ポンツーン型浮体の波浪中弾性応答解析への Hamilton-Dirichlet 原理の適用（第 2 報：任意平面形状浮体への適用）

正員 新 里 英 幸* 正員 永 田 修 一**
正員 豊 田 和 隆** 正員 島 崎 克 教***

Application of Hamilton-Dirichlet's Principle to Analysis of Wave-induced Responses of an Elastic Floating Plate (2nd Report)

by Hideyuki Niizato, *Member* Shuichi Nagata, *Member*
Kazutaka Toyota, *Member* Katsunori Shimazaki, *Member*

Summary

Many analytical methods have been proposed to calculate hydroelastic responses of a very large pontoon type structure in waves. In relation to the elastic response of such pontoon type structure in waves, Isshiki and Nagata proposed the “Modified Hamilton-Dirichlet's Principle 2”, which is expressed only using the velocity potential. It is the variational principles related to motions of the elastic floating plate on a water surface.

In this study, in order to calculate the wave-induced responses of an elastic floating plate in waves, a new method was proposed which uses the “Modified Hamilton-Dirichlet's Principle 2” and the eigenfunction expansion method for fluid motion. The velocity potentials in fluid regions with and without the plate are expanded by eigenfunctions in vertical mode which satisfy the governing equations and free-surface conditions, taking into account the presence of the plate in the same manner as Kim and Ertekin. In this method, “Modified Hamilton-Dirichlet's Principle 2” is finally reduced to a variational equation which corresponds to boundary conditions on the plate's edge. The formulation of proposed method is applicable for the floating plate of arbitrary plan geometry.

Calculated results of two kinds of rectangular and L-shaped floating plate in an open sea are compared with experimental results. Good agreement is found between computed and experimental results.

1. 緒 言

ポンツーン型浮体は、超大型浮体式海洋構造物の代表的な構造形式の一つとされるが、その構造設計を行う際には、波浪中での浮体の弾性挙動の評価が必須となる。このため、モード展開法や直接法に基づいた周波数領域での計算法や、時間領域での計算法が多数提案されている¹⁾。解析の対象とする浮体形状については、矩形平板に特化した手法から複雑な形状にも対応できるように構造部に有限要素法を用いる手法^{2),3)}もある。さらに、初期設計の段階においては、浮体の弾性応答が小さくなる浮体構造を選定するために、任意の平面形状をもつ浮体の波浪中弾性応答を簡便に評価できる解析法等も望まれる所である。このようなポンツーン型浮体

の波浪中弾性応答に関連して、一色・永田^{4),5)}は、水面に浮かぶ弾性板の運動に関する 4 種類の変分原理を導き、それらの相互関係を整理している。その内の一つである“修正された Hamilton-Dirichlet の原理 2”は、弾性平板と流体の運動を速度ポテンシャルのみで表現した変分原理であり、平板の上下変位を、得られた速度ポテンシャルから求めるものである。著者らは、前報⁶⁾において、ポンツーン型浮体の波浪中弾性応答を求めるために、この変分原理を用いる方法を提案した。

提案した方法では、流体の解析に固有関数展開法を用いる。その際、Kim and Ertekin^{7),8)}と同様に、浮体を喫水零の弾性膜面として考え、浮体の上下方向運動方程式と浮体底面位置での運動学的境界条件から、この弾性膜面位置の境界条件を速度ポテンシャルで表現し、この条件と水底条件を満足するラプラス方程式の解として、浮体底面下の速度ポテンシャルを固有関数展開する。このため、“修正された Hamilton-Dirichlet の原理 2”は、最終的に、浮体端部境界が自由端の場合に必要な 3 種類の条件、即ち、曲げモーメント及び有効剪断力密度が零の条件及び“角の条件”と呼ばれる条件、と等価な一つの変分方程式に帰着される。この変分方程式は、浮体平面端部境界に関する境界積分方程式で表示されており、任意の平面形状浮体への適用が容易な形となっている。このた

* 日立造船株式会社(佐賀大学大学院博士後期課程)

** 佐賀大学大学院 海洋エネルギー研究センター

*** ユニバーサル造船株式会社

め、この方法は、Kim and Ertekin が矩形平面形状浮体の波浪中弾性応答解析に用いた、浮体を弾性膜として考え、構造と流体の連成運動を流体のみの境界値問題として解く方法を、任意の平面形状浮体に適用できるように拡張した方法といえる。

