqrt{\frac{\sum (nd^3)}{\sum n}}$	$\sqrt{\frac{\sum (w/d)}{\sum (w/d^3)}}$	$\phi_s \cdot D_s^2$: Mean particle surface area
Mean volume diameter	D_v	$\sqrt[3]{\frac{\sum (nd^3)}{\sum n}}$	$\sqrt[3]{\frac{\sum w}{\sum (w/d^3)}}$	$\phi_v \cdot D_v^3$: Mean particle volume $1/(\rho_p \cdot \phi_v \cdot D_v^3)$: Number of particles in the unit mass
	D_{vd}	$\sqrt{\frac{\sum (nd^3)}{\sum (nd)}}$	$\sqrt{\frac{\sum w}{\sum (w/d^2)}}$	
	D_w	$\sqrt[4]{\frac{\sum (nd^4)}{\sum n}}$	$\sqrt[4]{\frac{\sum (wd)}{\sum (w/d^3)}}$	
Harmonic mean diameter	D_h	$\frac{\sum n}{\sum (n/d)}$	$\frac{\sum (w/d^3)}{\sum (w/d^4)}$	Mean specific surface area

1. 各種平均粒子径の理論的算出式

Table 2 に主な平均粒子径の名称, 定義式, 物理的意味などを示す⁽⁵⁾⁻⁽⁷⁾. 表中の定義式は, 「粉体は, 大きさ是不均一であるが形状が全く等しい粒子によって構成されている。」という仮定に基づいている. ここで, 定義式中の n と w はそれぞれ, 粒子径 d を有する粒子の個数(-)とその粒子群の質量(kg)を表し, 表中の ρ_p は粒子の密度(kg/m³), ϕ_s は表面積形状係数(-), ϕ_v は体積形状係数(-), $\phi = (\phi_s/\phi_v)$ は比表面積形状係数(-)そして S_w は比表面積(m²/kg)である. この表の各定義式から具体的に修正 R-R 分布の平均粒子径の算出式を導出する. 例えば個数平均径 D_1 を考える. 個数基準の定義式における分母は次式で解析的に与えられる.

$$\sum n = \frac{N}{100} \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{dY}{dD_p} \right) dD_p \quad (19)$$

同様に分子は

$$\sum (nd) = \frac{N}{100} \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{dY}{dD_p} \cdot D_p \right) dD_p \quad (20)$$

となる. ここで, N は粉体中に含まれる粒子の総数(-)である. これら 2 つの式に式(5)を代入して整理した式から,

$$D_1 = D_e \cdot \frac{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e} \right)^{m-3} \exp \left\{ -\left(\frac{D_p}{D_e} \right)^m \right\} dD_p}{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e} \right)^{m-4} \exp \left\{ -\left(\frac{D_p}{D_e} \right)^m \right\} dD_p} \quad (21)$$

を得る. 当然のことながら質量基準の定義式に式(1)を当

てはめても同じく式(21)を得ることができる.

他の 8 種類の平均粒子径についても同様な方法で算出式の理論式を導出できる. その導出結果を Table 3 にまとめて示す. これら平均粒子径の理論式を用いて求めた結果を Fig.6 の(a), (b)に示す. Fig.6 は 9 種類の平均粒子径のうちで物理的意味が明確な 5 種類(個数平均径 D_1 , 面積平均径 D_3 , 平均表面積径 D_s , 平均体積径 D_v , 調和平均径 D_h)について, 均等数 m ($0.2 \leq m \leq 5.0$)との関係をプロットしたものである. 図(a)は各平均粒子径 D_i と粒度特性数 D_e との比を縦軸にとっており, $0.2 \leq m \leq 1.0$ においては左側の対数目盛りで, $1.0 \leq m \leq 5.0$ においては右側の目盛りで表している. 図(b)では縦軸をその平均粒子径に相当する積算ふるい上質量百分率 $R(D_i)$ で表し, 図(a)と同様な目盛りの区別がある. また, 比較のため図(a)には中位径 D_{50} についても示す. 修正 R-R 分布の中位径 D_{50} は次式で与えられる.

$$D_{50} = D_e \left\{ -\ln \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right\}^{1/m} \quad (22)$$

なお, Table 3 に示す理論式から具体的に平均粒子径を算出する際には, 高橋, 森⁽³⁾⁽⁴⁾の二重指数関数型積分公式に基づく自動積分法を用いている.

