グラフ理論を用いた薄肉断面構造の剪断流解析法 に関する研究（第1報）－ 解析法 －

正員 野 瀬 幹 夫* 正員 野 崎 慎一郎**

A Study on the Shear Flow Analytical Method for the Thin-Walled Cross Section Structure with Graph Theory (1st report)
- Analytical Method -

by Mikio Nose, *Member* Shin-ichiro Nozaki, *Member*

Summary

The authors are developing the simple and easy structural design system which investigates rapidly the design spiral in the stage of early design. In this system, initial scantlings and dimensions are determined through the total strength analysis system before performing FE analysis. The shear flow analysis is carried out by identifying the cross-section shape of hull girder using the number of representative points in a cross-section, the shape of closed circuits and the property of the shear flow on each member. The coefficients of the expression to shear flow distribution are automatically calculated. However, to apply this analysis to more complicated and various cross-sections within fore and aft portion of ships, it is important to develop a more generalized shear flow analysis method.

In this paper, the authors propose a new shear flow analysis method using the basic concept of graph theory, where a pattern of networks is expressed by connections between points and edges, mainly applied to electric circuit network.

In this first report, the authors give a concrete description for the formulation of the new analysis and the analytical procedure using a cross-section with three closed circuits.

1. 緒 言

近年、情報技術の急速な発展に伴い、造船設計システムの機能の高度化が進行し、設計においては、その入力情報量は膨大なものになっている。また、資材・材料の高騰に対応し、韓国・中国などとの競争力を高めるためにコスト削減が必須であり、初期設計段階に物量算定の精度を向上させることは重要である。そのためには、迅速に精度よく設計早期のデザインスパイラルを回す簡便なシステムが必要であり、著者らはその初期構造設計システム¹⁾を開発中である。このシステム内には、FEM解析を行う前の船級協会のルールに基づいて決められた各部材寸法を評価する全体強度解析システムがある。この全体強度解析の流れをFig.1に示す。この解析法では船体横断面の剪断流解析が重要となり、船体梁の強度

応答計算の中で横断面の剪断流解析を行う際、これまでの研究では膨大な定式化が必要であった。それを解消するために著者の一人が考案した、横断面での代表点の個数、閉路の形状、部材の剪断流の性質などで船体横断面形状を判別し、剪断流分布を定める式の係数を自動化して解析する方法²⁾により、剪断流解析が行われた。その後の研究³⁾で改良され、

Fig.1 The flow of the total strength analysis system.

* 長崎総合科学大学 工学部 船舶工学科

** 長崎県立長崎工業高等学校 機械システム科

コンテナ船の船尾横断面形状のような複雑な断面形状の不
 静定部分の剪断流自動計算も行うことができるようになった。
 しかし、この解析での船体横断面形状の判断が煩雑にな
 ってきたため、新しい解析法の導入が求められた。

そこで、本研究では、この解析法があらゆるタイプの船の
 横断面形状にも適用できるように、キルヒホッフの法則など
 で知られる電気回路網などに適用されている点と辺でつな
 がり方を表すグラフ理論⁴⁾⁵⁾の基礎概念を剪断流解析の分野
 に初めて導入し、それに加え、今回新しく定義した剪断流係
 数行列、断面一次モーメント累積行列を用いて、より一般化
 された剪断流解析法の構築を試みた。第 1 報では 3 閉路断面
 形状を例に旧計算法と対比させ、その新しい解析式の定式化
 と解析手順とその結果について述べる。

2. 従来の剪断流解析法

2.1 座標系

Fig.2 3 cell Thin-walled cross section.

Fig. 2 に示すように、一例として 3 閉路薄肉断面形状を考
 えることにする。ここで、横断面の重心を通る右手座標系
 0-xyz を定める。また、各辺の始点から終点に進むガース座
 標を s と定め、点線で示す剪断流の正の方向も s 座標と同様
 にとる。部材を①から⑧、節点を 1 から 6 で示しており、グ
 ラフ理論では部材を辺、節点を点と表しているが、本研究で
 はそれぞれ部材、節点と呼ぶことにする。ここで、節点の数
 は説明に支障がない必要最小限にとどめてある。各閉路を
 C_1, C_2, C_3 とし、部材中の積分経路の矢印の向きを正とす
 る。太線の q_1, q_2, q_3 は各閉路の未知の剪断流を示す。また、
 式中において、部材を i, j と節点の記号を並べて表すことが
 ある。