前論文では、この研究の第 1 報として、速度ポテンシャルの固有関数展開に含まれる平面 2 次元の 4 種類の未知関数に適用する境界要素法と、浮体端部境界条件に対応する変分表示型境界積分方程式の離散化に、一定要素を用いて、長さ 300 m と 1200 m の矩形平板浮体に関する模型実験対応の波浪中弾性応答計算を行い、計算値が実験値と概略一致することを示した。しかしながら、その一致度が悪いケースも一部みられた。

そこで、本論文では、計算精度を向上させるために、以下の対応を行う。浮体端部境界で成立する変分表示型境界積分方程式には、ポテンシャルに関する境界線方向の 1 階及び 2 階微分が含まれているが、前報では、簡単のために、この境界積分方程式の離散化に一定要素を用い、2 階微分等を差分表示で表した。このため、本来、変分方程式に含まれていた“角の条件”が、平板の角の位置で厳密に考慮されないことが判明した。そこで、本論文では、Kim and Ertekin が、矩形平板浮体の“角の条件”を考慮するために用いた方法を、任意の内角を持った 2 辺の多数で構成される平板浮体に適用できるように拡張し、これを用いる。また、変分方程式の表示法にも一部不具合があったため、これを修正する。

本論文では、本研究の第 2 報として、まず、上記の改良法を含めた計算法の概要について述べる。次に、本計算法の有効性を示すために、Open Sea 中の矩形平面形状浮体を対象に、前報でも示した、矢後らによって行われた長さ 300 m の矩形平面形状浮体対応の模型実験⁹⁾とメガフロート研究組合によって行われた長さ 1200 m の矩形平面形状浮体対応の模型実験¹⁰⁾に関する計算を行い、計算値と実験値と比較する。さらに、任意の平面形状浮体に対する具体的な計算例として、大川らが行った長さ 1000 m の L 型平面形状浮体対応の模型実験¹¹⁾に関する計算を行い、計算値と実験値を比較する。

2. 解析法

2.1 基礎式

Fig.1 に示すように、一定水深 h の海面に浮かぶ任意の平面形状ポンツーン型浮体の波浪中弾性応答を考える。浮体の喫水は零と仮定し、喫水の影響は単位面積当たりの重量で考慮する。座標系は、静水面上に原点 o 、 x 軸と y 軸を水平方向、 z 軸を垂直上向きにとる。 x 軸に関して角度 θ をなす方向より入射する角周波数 ω 、振幅 ζ_0 の規則的な平面波によ

り、浮体は微小振幅の周期的な運動をするものとする。

そこで、以下では任意関数 $F(x, y, z; t)$ を

$$F(x, y, z; t) = \text{Re}\{f(x, y, z)e^{-i\omega t}\} \quad (1)$$

と表し、以下では、時間因子 $e^{-i\omega t}$ は省略し、複素振幅 $f(x, y, z)$ に関する式について示す。ここで、 i は虚数単位 ($i = \sqrt{-1}$) を、 t は時間を、 Re は実数部を表す。

Fig.1 Definition sketch of the problem

流体は非粘性、非圧縮性、非回転の完全流体と仮定し、速度ポテンシャル ϕ を導入すると、流体と等方性の一様平板とした弾性板の運動に関する基礎式が以下のように得られる。

$$\Delta\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad \left(\because \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (\Omega \text{ 内}, -h < z < 0) \quad (2)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad (z = -h) \quad (3)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g}\phi = 0 \quad (z = 0, S_f \text{ 上}) \quad (4)$$

$$(\rho g - m_p \omega^2 + D \Delta^2) \frac{\partial\phi}{\partial z} - \rho \omega^2 \phi = 0 \quad (z = 0, S_H \text{ 上}) \quad (5)$$

$$w = \frac{i}{\omega} \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{i}{\omega} \phi_z \quad \left(\because \phi_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \quad (6)$$

ここで、 Ω は流体内部を、 S_H, S_f, S_∞ はそれぞれ浮体底面境界、自由表面境界、外部無限遠境界を表す。 $w(x, y)$ は浮体の上下方向変位を、 m_p は単位面積あたりの質量を、 ρ は流体の密度を、 g は重力加速度を、 D は曲げ剛性をそれぞれ示している。式(5)は、浮体の上下方向の運動方程式と浮体底面境界 S_H における流体の連続条件式(6)から得られた式である。

浮体の周辺境界条件は自由であるので、浮体端部では、Fig.1 のように、浮体端部の法線ベクトルを n 、接線ベクトルを s とすると、曲げモーメント M_n および有効剪断力密度 $Q_n + \partial M_{ns} / \partial s$ は共に零となる。また平板の角の点では、集中剪断力が消えることから M_{ns} も零となる。そこで、次式が成立する。

$$M_n = -\frac{iD}{\omega} \left[\nabla^2 \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right) - (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (7)$$

$$Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = -\frac{i_1 D}{\omega} \frac{\partial}{\partial n} \left[\nabla^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (8)$$

$$M_{ns} = -\frac{i_1 D}{\omega} (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial n \partial s} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (9)$$