Fig.6 から次のようなことがわかる. 修正 R-R 分布において,

(1) D_i/D_e や $R(D_i)$ は均等数 m によって大きく変化する, 中位径 D_{50} のそれらとは大きく異なる.

(2) 各種平均粒子径の間には特定の大小関数がある.

そこで, 9 種類すべての平均粒子径間の大小関係を調査し

Table 3 Theoretical and approximate expressions for nine kinds of mean particle diameters.

Symbol	Theoretical expression	Approximate expression
D_1	$D_e \cdot \frac{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-3} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-4} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}$	$D_e \cdot \frac{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-2/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{-2+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{-2+m \cdot i} \right\}}{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-3/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{-3+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{-3+m \cdot i} \right\}}$
D_2	$D_e \cdot \frac{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-2} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-3} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}$	$D_e \cdot \frac{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-1/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{-1+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{-1+m \cdot i} \right\}}{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-2/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{-2+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{-2+m \cdot i} \right\}}$
D_3	$D_e \cdot \frac{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-1} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-2} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}$	$D_e \cdot \frac{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{m \cdot i} \right\}}{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-1/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{-1+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{-1+m \cdot i} \right\}}$
D_4	$D_e \cdot \frac{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-1} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}$	$D_e \cdot \frac{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{1/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{1+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{1+m \cdot i} \right\}}{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{m \cdot i} \right\}}$
D_s	$D_e \cdot \sqrt{\frac{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-2} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-4} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}}$	$D_e \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-1/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{-1+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{-1+m \cdot i} \right\}}{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-3/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{-3+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{-3+m \cdot i} \right\}}}}$
D_v	$D_e \cdot \sqrt[3]{\frac{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-1} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-4} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}}$	$D_e \cdot \sqrt[3]{\frac{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{m \cdot i} \right\}}{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-3/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{-3+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{-3+m \cdot i} \right\}}}}$
D_{vd}	$D_e \cdot \sqrt{\frac{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-1} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-3} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}}$	$D_e \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{m \cdot i} \right\}}{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-2/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{-2+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{-2+m \cdot i} \right\}}}}$
D_w	$D_e \cdot \sqrt[4]{\frac{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-4} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}}$	$D_e \cdot \sqrt[4]{\frac{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{1/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{1+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{1+m \cdot i} \right\}}{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-3/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{-3+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{-3+m \cdot i} \right\}}}}$
D_h	$D_e \cdot \frac{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-4} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \left(\frac{D_p}{D_e}\right)^{m-5} \exp\left\{-\left(\frac{D_p}{D_e}\right)^m\right\} dD_p}$	$D_e \cdot \frac{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-3/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{-3+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{-3+m \cdot i} \right\}}{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-4/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{-4+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{-4+m \cdot i} \right\}}$

but if $h/m+i=0$ ($h=-4, -3, -2, -1, 0, 1$)

$$\text{then } \frac{a_{i-1}}{h/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{h+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{h+m \cdot i} \right\} \rightarrow a_{i-1} \left\{ \ln\left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right) - \ln\left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right) \right\}$$

た. その結果,

$$D_4 > (D_3, D_w, D_{vd}) > (D_v, D_2) > D_s > D_1 > D_h$$

の関係を得た. ここで, (D_3, D_w, D_{vd}) と (D_v, D_2) はそれぞれのグループでその大小関係が均等数 m の範囲によって異なり, 詳しく調べると次のようになった.