2.2 従来の剪断流解析法の概要

横断面内の任意の物体点に生ずる剪断流 $q_{ij}(s)$ は、薄肉断
 面梁の微小部分に働く x 方向の力の釣り合いを考えること

によって、次式で表される。

$$q_{ij}(s) = q_{ij}(s_i) - \frac{S_z(x)}{I_z} \int_{s_i}^s z(s) t(s) ds \quad (1)$$

ただし、 $S_z(x)$ は各横断面の z 方向の垂直剪断力、また、 I_z
 は横断面の y 軸周りの慣性モーメント、 s はガース座標、 t
 は部材板厚である。 i, j は部材の始点および終点である。さ
 らに、剪断流 $q_{ij}(s_i)$ は始点の値を表し、 $q_{ij}(s_j)$ は終点の値を
 表す。

次に、Fig.2 の各節点において、接続する部材の剪断流の
 連続の条件式は、それぞれ式(2)で表される。ただし、式(2)
 左側の 1 から 6 は節点番号を意味する。

$$\left. \begin{aligned} 1: & q_{1,2}(s_1) - q_{6,1}(s_1) = 0 \\ 2: & -q_{1,2}(s_2) + q_{2,3}(s_2) + q_{2,6}(s_2) = 0 \\ 3: & -q_{2,3}(s_3) + q_{3,4}(s_3) + q_{3,5}(s_3) = 0 \\ 4: & -q_{3,4}(s_4) + q_{4,5}(s_4) = 0 \\ 5: & -q_{4,5}(s_5) - q_{3,5}(s_5) + q_{5,6}(s_5) = 0 \\ 6: & -q_{5,6}(s_6) - q_{2,6}(s_6) + q_{6,1}(s_6) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(2)の節点番号 1 の剪断流の連続の条件を説明すると、
 符号は節点より剪断流が流出する向きが+、流入する向きが
 -となっている。

さらに、各節点で切り離された各部材に式(1)を適用し、
 同式 2 項の係数 $S_z(x)/I_z$ を α 、部材 i, j の断面一次モーメント
 を $m(i, j)$ とする。また、各閉路における未知の剪断流の値と
 して、 $q_{1,2}(s_1) = q_1$ 、 $q_{2,3}(s_2) = q_2$ 、 $q_{3,4}(s_3) = q_3$ とおき、式(2) に
 式(1)を代入すると式(3)を得る。ここで式(3)左側の①から⑧
 は部材番号を意味する。

$$\left. \begin{aligned} ① & q_{1,2}(s_1) = q_1 \\ & q_{1,2}(s_2) = q_{1,2}(s_1) - \alpha m(1,2) = q_1 - \alpha m(1,2) \\ ② & q_{2,3}(s_2) = q_2 \\ & q_{2,3}(s_3) = q_{2,3}(s_2) - \alpha m(2,3) = q_2 - \alpha m(2,3) \\ ③ & q_{3,4}(s_3) = q_3 \\ & q_{3,4}(s_4) = q_{3,4}(s_3) - \alpha m(3,4) = q_3 - \alpha m(3,4) \\ ④ & q_{4,5}(s_4) = q_{3,4}(s_4) = q_3 - \alpha m(3,4) \\ & q_{4,5}(s_5) = q_{4,5}(s_4) - \alpha m(4,5) \\ & = q_3 - \alpha \{m(3,4) + m(4,5)\} \\ ⑤ & q_{3,5}(s_3) = q_{2,3}(s_3) - q_{3,4}(s_3) \\ & = q_2 - q_3 - \alpha m(2,3) \\ & q_{3,5}(s_5) = q_{3,5}(s_3) - \alpha m(3,5) \\ & = q_2 - q_3 - \alpha \{m(2,3) + m(3,5)\} \\ ⑥ & q_{5,6}(s_5) = q_{4,5}(s_5) + q_{3,5}(s_5) \\ & = q_2 - \alpha \{m(2,3) + m(3,4) + m(4,5) + m(3,5)\} \\ & q_{5,6}(s_6) = q_{5,6}(s_5) - \alpha m(5,6) \\ & = q_2 - \alpha \{m(2,3) + m(3,4) + m(4,5) + m(3,5) \\ & \quad + m(5,6)\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{7} \quad & q_{2,6}(s_2) = q_{1,2}(s_2) - q_{2,3}(s_2) = q_1 - q_2 - \alpha m(1,2) \\ & q_{2,6}(s_6) = q_{2,6}(s_2) - \alpha m(2,6) \\ & \quad = q_1 - q_2 - \alpha \{m(1,2) + m(2,6)\} \\ \textcircled{8} \quad & q_{6,1}(s_6) = q_{5,6}(s_6) + q_{2,6}(s_6) \\ & \quad = q_1 - \alpha \{m(1,2) + m(2,3) + m(3,4) + m(4,5) \\ & \quad \quad + m(3,5) + m(5,6) + m(2,6)\} \\ & q_{6,1}(s_1) = q_{6,1}(s_6) - \alpha m(6,1) \\ & \quad = q_1 - \alpha \{m(1,2) + m(2,3) + m(3,4) + m(4,5) \\ & \quad \quad + m(3,5) + m(5,6) + m(2,6) + m(6,1)\} \end{aligned} \right\}$$