ここで、 ν はポアソン比を示す。

2.2 分割された流体域への固有関数展開法の適用

Fig.1 のように、流体領域を浮体直下の領域 2 (region-2) とその他の領域 1 (region-1) とに分割する。それぞれの領域の速度ポテンシャルを ϕ_1 、 ϕ_2 とおくと、 ϕ_1 は式(3)と式(4)を、また、 ϕ_2 は式(3)と式(5)を満足するラプラス方程式(2)の解として、それぞれ次のように表される^{6),7),8),12),13)}。

$$\phi_1(x, y, z) = \frac{g \zeta_0}{\omega} \left[\{f_0(x, y) + f_1(x, y)\} \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} + \sum_{\ell=1}^{\infty} f_2^{(\ell)}(x, y) \frac{\cos k_\ell(z+h)}{\cos k_\ell h} \right] \quad (10)$$

$$\phi_2(x, y, z) = \frac{g \zeta_0}{\omega} \sum_{m=-2}^{\infty} \phi_m(x, y) \frac{\cosh \mu_m(z+h)}{\cosh \mu_m h} \quad (11)$$

ここで、 $f_0(x, y)$ は入射波のポテンシャルを表す。 $f_1(x, y)$ は、進行反射波や浮体の動揺による発散波に関するポテンシャルを表し、次式で表される無限遠での放射条件を満足しなければならない。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial f_1}{\partial r} - i_1 k_0 f_1 \right) = 0 \quad (S_\infty \text{上}) \quad (12)$$

k_0 、 k_ℓ ($\ell=1, 2, \dots$)、 μ_m ($m=-2, -1, 0, 1, 2, \dots$) はそれぞれ次式の根である。

$$k_0 h \tanh k_0 h = -k_\ell h \tan k_\ell h = \omega^2 h / g \quad (13)$$

$$\frac{\omega^2 h}{g} = \mu_m h \left(1 - \frac{m_p \omega^2}{\rho g} + \frac{D \mu_m^4}{\rho g} \right) \tanh \mu_m h \quad (14)$$

式(10)と式(11)は、式(2)のラプラス方程式を満足する必要があることから、 $f_1(x, y)$ 、 $f_2^{(\ell)}(x, y)$ 、 $\phi_m(x, y)$ はそれぞれ次式を満足しなければならない。

$$\Delta f_1 + k_0^2 f_1 = 0 \quad (15)$$

$$\Delta f_2^{(\ell)} - k_\ell^2 f_2^{(\ell)} = 0 \quad (\ell=1, 2, \dots) \quad (16)$$

$$\Delta \phi_m + \mu_m^2 \phi_m = 0 \quad (m=-2, -1, 0) \quad (17)$$

$$\Delta \phi_m - \mu_m^2 \phi_m = 0 \quad (m=1, 2, \dots) \quad (18)$$

2.3 領域 1 と領域 2 の境界面での条件

Fig.1 に示すように、領域 1 (region-1) と領域 2 (region-2) の境界面位置での流体圧力と流速の連続条件から、次式が得られる。

$$\phi_1 = \phi_2, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \quad (-h \leq z \leq 0) \quad (19)$$

式(19)に、式(10)と式(11)を代入して得られる式に $\cosh k_0(z+h)$ または $\cos k_\ell(z+h)$ をかけて、 $(-h \leq z \leq 0)$ の区間で積分し、境界上の点 (x, y) を点 j で示すと、次式を得る。

$$\bar{f}_1(j) = -\bar{f}_0(j) + \sum_{m=-2}^{\infty} C_m \bar{\phi}_m(j) \quad (20)$$

$$\bar{f}_2^{(\ell)}(j) = \sum_{m=-2}^{\infty} D_{m\ell} \bar{\phi}_m(j) \quad (\ell=1 \dots \ell^*) \quad (21)$$

$$f_1(j) = -f_0(j) + \sum_{m=-2}^{\infty} C_m \phi_m(j) \quad (22)$$

$$f_2^{(\ell)}(j) = \sum_{m=-2}^{\infty} D_{m\ell} \phi_m(j) \quad (\ell=1 \dots \ell^*) \quad (23)$$