$$0.2 \leq m < 0.3520$$

$$D_w > D_3 > D_{vd}, D_v > D_2$$

$$0.3520 \leq m < 1.1827$$

$$D_3 > D_w > D_{vd}, D_v > D_2$$

$$1.1827 \leq m < 1.6976$$

$$D_3 > D_{vd} > D_w, D_v > D_2$$

$$1.6976 \leq m \leq 5.0$$

$$D_3 > D_{vd} > D_w, D_2 > D_v$$

を利用して近似的な算出式の導出を試みる. そこで先ず, 個数平均径 D_1 について考える. 理論式(21)に $X = (D_p/D_e)^m$ を代入し変形すると,

$$D_1 = D_e \cdot \frac{\int_{X_{\min}}^{X_{\max}} X^{-2/m} \exp(-X) dX}{\int_{X_{\min}}^{X_{\max}} X^{-3/m} \exp(-X) dX} \quad (23)$$

となり, この式に式(14)を代入し最終的に式(21)に代わる算出式(24)を得る.

$$D_1 = \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-2/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{-2+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{-2+m \cdot i} \right\} \\ \approx D_e \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-3/m+i} \left\{ \left(\frac{D_{\max}}{D_e}\right)^{-3+m \cdot i} - \left(\frac{D_{\min}}{D_e}\right)^{-3+m \cdot i} \right\} \quad (24)$$

同様な方法で, 他の平均粒径の近似的な算出式も導出できる. それらを理論式とともに Table 3 に併記する.

次に, このようにして導出した近似式が平均粒径の算

2. $\exp(-X)$ の近似を用いた各種平均粒径の算出式

各種平均粒径の計算を手軽なものにするために式(14)

Fig.6 The relationship between various mean particle diameters D_i and the distribution constant m ; (a) figured by the ratio D_i/D_e and (b) the cumulative over $R(D_i)$ ($i=1, 3, s, v, h, 50$).

出式として十分な精度をもつかどうかについて調査・検討する。

調査は $0.2 \leq m \leq 5.0$ の範囲で Table 3 に示す理論式と近似式とからそれぞれ各種平均粒子径を算出し、理論値に対する近似値の相対誤差 δ_1 (%) を求める形で行う。また、比較として補正項をもつ個数基準の修正 R-R 分布式(11)に基づいて算出される各種平均粒子径 ($1.0 \leq m \leq 5.0$) の相対誤差 δ_2 (%) も求める。調査の結果、次のことがわかった。

(1) 同一の均等数 m における各平均粒子径の相対誤差 δ_1 の間で比較すると、体積平均径 D_4 の δ_1 が常に最大となる。また δ_2 で比較すると、どの平均粒子径の δ_2 が最大

Fig.7 A comparison among the theoretical and three approximate calculations with respect to the surface mean diameter D_3 ; the theoretical calculation and the approximation 1 follow Table 3, and the approximations 2 and 3 do eqs. (11) and (A-1), respectively.

となるかは m によって異なる。

(2) 均等数全範囲で調べると、 δ_1 は体積平均径 D_4 のそれが最大で $\pm 1.8\%$ である。それに対して δ_2 は面積平均径 D_3 のそれが最大で $\pm 50.2\%$ である。

また、Table 3 で示す理論式と近似式および他の 2 つの方法から求めることができる面積平均径 D_3 の均等数 m に対する変化を Fig.7 に示す。実線は理論式によるもの、破線は近似式によるもの、一点鎖線は補正項をもつ個数基準の修正 R-R 分布式(11)に基づいて算出したもの、二点鎖線は Kieβkalt ら⁽⁸⁾ による比表面積 S_w の近似式から逆算して求めたものである。上に示した調査結果および Fig.7 から、Table 3 の近似式は各種平均粒子径の算出式として十分な精度をもっていることがわかる。

IV. 修正 R-R 分布に関連する粒度分布をもつ粉体の平均粒子径の算出

上記で述べた近似式で表す各種平均粒子径の算出式を修正 R-R 分布に関連する粒度分布をもつ粉体に対して適用し、より実際的な条件における各種平均粒子径の算出を試みる。