以上が、横断面内の各節点での剪断流の式である。

ここで、Fig.2 に示す横断面は多重連結領域を形成している。これらの未知の剪断流 q_l ($l=1,2,3$) は、次の各閉路 C_l の x 方向の変位の連続条件式：

$$\oint_{C_l} \frac{q(s)}{t(s)} ds = 0 \quad (\text{閉路番号} : l=1,2,3) \quad (4)$$

を各閉路毎に立てて得られる 3 元連立一次方程式(5)を解き、未知の剪断流が求められる。

$$\begin{pmatrix} \oint_{C_1} \frac{ds}{t(s)} & -\int_{s_2}^{s_6} \frac{ds}{t(s)} & 0 \\ -\int_{s_6}^{s_2} \frac{ds}{t(s)} & \oint_{C_2} \frac{ds}{t(s)} & -\int_{s_3}^{s_5} \frac{ds}{t(s)} \\ 0 & -\int_{s_3}^{s_5} \frac{ds}{t(s)} & \oint_{C_3} \frac{ds}{t(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここで、式(5)左辺の未知の剪断流ベクトルを次式とし、

$$\mathbf{q}_u = \{q_1 \ q_2 \ q_3\}^T \quad (6)$$

未知の剪断流に対する係数マトリックスを $\mathbf{A}$ マトリックス、右辺定数項を $\mathbf{B}$ ベクトルと呼ぶことにし、ベクトル表示した式を次式に示す。

$$\mathbf{A} \mathbf{q}_u = \alpha \mathbf{B} \quad (7)$$

更に $\mathbf{B}$ ベクトルは $\mathbf{F}_m$ 項と $\mathbf{F}_s$ 項に分けられ次式で表される。

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_s \quad (8)$$

但し、 $\mathbf{F}_m = \{F_{m1} \ F_{m2} \ F_{m3}\}^T$ 、 $\mathbf{F}_s = \{F_{s1} \ F_{s2} \ F_{s3}\}^T$

$\mathbf{F}_m$ の項は、各閉路内の任意の物体点 $s=s_k$ における k 番目の部材の長さ s_k をその板厚 $t_k(s)$ で除した値 $s_k / t_k(s)$ と、同じセル内の $k-1$ 番目の部材までの積分経路に沿って累積された断面一次モーメント $m(i,j)$ との積である。また、二重積分の項 $\mathbf{F}_s$ は、各閉路内の各部材に対して、 $\iint_{s_1}^s (z(s) - s) ds ds$ を求めた値 $\left(\frac{1}{2} z_{ij}(s) s_{ij}^2 - \frac{1}{6} s_{ij}^3 \sin \gamma_{ij}\right)$ を合計した値となる。ここ

では s_{ij} は節点 i と j 間の部材の長さであり、また $z_{ij}(s)$ は横

断面の重心から部材 i,j の重心までの z 方向の距離である。

また、 γ_{ij} は節点 i, j を両端とする任意部材と節点 i を通る y 軸に平行な直線とのなす角で、反時計周りにとった角である。

よって、式(7)より未知の剪断流を求め、これらを式(3)に代入することにより、横断面全体の剪断流 $q(s)$ の分布が決定される。

3. グラフ理論を用いた剪断流解析法

3.1 解析モデル各部材の剪断流の表し方

3.1.1 各部材の始点、終点を併記した場合の剪断流の式

はじめに、各部材の剪断流を表す式(3)を、行列を用いて表すことを考える。ここで、 u 行 v 列の行列 $\mathbf{W}$ を剪断流係数行列と名付け、その要素 w_{uv} を

$$w_{uv} = \begin{cases} 1 : \text{各部材の始点と終点に } q_l \text{ か } -\alpha m(i,j) \text{ の} \\ \quad \text{いずれかの正の値が存在するとき} \\ -1 : \text{上記の値に対して負の値が存在するとき} \\ 0 : \text{上記の値が存在しないとき} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (9)$$