ここで、 ℓ^* は ℓ の打ち切り項数である。

$$\bar{f}_0 = \frac{\partial f_0}{\partial n}, \quad \bar{f}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial n}, \quad \bar{f}_2^{(\ell)} = \frac{\partial f_2^{(\ell)}}{\partial n}, \quad \bar{\phi}_m = \frac{\partial \phi_m}{\partial n} \quad (24)$$

係数 C_m と $D_{m\ell}$ は、次式で表される。

I) $m=-2, -1, 0$ のとき

$$C_m = \frac{\lambda_0}{N_0 \sinh \lambda_0 \cosh \mu_m h \{ \lambda_0^2 - (\mu_m h)^2 \}} \times [\lambda_0 \cosh \mu_m h \cdot \sinh \lambda_0 - \mu_m h \cdot \sinh \mu_m h \cdot \cosh \lambda_0]$$

$$D_{m\ell} = \frac{\lambda_\ell}{N_\ell \sin \lambda_\ell \cosh \mu_m h \{ (\mu_m h)^2 + \lambda_\ell^2 \}} \times [\lambda_\ell \cosh \mu_m h \cdot \sin \lambda_\ell + \mu_m h \cdot \sinh \mu_m h \cdot \cos \lambda_\ell] \quad (25)$$

ここで、 $\lambda_0 = \mu_0 h$ のとき、 $C_0 = 1$ である。

II) $m=1, 2, \dots$ のとき

$$C_m = \frac{\lambda_0}{N_0 \sinh \lambda_0 \cos \mu_m h \{ \lambda_0^2 + (\mu_m h)^2 \}} \times [\lambda_0 \cos \mu_m h \cdot \sinh \lambda_0 + \mu_m h \cdot \sin \mu_m h \cdot \cosh \lambda_0]$$

$$D_{m\ell} = \frac{-\lambda_\ell}{N_\ell \sin \lambda_\ell \cos \mu_m h \{ (\mu_m h)^2 - \lambda_\ell^2 \}} \times [\lambda_\ell \cos \mu_m h \cdot \sin \lambda_\ell - \mu_m h \cdot \sin \mu_m h \cdot \cos \lambda_\ell] \quad (26)$$

ここで、 $\lambda_\ell = \mu_\ell h$ のとき $D_{m\ell} = 1$ である。また、式(25)と式(26)において、 $\lambda_0 = k_0 h$ 、 $\lambda_\ell = k_\ell h$ であり、 N_0 と N_ℓ は次式で表される。

$$N_0 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2\lambda_0}{\sinh 2\lambda_0} \right], \quad N_\ell = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2\lambda_\ell}{\sinh 2\lambda_\ell} \right] \quad (27)$$

2.4 境界積分方程式の離散化

Fig.1 において、浮体境界線 Γ 上の任意の 2 点を (ξ, η) 、 (ξ', η') とし、この 2 点間の距離を r とする。Green の公式に、式(15)～式(18)の特解として、それぞれ、 $-iH_0^{(1)}(k_0 r)/2$ 、 $-K_0(k_\ell r)/\pi$ 、 $-iH_0^{(1)}(\mu_m r)/2$ 、 $-K_0(\mu_m r)/\pi$ を用いると、未知関数 f_1 、 $f_2^{(\ell)}$ 、 ϕ_m に関する境界積分方程式が得られる。ここで、 $H_0^{(1)}(k_0 r)$ は 0 次の第 1 種ハンケル関数を、 $K_0(k_\ell r)$

Fig.2 Discretization of floating plate

及び $K_0(\mu_m r)$ は 0 次の変形ベッセル関数を表している。Fig.2 に示すように、浮体の端部境界 Γ を N 個の線分に分割し、 $f_1, f_2^{(i)}, \varphi_m$ とこれらの法線方向微分値が、この線分上で一定とすると、積分方程式は次のように離散化される^{6),12),13)}。

$$\sum_{j=1}^N [\alpha_{ij}^{(0)} f_1(j) - A_{ij} \bar{f}_1(j)] = 0 \quad (i=1 \sim N) \quad (28)$$

$$\sum_{j=1}^N [\alpha_{ij}^{(\ell)} f_2^{(\ell)}(j) - B_{ij}^{(\ell)} \bar{f}_2^{(\ell)}(j)] = 0 \quad (i=1 \sim N, \ell=1 \sim \ell^*) \quad (29)$$

$$\sum_{j=1}^N [\beta_{ij}^{(m)} \varphi_m(j) - E_{ij}^{(m)} \bar{\varphi}_m(j)] = 0 \quad (i=1 \sim N, m=-2, -1, 0) \quad (30)$$

$$\sum_{j=1}^N [\beta_{ij}^{(m)} \varphi_m(j) - F_{ij}^{(m)} \bar{\varphi}_m(j)] = 0 \quad (i=1 \sim N, m=1 \sim m^*) \quad (31)$$