1. ある限られた粒度範囲をもつ粉体の場合

例えば、修正 R-R 分布を粒度分布にもつ粉体を分級しある限られた粒度範囲のものを使用するような場合を考える。粒度範囲を $D_a \sim D_b$ ($D_{\min} \leq D_a < D_b \leq D_{\max}$) とすると、この分級した粉体の個数平均径 D_1 は式(24)と同様な式、

$$D_1 = D_e \cdot \frac{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-2/m+i} \left\{ \left(\frac{D_b}{D_e} \right)^{-2+m \cdot i} - \left(\frac{D_a}{D_e} \right)^{-2+m \cdot i} \right\}}{\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-3/m+i} \left\{ \left(\frac{D_b}{D_e} \right)^{-3+m \cdot i} - \left(\frac{D_a}{D_e} \right)^{-3+m \cdot i} \right\}} \quad (25)$$

となり、 $D_{\min}$ を D_a 、 $D_{\max}$ を D_b に置き換えるだけで表すことができる。他の平均粒子径においても同様である。このように、ある限られた粒度範囲でも容易にその平均粒子径を算出できることが今回導入した算出式(Table 3 の近似式)の大きな利点であり、対数正規分布において知られている平均粒子径の算出式ではとうてい表すことはできない。

平均粒子径の計算の一例を Table 4 に示す。この計算は、粒度特性数 $D_e = 50 \mu\text{m}$ 、均等数 $m = 2.5$ についてのもの、限定した粒度範囲は、下限粒子径 $D_a = 37 \mu\text{m}$ 、上限粒子径 $D_b = 88 \mu\text{m}$ とする。また、比較として $D_{\min} \sim$

† 彼らは比表面積 S_w (m^2/kg) を次式で近似した。

$$S_w = \frac{\phi}{\rho_p} \cdot \frac{1.065}{D_e} \exp \left(\frac{1.795}{m^2} \right) \quad (\text{A-1})$$

この式は均等数 $m = 0.6 \sim 2.5$ の範囲で示されたもので、修正 R-R 分布と同一の粒度範囲 ($R = 0.1\% \sim 99.9\%$) に対して計算された比表面積の近似式であるため今回比較の対象に加えた。

Table 4 Example of mean particle diameters in the limited range.

Calculating condition	Symbol	$D_a \sim D_b$	$D_{\min} \sim D_{\max}$
$m = 2.5$	D_1	47.77 μm	11.87 μm
$D_e = 50.00 \mu\text{m}$	D_2	49.65 μm	21.93 μm
$D_a = 37.00 \mu\text{m}$	D_3	51.86 μm	33.99 μm
$D_b = 88.00 \mu\text{m}$	D_4	54.38 μm	44.08 μm
$D_{\min} = 3.16 \mu\text{m}$	D_s	48.70 μm	16.14 μm
$D_{\max} = 108.32 \mu\text{m}$	D_v	49.73 μm	20.68 μm
	D_{vd}	50.74 μm	27.30 μm
	D_w	50.85 μm	24.99 μm
	D_h	46.20 μm	6.95 μm
	D_{50}	52.66 μm	43.18 μm

$D_{\max}$ の粒度範囲における平均粒子径の計算結果も併記する。

2. 2 種類以上の粉体を配合した場合

より複雑な場合として、修正 R-R 分布をもつ 2 種類以上の粉体を配合する場合を考える。z 種類の粉体は一般にそれぞれ異なる均等数 m_j 、粒度特性数 D_{ej} 、配合割合 ω_j および 粒度範囲 $D_{aj} \sim D_{bj} (D_{\min} \leq D_{aj} < D_{bj} \leq D_{\max})$, ($j = 1 \sim z$) をもち、配合後の粒度分布は次式で表される。

$$R(D_p) = 100 \sum_{j=1}^z \omega_j \frac{\int_{D_{aj}}^{D_{bj}} \left(\frac{D_p}{D_{ej}} \right)^{m_j-1} \exp \left\{ -\left(\frac{D_p}{D_{ej}} \right)^{m_j} \right\} dD_p}{\int_{D_{aj}}^{D_{bj}} \left(\frac{D_p}{D_{ej}} \right)^{m_j-1} \exp \left\{ -\left(\frac{D_p}{D_{ej}} \right)^{m_j} \right\} dD_p} \quad (26)$$

Table 5 Mean particle diameters in the case of blending the z kinds of powders.