と定義すると、剪断流係数行列は式(10)で表される。ここで $\textcircled{k}$ は、 k 番目の部材番号を表し、 $\textcircled{F}$ と $\textcircled{A}$ の各添字はそれぞれ k 番目の部材の始点、終点を意味するものとする。そこで、この剪断流係数行列 $\mathbf{W}$ の行方向は、各部材の始点 $\textcircled{F}$ と終点 $\textcircled{A}$ の剪断流の式を表現する係数の有無を表している。

よって、この $\textcircled{F}$ と $\textcircled{A}$ の係数はそれぞれ、剪断流の始点側 $q_{i,j}(s_i)$ と終点側 $q_{i,j}(s_j)$ の係数を表している。また、この行列の列方向の e_1, e_2, e_3 は、それぞれ未知の剪断流 q_1, q_2, q_3 の有無を表し、残りの列方向①から⑧は、該当する部材の断面一次モーメント値 $m(i,j)$ に $-\alpha$ を掛けた値の有無を表わしている。

$$\mathbf{W} = [w_{uv}] =$$

$$\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{7} & \textcircled{8} \\ \textcircled{1} \text{ F} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} \text{ A} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{2} \text{ F} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{2} \text{ A} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{3} \text{ F} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{3} \text{ A} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{4} \text{ F} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{4} \text{ A} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{5} \text{ F} & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{5} \text{ A} & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{6} \text{ F} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{6} \text{ A} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \textcircled{7} \text{ F} & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{7} \text{ A} & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \textcircled{8} \text{ F} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \textcircled{8} \text{ A} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\dots\dots\dots (10)$$

この剪断流係数行列 $\mathbf{W}$ を用いて、式(3)を表すと、

$$\mathbf{q}_{FA} = \mathbf{W} \begin{Bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & -\alpha m(1,2) & -\alpha m(2,3) \\ & -\alpha m(3,4) & -\alpha m(4,5) & -\alpha m(3,5) \\ & -\alpha m(5,6) & -\alpha m(2,6) & -\alpha m(6,1) \end{Bmatrix}^T \quad (11)$$

$$\text{但し, } \mathbf{q}_{FA} = \begin{Bmatrix} q_{1,2}(s_1) & q_{1,2}(s_2) & q_{2,3}(s_2) & q_{2,3}(s_3) \\ q_{3,4}(s_3) & q_{3,4}(s_4) & q_{4,5}(s_4) & q_{4,5}(s_5) \\ q_{3,5}(s_3) & q_{3,5}(s_5) & q_{5,6}(s_5) & q_{5,6}(s_6) \\ q_{2,6}(s_2) & q_{2,6}(s_6) & q_{6,1}(s_6) & q_{6,1}(s_1) \end{Bmatrix}^T$$

となる。

3.1.2 各部材の始点、終点に分けた場合の剪断流の表式

次に、式(10)で表された剪断流係数行列 $\mathbf{W}$ の部材の始点側(Front)の係数を $\mathbf{W}_F$ 、終点側(Aft)の係数を $\mathbf{W}_A$ として、次のように表すと、

$$\mathbf{W}_F = [w_{uv}] = \left\{ \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{7} & \textcircled{8} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \text{ F} \\ \textcircled{2} \text{ F} \\ \textcircled{3} \text{ F} \\ \textcircled{4} \text{ F} \\ \textcircled{5} \text{ F} \\ \textcircled{6} \text{ F} \\ \textcircled{7} \text{ F} \\ \textcircled{8} \text{ F} \end{matrix} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{7} & \textcircled{8} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \text{ A} \\ \textcircled{2} \text{ A} \\ \textcircled{3} \text{ A} \\ \textcircled{4} \text{ A} \\ \textcircled{5} \text{ A} \\ \textcircled{6} \text{ A} \\ \textcircled{7} \text{ A} \\ \textcircled{8} \text{ A} \end{matrix} \end{array} \right\} \quad \cdots \cdots (12)$$