ここで、

$$\bar{f}_1(j) = \frac{\partial f_1(j)}{\partial n}, \quad \bar{f}_2^{(\ell)}(j) = \frac{\partial f_2^{(\ell)}(j)}{\partial n}, \quad \bar{\varphi}_m(j) = \frac{\partial \varphi_m(j)}{\partial n} \quad (32)$$

ℓ^*, m^* は打ち切り項数である。また $\alpha_{ij}^{(0)}, \alpha_{ij}^{(\ell)}, \beta_{ij}^{(m)}, A_{ij}, B_{ij}^{(\ell)}, E_{ij}^{(m)}, F_{ij}^{(m)}$ は、既知量である。式(28)の誘導には、式(12)の無限遠での放射条件を用いている。

2.5 平板端部境界条件の変分方程式表示

一色・永田^{4),5)}は、水面に浮かぶ弾性板の運動に関する 4 種類の変分原理を導き、それらの相互関係を整理している。この内、“修正された Hamilton-Dirichlet の原理 2”は、弾性板と流体の運動を速度ポテンシャルのみで表現したものであるが、本解析法では、流体部に固有関数展開法を用いて、式(2)～(6)が満足されていることを考慮すると、前報⁶⁾で示したように、最終的に、この変分原理から次式が得られる。

$$\int_{\Gamma} \left[M_n \frac{\partial \delta \phi_z}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial \delta \phi_z}{\partial s} - Q_n \delta \phi_z \right] ds = 0 \quad (z=0 \text{ 上}) \quad (33)$$

$$\begin{cases} M_n = -\frac{i_1 D}{\omega} \left[\nabla^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} M_{ns} = -\frac{i_1 D}{\omega} (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial n \partial s} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} Q_n = -\frac{i_1 D}{\omega} \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (36)$$

ここで、Fig.2 で示すように、節点 j を挟む 2 辺の j 側端部を s_{j+0}, s_{j-0} とし、次の式(37)を用いると、式(33)は以下で表される式(38)のように変形される。

$$\int_{\Gamma} M_{ns} \frac{\partial \delta \phi_z}{\partial s} ds = - \sum_{j=1}^N [M_{ns}]_{s_{j-0}}^{s_{j+0}} \delta \phi_z - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \delta \phi_z ds \quad (37)$$

$$\int_{\Gamma} \left[M_{ns} \frac{\partial \delta \phi_z}{\partial s} - \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) \delta \phi_z \right] ds - \sum_{j=1}^N [M_{ns}]_{s_{j-0}}^{s_{j+0}} \delta \phi_z = 0 \quad (38)$$

従って、式(33)は、式(7)～(9)で示した式と等価であることがわかる。式(33)は、微分方程式表示の式(7)～(9)に比べ、一つの境界積分方程式表示となっているため、任意の平面形状の浮体に適用しやすい形になっている。式(34)～(36)を式(33)に代入して、この積分方程式を一定要素で離散化すると、

ポテンシャル関数で表示した平板の端部境界条件が次のように得られる。

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \left[\left\{ (\nabla^2 \phi_z)_j - (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial s^2} \right)_j \right\} \delta \left(\frac{\partial \phi_z}{\partial n} \right)_j + (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial n \partial s} \right)_j \delta \left(\frac{\partial \phi_z}{\partial s} \right)_j - \left(\frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 \phi_z \right)_j \delta (\phi_z)_j \right] \Delta s_j = 0 \quad (39)$$

2.6 一定要素における浮体平面に関する角の点の処理法

先に述べたように、式(33)で示す平板の端部境界条件には、式(9)で示す“角の条件”も含まれている。このため、Fig.2 のような多角形平面浮体の場合、式(33)を離散化する際に、角の位置に計算点をとる必要がある。しかしながら、本計算法では、1st ステップとして、式(33)を一定要素で離散化した式(39)を用い、一定要素の中央を計算点として、 ϕ_z の s 方向への 1 階微分及び 2 階微分を差分近似するため、“角の条件”の位置を正確に考慮することができない。そこで、本論文では、式(39)を解く際に、“角の条件”を以下のように別途考慮する。この“角の条件”の処理法については、Kim and Ertekin^{7),8)}が 90 度の内角を持つ矩形平板浮体に関して提案している。ここでは、この方法を任意の内角を持つ多角形浮体に適用できるように、以下のように拡張する。