Symbol	Approximate expression
D_1	$\frac{\sum_{j=1}^z A_j \left(\frac{1}{D_{ej}} \right)^2 \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-2/m_j+i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{-2+m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{-2+m_j \cdot i} \right\}}{\sum_{j=1}^z A_j \left(\frac{1}{D_{ej}} \right)^3 \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-3/m_j+i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{-3+m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{-3+m_j \cdot i} \right\}}$
D_2	$\frac{\sum_{j=1}^z A_j \left(\frac{1}{D_{ej}} \right)^6 \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-1/m_j+i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{-1+m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{-1+m_j \cdot i} \right\}}{\sum_{j=1}^z A_j \left(\frac{1}{D_{ej}} \right)^2 \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-2/m_j+i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{-2+m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{-2+m_j \cdot i} \right\}}$
D_3	$\frac{\sum_{j=1}^z A_j \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{m_j \cdot i} \right\}}{\sum_{j=1}^z A_j \left(\frac{1}{D_{ej}} \right)^6 \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-1/m_j+i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{-1+m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{-1+m_j \cdot i} \right\}}$
D_4	$\frac{\sum_{j=1}^z A_j \cdot D_{ej} \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{1/m_j+i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{1+m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{1+m_j \cdot i} \right\}}{\sum_{j=1}^z A_j \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{m_j \cdot i} \right\}}$
D_s	$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^z A_j \left(\frac{1}{D_{ej}} \right)^6 \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-1/m_j+i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{-1+m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{-1+m_j \cdot i} \right\}}{\sum_{j=1}^z A_j \left(\frac{1}{D_{ej}} \right)^3 \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-3/m_j+i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{-3+m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{-3+m_j \cdot i} \right\}}}$
D_v	$\sqrt[3]{\frac{\sum_{j=1}^z A_j \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{m_j \cdot i} \right\}}{\sum_{j=1}^z A_j \left(\frac{1}{D_{ej}} \right)^3 \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-3/m_j+i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{-3+m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{-3+m_j \cdot i} \right\}}}$
D_{vd}	$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^z A_j \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{m_j \cdot i} \right\}}{\sum_{j=1}^z A_j \left(\frac{1}{D_{ej}} \right)^3 \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-2/m_j+i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{-2+m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{-2+m_j \cdot i} \right\}}}$
D_w	$\sqrt[4]{\frac{\sum_{j=1}^z A_j \cdot D_{ej} \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{1/m_j+i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{1+m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{1+m_j \cdot i} \right\}}{\sum_{j=1}^z A_j \left(\frac{1}{D_{ej}} \right)^3 \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-3/m_j+i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{-3+m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{-3+m_j \cdot i} \right\}}}$
D_h	$\frac{\sum_{j=1}^z A_j \left(\frac{1}{D_{ej}} \right)^3 \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-3/m_j+i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{-3+m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{-3+m_j \cdot i} \right\}}{\sum_{j=1}^z A_j \left(\frac{1}{D_{ej}} \right)^4 \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-4/m_j+i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{-4+m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{-4+m_j \cdot i} \right\}}$

$$A_j = \omega_j / \left[\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{m_j \cdot i} \right\} \right]$$

but if $h/m_j+i=0 (h=-4, -3, -2, -1, 0, 1)$

$$\text{then } \frac{a_{i-1}}{h/m_j+i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{h+m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{h+m_j \cdot i} \right\} \rightarrow a_{i-1} \left\{ \ln \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right) - \ln \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right) \right\}$$