となる。

ここで、式(12)の列方向 e_1, e_2, e_3 に着目し、行方向を部材①から⑧、列方向を e_1, e_2, e_3 として表示し、 $\mathbf{e}$ とおくと、次式(13)で表される。この式は、各部材での未知の剪断流の有無を表している。よって、未知の剪断流係数行列と定義する。ここで、 $-$ の符号は閉路の向きに対して、未知の剪断流が負の向きに含まれることを示す。

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \\ \textcircled{7} \\ \textcircled{8} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

次に、式(12)の $\mathbf{W}_F, \mathbf{W}_A$ の列方向①から⑧に着目し、そ

の要素を、

$$m(i,j) = \begin{cases} 1 : m(i,j) \text{ に値があるとき} \\ 0 : m(i,j) \text{ に値がないとき} \end{cases} \quad (14)$$

と定義し、その行列を $\mathbf{P}_F, \mathbf{P}_A$ で表すと、

$$\mathbf{P}_F = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{7} & \textcircled{8} \\ & m(1,2) & m(2,3) & m(3,4) & m(4,5) & m(3,5) & m(5,6) & m(2,6) & m(6,1) \\ \textcircled{1} \text{ F} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{2} \text{ F} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{3} \text{ F} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{4} \text{ F} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{5} \text{ F} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{6} \text{ F} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{7} \text{ F} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{8} \text{ F} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{P}_A = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{7} & \textcircled{8} \\ & m(1,2) & m(2,3) & m(3,4) & m(4,5) & m(3,5) & m(5,6) & m(2,6) & m(6,1) \\ \textcircled{1} \text{ A} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{2} \text{ A} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{3} \text{ A} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{4} \text{ A} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{5} \text{ A} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{6} \text{ A} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \textcircled{7} \text{ A} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \textcircled{8} \text{ A} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \quad (16)$$

となる。この式(15), (16)は、部材の断面一次モーメント部分を表す係数行列で、断面一次モーメントを累積していくということで断面一次モーメント累積行列と新たに定義する。よって、式(13), (15), (16)を用いて、式(3)を表すと、

$$\mathbf{q}_F = \mathbf{e} \begin{Bmatrix} q_1, q_2, q_3 \\ m(1,2) & m(2,3) \\ m(3,4) & m(4,5) & m(3,5) & m(5,6) & m(2,6) \\ m(6,1) \end{Bmatrix}^T - \alpha [\mathbf{P}_F \{ m(1,2) & m(2,3) \\ m(3,4) & m(4,5) & m(3,5) & m(5,6) & m(2,6) \\ m(6,1) \}^T]$$

$$\text{但し, } \mathbf{q}_F = \begin{Bmatrix} q_{1,2}(s_1) & q_{2,3}(s_2) & q_{3,4}(s_3) & q_{4,5}(s_4) \\ q_{3,5}(s_3) & q_{5,6}(s_5) & q_{2,6}(s_2) & q_{6,1}(s_6) \end{Bmatrix}^T$$

$$\mathbf{q}_A = \mathbf{e} \begin{Bmatrix} q_1, q_2, q_3 \\ m(1,2) & m(2,3) \\ m(3,4) & m(4,5) & m(3,5) & m(5,6) & m(2,6) \\ m(6,1) \end{Bmatrix}^T - \alpha [\mathbf{P}_A \{ m(1,2) & m(2,3) \\ m(3,4) & m(4,5) & m(3,5) & m(5,6) & m(2,6) \\ m(6,1) \}^T]$$

$$\text{但し, } \mathbf{q}_A = \begin{Bmatrix} q_{1,2}(s_2) & q_{2,3}(s_3) & q_{3,4}(s_4) & q_{4,5}(s_5) \\ q_{3,5}(s_5) & q_{5,6}(s_6) & q_{2,6}(s_6) & q_{6,1}(s_1) \end{Bmatrix}^T \quad (17)$$

となる。

3.2 未知の剪断流決定法

未知の剪断流は、式(7)の $\mathbf{A}$ マトリックス、 $\mathbf{B}$ ベクトルの値を求め、3元連立一次方程式を解くことにより求められる。その後、各部材の剪断流は、式(11)で求められる。ここでは、

未知の剪断流決定式の作成方法について述べる。

3.2.1 未知の剪断流決定式の左辺の表式法

式(5)左辺は、各部材に含まれる未知の剪断流 q_l ($l=1,2,3$) に、その部材の $\int_{s_i}^{s_j} \frac{ds}{t(s)}$ の値を掛けたものを、各閉路毎に足し併せたものになる。