Fig.3 Additional nodal points for corner conditions

Fig.3 に、多角形平面浮体の角の点近傍に関する境界要素分割を示す。図より、 $s=0_{i+1}^+$ は要素 $i+1$ の始点を、 $s=0_i^-$ は要素 i の終点を表す。また、黒丸は一定要素中央の計算点を示し、 $i, i+1$ 等は計算点の番号を表す。白丸で示した点 i' と $i'+1$ は浮体外のダミーの計算点である。ダミー計算点 i' と $i'+1$ の速度ポテンシャルの微分表示は、Taylor 展開を用いると式(40)～(43)となる。

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{i'} \equiv \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{i+1} - h_{i+1} \frac{\partial}{\partial s_{i+1}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_{s=0_{i+1}^+} \quad (40)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial n_{i+1}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\}_{i'} \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial n_{i+1}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\}_{i+1} - h_{i+1} \frac{\partial}{\partial s_{i+1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial n_{i+1}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\} \Big|_{s=0_{i+1}^+} \quad (41)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{i'+1} \equiv \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_i + h_i \frac{\partial}{\partial s_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \Big|_{s=0_i^-} \quad (42)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\}_{i'+1} \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\}_i + h_i \frac{\partial}{\partial s_i} \left\{ \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\} \Big|_{s=0_i^-} \quad (43)$$

ϕ_z に関する $s=0_{i+1}^+$ と $s=0_i^-$ の位置での接線方向微分は、それぞれ次のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial s_{i+1}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_{s=0_{i+1}^+} = \left\{ \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \frac{\partial n_i}{\partial s_{i+1}} + \frac{\partial}{\partial s_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \frac{\partial s_i}{\partial s_{i+1}} \right\} \Big|_{s=0_i^-} \quad (44)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_{s=0_i^-} = \left\{ \frac{\partial}{\partial n_{i+1}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \frac{\partial n_{i+1}}{\partial s_i} + \frac{\partial}{\partial s_{i+1}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \frac{\partial s_{i+1}}{\partial s_i} \right\} \Big|_{s=0_{i+1}^+} \quad (45)$$

平板の角の条件は、式(9)より次式のように表され、

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial n} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_{s=0_{i+1}^+} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_{s=0_i^-} = 0 \quad (46)$$

要素 $i+1$ 上での、 ϕ_z の法線方向微分は $s=0_{i+1}^+$ と $s=0_i^-$ まわりの二次関数として次式のように近似することができる。

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \equiv a + bs^2 \quad (47)$$

ここで、 a と b は定数で、点 $i+1$ と点 $i+2$ の 2 つの計算点における ϕ_z の n_{i+1} 方向微分値から求める。式(47)に、 $s=0$ を代入することにより、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial n_{i+1}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_{s=0_{i+1}^+} = - \frac{\left(h_{i+1} + \frac{h_{i+2}}{2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial n_{i+1}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{i+1} - \frac{h_{i+1}^2}{4} \frac{\partial}{\partial n_{i+1}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{i+2}}{\left(h_{i+1} + \frac{h_{i+2}}{2} \right)^2 - \frac{h_{i+1}^2}{4}} \quad (48)$$

要素 i 上での ϕ_z の法線方向微分値についても、同様な方法を適用することにより、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_{s=0_i^-} = \frac{\left(h_i + \frac{h_{i-1}}{2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_i - \frac{h_i^2}{4} \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{i-1}}{\left(h_i + \frac{h_{i-1}}{2} \right)^2 - \frac{h_i^2}{4}} \quad (49)$$

最終的に、式(44)～(46)を用いると、式(40)～(43)で示されるダミー点 i' と $i'+1$ は、要素が連続して角を含む場合も考慮しており、それらのダミー点に関する ϕ_z と、その法線方向微分値は、それぞれ以下の式(50)～(53)で表される。

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{i'} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{i+1} - \frac{h_{i+1}}{1 - \frac{\partial s_{i+1}}{\partial s_i} \Big|_{s=0_{i+1}^+} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial s_{i+1}} \Big|_{s=0_i^-}} \times \left\{ \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \frac{\partial n_i}{\partial s_{i+1}} \Big|_{s=0_i^-} + \frac{\partial}{\partial n_{i+1}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \frac{\partial n_{i+1}}{\partial s_i} \Big|_{s=0_{i+1}^+} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial s_{i+1}} \Big|_{s=0_i^-} \right\} \quad (50)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial n_{i+1}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\}_{i'} = \left\{ \frac{\partial}{\partial n_{i+1}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\}_{i+1} \quad (51)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{i'+1} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_i + \frac{h_i}{1 - \frac{\partial s_i}{\partial s_{i+1}} \Big|_{s=0_i^-} \cdot \frac{\partial s_{i+1}}{\partial s_i} \Big|_{s=0_{i+1}^+}} \times \left\{ \frac{\partial}{\partial n_{i+1}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \frac{\partial n_{i+1}}{\partial s_i} \Big|_{s=0_{i+1}^+} + \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \frac{\partial n_i}{\partial s_{i+1}} \Big|_{s=0_i^-} \cdot \frac{\partial s_{i+1}}{\partial s_i} \Big|_{s=0_{i+1}^+} \right\} \quad (52)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\}_{i'+1} = \left\{ \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\}_i \quad (53)$$