ただし, $\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j = 1$

式(26)で表される粒度分布をもつ粉体の各種平均粒子径も理論的に与えることができる。例えば, 個数平均径 D_1 は,

$$D_1 = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} A_j \left(\frac{1}{D_{ej}} \right)^2 \int_{D_{aj}}^{D_{bj}} \left(\frac{D_p}{D_{ej}} \right)^{m_j-3} \exp \left\{ - \left(\frac{D_p}{D_{ej}} \right)^{m_j} \right\} dD_p}{\sum_{j=1}^{\infty} A_j \left(\frac{1}{D_{ej}} \right)^3 \int_{D_{aj}}^{D_{bj}} \left(\frac{D_p}{D_{ej}} \right)^{m_j-4} \exp \left\{ - \left(\frac{D_p}{D_{ej}} \right)^{m_j} \right\} dD_p} \quad (27)$$

ただし,

$$A_j = \omega_j / \left[\int_{D_{aj}}^{D_{bj}} \left(\frac{D_p}{D_{ej}} \right)^{m_j-1} \exp \left\{ - \left(\frac{D_p}{D_{ej}} \right)^{m_j} \right\} dD_p \right]$$

である。式(14)を用いて原始関数で表す式(27)の近似式は, 次式となる。

$$D_1 \approx \frac{\sum_{j=1}^{\infty} A_j \left(\frac{1}{D_{ej}} \right)^2 \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-2/m_j+i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{-2+m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{-2+m_j \cdot i} \right\}}{\sum_{j=1}^{\infty} A_j \left(\frac{1}{D_{ej}} \right)^3 \sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{-3/m_j+i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{-3+m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{-3+m_j \cdot i} \right\}} \quad (28)$$

ただし,

$$A_j \approx \omega_j / \left[\sum_{i=1}^6 \frac{a_{i-1}}{i} \left\{ \left(\frac{D_{bj}}{D_{ej}} \right)^{m_j \cdot i} - \left(\frac{D_{aj}}{D_{ej}} \right)^{m_j \cdot i} \right\} \right]$$

同様に, 他の平均粒子径についても近似式で表すことができる。それらをまとめて Table 5 に示す。これらの近似式を用いれば, いろいろな配合条件での粉体の平均粒子径を算出することが可能となる。

V. 結 言

本研究では, 粉体例えば金属粉の特性として粒度分布に注目し, 分布を表す関数式から導かれるいろいろな性質を検討した。そこでまず前報⁽²⁾で導入した修正 R-R 分布におけるより正確な個数基準表現式を異なった観点から導入し, その結果の一部を利用して各種平均粒子径の近似的な

算出式の導出を試みた。また, より実的な条件下での各種平均径の算出も検討した。結果をまとめると次のようになる。

(1) 導入した式(16)は, 修正 R-R 分布の個数基準の表現式として前報で導入した式(11)以上に優れた近似精度を有する。

(2) 修正 R-R 分布の各種平均粒子径の算出式は, 結果として Table 3 のようにまとめることができる。

(3) Table 4, 5 に示すように, ある限られた粒度範囲をもつ粉体やいろいろな配合条件での粉体の各種平均粒子径を算出することも可能である。

以上の結果は, 粉体の粒度分布のみならず結晶粒径や気孔径などの分布にも応用が可能である。

なお, 本研究における数値計算は, すべて名古屋大学大型計算機センターの FACOM, M-382 を使用して行った。

文 献

- (1) P. Rosin and E. Rammner: J. Inst. Fuel, 7 (1933), 29.
- (2) 伊藤孝至, 鰐部吉基, 坂尾 弘: 日本金属学会誌, 49(1985), 670.
- (3) H. Takahashi and M. Mori: *Double Exponential Formulas for Numerical Integration*, Publications of R. I. M. S., Kyoto Univ., 9 (1974), 721.
- (4) 森 正武: 曲線と曲面, 教育出版, (1974).
- (5) G. St. J. Perrott and S. P. Kinney: J. Amer. Ceram. Soc., 6(1923), 417.
- (6) H. Green: J. Franklin Inst., 204(1927), 713.
- (7) 粉体工学会編: 粉体工学便覧, 日刊工業新聞社, (1986), 15.
- (8) S. Kießkalt and G. Matz: VDI-Zeit., 93(1951), 58.