まず、部材数を行と列とし、各部材毎の $\int_{s_i}^{s_j} \frac{ds}{t(s)}$ を積分した値を 8 行 8 列の対角成分とする行列 J を次式で表す。

$$J = \begin{pmatrix} \frac{s_{1,2}}{t_{1,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_{2,3}}{t_{2,3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_{3,4}}{t_{3,4}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{s_{4,5}}{t_{4,5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s_{3,5}}{t_{3,5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s_{5,6}}{t_{5,6}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s_{2,6}}{t_{2,6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s_{6,1}}{t_{6,1}} \end{pmatrix} \quad (18)$$

次に、式(13)に、この式(18)を掛けたものが、

$$J e \quad (19)$$

と表される。

そして、各閉路における行列 H の要素 $h_{u,v}$ を式(20)

$$h_{u,v} = \begin{cases} 1: \text{閉路 } C_l \text{ の向きと部材 } \textcircled{u} \text{ の剪断流} \\ \quad \text{の向きが同じとき} \\ -1: \text{閉路 } C_l \text{ の向きと部材 } \textcircled{u} \text{ の剪断流} \\ \quad \text{の向きが逆のとき} \\ 0: \text{閉路 } C_l \text{ に部材 } \textcircled{u} \text{ の剪断流の値が} \\ \quad \text{存在しないとき} \end{cases} \quad (20)$$

のように定義し、行方向に閉路番号を、列方向に部材番号を取り、 H を次式で表す。

$$H = [h_{uv}] = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{7} & \textcircled{8} \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \dots\dots\dots \end{matrix} \quad (21)$$

ここで、 H はグラフ理論によると、**閉路行列**⁴⁾⁵⁾と呼ばれるもので閉路を構成する辺の有無を表すものである。この場合、各要素には閉路の向きと各部材の剪断流の向きを考えているので符号が付く。グラフ理論では辺に方向を持たせたものを**有向グラフ**という。

よって、式(5)左辺の A マトリックスは、式(19)で示される部材の値を各閉路毎に足し併せたものになるので、式(19), (20)を用いて、次のように、

$$A = H (J e) \quad (22)$$

と表すことができる。したがって、式(5)左辺は、式(22)に未知の剪断流ベクトルの式(6)を掛けて、

$$A q_u = [H (J e)] q_u \quad (23)$$

と表すことができる。

3.2.2 未知の剪断流決定式の右辺の表式法

次に、式(7)で示した B ベクトルの表し方を述べる。 B ベクトルは、式(8)に示すように F_m と F_s の和で表される。

まず、 B ベクトル F_m の項は累積した断面一次モーメントにその部材の $\int_{s_i}^{s_j} \frac{ds}{t(s)}$ の値を掛けたものを、各閉路毎に足し併せたものになる。

よって、断面一次モーメントを表したベクトル m を次式で表し、

$$m = \{m(1,2) \quad m(2,3) \quad m(3,4) \quad m(4,5) \quad m(3,5) \\ m(5,6) \quad m(2,6) \quad m(6,1)\}^T \quad (24)$$

式(15), (18), (21), (24)より、荷重ベクトルの一成分 F_m を表すと、

$$F_m = H [J (P_F \ m)] \quad (25)$$

となる。

さらに、 F_s の項は 8 行 1 列の各部材毎の成分を $\int_{s_1}^{s_8} (z(s) - s) ds$ の値とするベクトル f_s に、閉路行列 H を掛け合わせた次式で表される。

$$F_s = H \ f_s \quad (26)$$

よって、 B ベクトルは、式(25), (26)を式(8)に代入し、

$$B = H \{ J (P_F \ m) + f_s \} \quad (27)$$

となる。そして、式(7)は式(23), (27)より、次式で表される。

$$[H(Je)]q_u = \alpha [H\{J(P_F m) + f_s\}] \quad (28)$$

この式(28)より求められる 3 元連立一次方程式を解くことにより、未知の剪断流 q_1, q_2, q_3 が求まり、式(11)に代入すると横断面の剪断流分布が求まる。

3.3 グラフ理論を用いた剪断流係数行列作成法

ここでは、式(10)で示した剪断流係数行列 W の作成方法について述べる。

3.3.1 接続行列

Fig.3 Three cell Thin-walled cross section.