ここで、 $\frac{\partial s_{i+1}}{\partial s_i} \Big|_{s=0_{i+1}^+}$ 、 $\frac{\partial s_i}{\partial s_{i+1}} \Big|_{s=0_i^-}$ 、 $\frac{\partial n_{i+1}}{\partial s_i} \Big|_{s=0_{i+1}^+}$ 、 $\frac{\partial n_i}{\partial s_{i+1}} \Big|_{s=0_i^-}$ はそれ

ぞれ Fig.3 の交点拡大図で示すように、要素 i における接線ベクトル s_i と法線ベクトル n_i 及び要素 $i+1$ における接線ベクトル s_{i+1} と法線ベクトル n_{i+1} に関する方向余弦等であり、既知量である。以上より、 ϕ_z の s 方向 1 階微分及び 2 階微分を差分近似する際に、“角の条件”の位置を正確に考慮した差分公式が得られたことになる。

2.7 具体的な計算法

平板浮体の上下変位 w は具体的に以下のような手順で求めることができる。

① 式(28)～(31)より、 $\bar{f}_1$ は f_1 を、 $\bar{f}_2^{(\ell)}$ は $f_2^{(\ell)}$ を、 $\bar{\varphi}_m$ は φ_m をそれぞれ用いて、次のように表す。

$$\bar{f}_1(i) = \sum_{j=1}^N M_{ij}^{(0)} f_1(j) \quad (i=1 \sim N) \quad (54)$$

$$\bar{f}_2^{(\ell)}(i) = \sum_{j=1}^N M_{ij}^{(\ell)} f_2^{(\ell)}(j) \quad (i=1 \sim N, \ell=1 \sim \ell^*) \quad (55)$$

$$\bar{\varphi}_m(i) = \sum_{j=1}^N N_{ij}^{(m)} \varphi_m(j) \quad (i=1 \sim N, m=-2, -1 \sim m^*) \quad (56)$$

② 式(20)～(23)と式(54)～(56)より、浮体境界上の φ_m は次式で表される。

$$\varphi_m(j) = \sum_{k=1}^N a_{jk}^{(m)} \cdot \varphi_{-2}(k) + \sum_{k=1}^N b_{jk}^{(m)} \cdot \varphi_{-1}(k) + a^{(m)}(j) \quad (57)$$

ここで、 $j=1, 2, \dots, N$ 、 $k=1, 2, \dots, N$ 、 $m=1, 2, \dots, m^*$ で、 $a^{(m)}(j)$ 、 $a_{jk}^{(m)}$ 、 $b_{jk}^{(m)}$ は既知の係数である。

③ 式(11)を z で微分して $z=0$ とした式に、式(57)を代入すると、次の式(58)のようになる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(j) = \sum_{k=1}^N f_{jk}^{(1)} \cdot \varphi_{-2}(k) + \sum_{k=1}^N g_{jk}^{(1)} \cdot \varphi_{-1}(k) + h_j^{(1)} \quad (58)$$

ここで、 $f_{jk}^{(1)}$ 、 $g_{jk}^{(1)}$ 、 $h_j^{(1)}$ は係数である。

④ 平板の境界条件式(39)には、境界線の接線方向 s に関する 1 階微分および 2 階微分が現れるので、差分表示する。

⑤ 式(58)に基づき、式(39)の各項に対応する微分値を表し、それらを式(39)に代入し、無次元化を行うと 2 組の式が得られる。これらの式は、 $2N$ 個の未知量 $\varphi_{-2}(k)$ と $\varphi_{-1}(k)$ に対して同数の式を表すため、連立一次方程式として解くことができる。

⑥ 導き出された $\varphi_{-2}(k)$ と $\varphi_{-1}(k)$ を式(57)に代入して、 $\varphi_m(j)$ ($m=0, 1, 2, \dots, m^*$) を求める。