Fig.3 において、各節点とそれに接続する部材の剪断流の連続の条件を表す行列 C の要素 c_{uv} を、

$$c_{uv} = \begin{cases} 1: \text{節点 } i \text{ から部材 } \textcircled{u} \text{ の剪断流が流出しているとき} \\ -1: \text{節点 } i \text{ に部材 } \textcircled{u} \text{ の剪断流が流入しているとき} \\ 0: \text{節点 } i \text{ に部材 } \textcircled{u} \text{ が接続していないとき} \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (29)$$

のように定義すると、行列 C は次のように表される。

$$C = [c_{uv}] = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{7} & \textcircled{8} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (30)$$

ここで、行方向 1 から 6 は節点番号を、列方向の①から⑧は部材番号を意味する。この行列 C はグラフ理論の点と辺のつながり方を表す接続行列⁴⁾⁵⁾と呼ばれるものである。式(30)を列方向に見ると、1 と -1 が対になっている。これは節点において部材毎に剪断流の流入と流出があることを示して

いる。これが接続行列の特徴である。

また、各部材の剪断流を、次式で表すと、

$$q = \{q_{1,2}(s) \quad q_{2,3}(s) \quad q_{3,4}(s) \quad q_{4,5}(s) \quad q_{5,6}(s) \quad q_{6,1}(s)\}^T \quad (31)$$

連続の条件式(2)は、次式のように、接続行列 C と q の積で表される。

$$Cq = 0 \quad (32)$$

3.3.2 次数

グラフ理論では、点につながる辺の数を次数⁴⁾⁵⁾と呼び δ で表し、辺が点より流出するときを出次数と呼び δ^+ で、流入するときは入次数と呼び δ^- で表される。従って、次数 δ は出次数 δ^+ と入次数 δ^- の合計となる。接続行列(30)式では、1 が始点側(出次数 δ^+)を、-1 が終点側(入次数 δ^-)を表しており、これらを節点毎にまとめると式(33)を得る。ここで、左の数字は節点番号を示す。

$$\left. \begin{array}{l} 1: \delta=2, \delta^+=1, \delta^-=1 \\ 2: \delta=3, \delta^+=2, \delta^-=1 \\ 3: \delta=3, \delta^+=2, \delta^-=1 \\ 4: \delta=2, \delta^+=1, \delta^-=1 \\ 5: \delta=3, \delta^+=1, \delta^-=2 \\ 6: \delta=3, \delta^+=1, \delta^-=2 \end{array} \right\} \quad (33)$$

この部材のつながり方を表す次数 δ 、出次数 δ^+ 、入次数 δ^-

Table 1 The connection situation of the shear flow.

	(a)	(b)	(c)
Fig.3 に対応する節点番号	1, 4	2, 3	5, 6
剪断流の流入関係			
剪断流関係式	$q_{ij}(s_i) = q_{ki}(s_i)$	$q_{ij}(s_i) = q_{ki}(s_i) - q_{li}(s_i)$	$q_{ij}(s_i) = q_{ki}(s_i) + q_{li}(s_i)$
次数 δ	2	3	3
出次数 δ^+	1	2	1
入次数 δ^-	1	1	2

の関係によって、各部材の剪断流 $q_{ij}(s_i)$ の流出入の関係を表すことができる。そこで、Fig.3 の部材交差部の節点 1 から 6 における、求める各部材の始点側の剪断流の値は、Table 1 の流出入関係図の矢印の付いた太線の始点側として示され、また、表中の部材交差部(a), (b), (c)の剪断流関係式は同表中の 3 つの式で表される。

3.3.3 剪断流係数行列作成法

剪断流係数行列 W は、前述したように、行方向は各部材 $\textcircled{k}$ の始点側 $\textcircled{k}_F$ と終点側 $\textcircled{k}_A$ の剪断流の式を表すための係数の有無を表しており、列方向は e_1, e_2, e_3 に対応する未知の剪断流 q_1, q_2, q_3 の有無を表し、その後の列方向①から⑧は、該当する部材の断面一次モーメント値 $m(i,j)$ に $-\alpha$ を掛けた値の有無を表わしている。

それでは、この W を作成する手順について述べる。この W は Fig.4 から Fig.7 に示すように、下記の (1) から (6) の作成手順に従って、各行列に存在する未知の剪断流および断面一次モーメントの有無を表すそれぞれの要素に、係数を入れて作成することができる。ただし、Fig.4 から Fig.7 において、値がないものは全て 0 であるが、図を見やすくするために 0 は省略している。

作成手順

- (1) Fig.3 において、部材①, ②, ③の始点側 F には、未知の剪断流が存在するので、Fig.4 に示すように、①_F 行 e_1 列, ②_F 行 e_2 列, ③_F 行 e_3 列のそれぞれ該当する要素に、1 の値を代入する。

Fig.4 The making method of W matrix (1).

- (2) 次に、Fig.3 で示す部材①, ②, ③の終点側 A には、式(3)に示されるように、それぞれの部材の断面一次モー

メントの値が存在する。よって、Fig.5 に示すように、上記 (1) に加え、①_A 行①列, ②_A 行②列, ③_A 行③列のそれぞれ該当する要素に、1 の値を代入する。

Fig.5 The making method of W matrix (2).

- (3) Fig.6 に示すように、部材④の始点側, ④_F 行の要素は、Table 1 (a)の剪断流関係式により、③_A 行の要素と同じになる。

Fig.6 The making method of W matrix (3).

- (4) 部材④の終点側, ④_A 行の要素は、(2) の説明と同様に、部材④の断面一次モーメントの値が存在するので、Fig.6 に示すように、④_F 行の要素に加え、④_A 行④列の要素に、1 の値を代入する。

- (5) さらに、Fig.7 に示すように、部材⑤の始点側, ⑤_F 行の要素は、Table 1 (b)の剪断流関係式より、②_A 行の要素から③_F 行の要素を引いた値となる。

これを、具体的に計算すると、

	e_1	e_2	e_3	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
② _A	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
-③ _F	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
⑤ _F	0	1	-1	0	1	0	0	0	0	0	0

となる。

Fig.7 The making method of W matrix (4).

(6) 以降同様に、部材⑥の始点側、⑥_F行の要素は、Table1に示す剪断流関係式に当てはめ、その要素を求める。そして、部材⑥の終点側、⑥_A行の要素には、その部材の断面一次モーメントの値が存在するので、⑥_A行⑥列の要素に1の値を代入する。これを繰り返すことにより、剪断流係数行列 W の式(10)が完成する。

この剪断流係数行列 W を利用して、前章までで説明したように、式(28)より求められる3元一次連立方程式を解き、未知の剪断流 q_1, q_2, q_3 を求め、これらを式(11)に代入することにより剪断流分布が決定される。

4. 解析結果

前述した3閉路薄肉横断面形状を例に、 $D=B/2=1000\text{cm}$ とし、板厚はFig.8に示す。剪断力は鉛直上向きに1000tonを負荷した。その結果の剪断流分布をFig.8に示す。一方、従来の解析方法と本解析法の結果を比較したところ、両者の剪断流の値は一致し、本解析法の有効性を確認した。

5. 結 言

本研究では、3閉路薄肉横断面形状構造モデルを例にとり、剪断流解析に初めてグラフ理論を導入し、さらに、今回新し

Fig.8 The distribution of shear flow in cross-section.

く定義した剪断流係数行列、断面一次モーメント累積行列を用いて、より一般化された新しい剪断流解析法を提案した。また、この新しい解析法と従来の解析法の解析結果が相違ないことを確認した。

この解析法により、節点と部材の接続情報で断面形状の判断ができ、入力データの省力化と解析法の一般化が可能となる。

今後、コンテナ船の船尾横断面形状のような複雑な断面形状に対しても、より一般化された剪断流解析が容易にできるようになり、汎用性が増すことが期待される。

参 考 文 献

- 1) 野瀬幹夫, 松尾晃, 前田幸喜, 角田陽平, 野本隆洋, 松岡和彦, ペールグンナレ: 造船3D-CADを用いた迅速な船体中央部の初期構造設計システムに関する研究, 日本船舶海洋工学会講演論文集第4号(2007), p195~198.
- 2) 野瀬幹夫, 大垣嘉詩治, 鈴木健介, 古野弘志, 宮田聡, 松岡和彦: 横断面の反りを考慮した船体強度理論の実用化に関する研究(第1,2,3報), 西部造船会会報第91号(1996), p131~145, 第95号(1998), p109~120, 第101号(2001), p155~166.
- 3) 野瀬幹夫, 奥村一生: 水平曲げにおける横断面の反りの影響を考慮した船体縦曲げ理論の新しい実用化に関する研究, 日本船舶海洋工学会講演論文集第6号(2008), p383~385.
- 4) 尾崎弘, 白川功著: グラフとネットワークの理論, コロナ社(1973).
- 5) 佐藤公男監修, 樋口龍雄著: グラフ理論入門-C言語によるプログラムと応用問題(原理がわかる工学選書), 日刊工業新聞社(1998).