⑦ 式(6)を用いて、平板浮体の上下変位は次の式(59)で求められる。

$$\frac{w(x, y)}{\zeta_0} = \frac{i_1}{(\omega^2 h / g)} \left[\sum_{k=1}^N h f_{jk}^{(1)} \cdot \varphi_{-2}(k) + \sum_{k=1}^N h g_{jk}^{(1)} \cdot \varphi_{-1}(k) + h h_j^{(1)} \right] \quad (59)$$

3. 計算結果および考察

3.1 矩形平面形状の浮体の場合

提案した解析法の具体的な計算例として、Fig.4 に示すような矩形平面形状の浮体を対象に、周波数領域の計算を行い、計算結果と実験結果とを比較した。実験値としては、矢後らによる長さ 300 m 浮体対応の波浪中弾性応答実験結果⁹⁾ (Case-1) とメガフロート技術研究組合において実施された長さ 1200 m 浮体対応の波浪中弾性応答実験 (Case-2) の実験結果¹⁰⁾ を用いた。両実験条件を基にした本解析の計算条件を Table.1 に示す。ここで、 ρ_p は浮体の密度を表している。

Fig.5 は Case-1 の条件下での波向 $\theta = 0^\circ$ に対する波長浮体長比 $\lambda_{\infty}/L = 0.1, 0.7, 1.0$ 、および Fig.6 は $\lambda_{\infty}/L = 0.4$ で波向 $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 、 $\lambda_{\infty}/L = 0.3$ で波向 $\theta = 60^\circ$ に対する浮体上下変

Fig.4 Coordinate system for Rectangular Floating plate

Table.1 Calculation conditions for Rectangular plates

Principal particulars	Case-1	Case-2
Length : L[m]	300m	1200m
Breadth : B[m]	9.75	15
Draft [m]	1.95	3
Water depth : h[m]	0.016	0.013
$D/\rho gh^4$	0.079	27.348
ρ_p/ρ	1.45	2.281
Poisson's ratio : ν	0.33	0.33

Fig.5 Longitudinal distributions of vertical displacement amplitude (L=300m, B=60m)

位振幅と入射波振幅との比 $|w/\zeta_0|$ に関する計算値と実験値の Port side、Centerline、Starboard 位置での浮体長手方向分布および上下変位振幅計算値の平面分布を示している。ここで、 λ_{∞} は水深無限大時の波長、L は浮体長さ、w は浮体上下変位振幅、 ζ_0 は入射波振幅である。図より、計算値は実験値と比較して良く一致しているのがわかる。

今回、Kim and Ertekin が、矩形平板浮体の“角の条件”を考慮するために用いた方法を、任意の内角を持った 2 辺の多数で構成される平板浮体に適用できるように拡張し、定式化の改良を行った。Fig.7 に、Case-1 の条件下での波向 $\theta = 0^\circ$ で、 $\lambda_{\infty}/L = 0.3$ に対する Port side、Centerline、Starboard side 位置での浮体上下変位振幅に関する改良前と改良後の比較を示す。これより今回行った定式化の改良により、計算値は実験値と良く合う結果を得ることができ、計算精度が向上した。

Fig.8 は Case-2 の条件下での $\lambda_{\infty}/L = 0.04, 0.08, 0.12$ 、波向が $\theta = 0^\circ$ に対する浮体の Port side、Centerline、Starboard side 位

Fig.6 Longitudinal distributions of vertical displacement amplitude (L=300m, B=60m)

(a) Use of unimproved equation (b) Use of improved equation

Fig.7 Longitudinal distributions of vertical displacement amplitude (L=300m, B=60m, $\lambda_{\infty}/L = 0.3$, $\theta = 0^\circ$)

Fig.8 Longitudinal distributions of vertical displacement amplitude ($L=1200\text{m}$, $B=240\text{m}$)

置での浮体の上下変位振幅に関する計算結果と、上下変位振幅計算値の平面分布を示している。この場合も、計算値は実験値に良く一致している。計算時間に関しては、HPC5000, CPU: Xeon E5450 を用いて、Case-1(浮体境界分割数 $N=120$, $\ell^* = m^* = 2$)で 1 周波数あたり 2 秒程度である。一方、Case-2($N=480$, $\ell^* = m^* = 1$)で 1 周波数あたり 99 秒程度である。

3.2 L 型平面形状の浮体の場合

提案した解析法を用いて様々な平面形状に対応する一つの具体例として、Fig.9 に示すような L 型平面形状の浮体を対象に、周波数領域の計算を行い、計算結果と実験結果とを比較した。

実験値としては、大川らによる長さ 1000 m 浮体対応の波浪中弾性応答実験結果¹¹⁾(Case-3)を用いた。実験条件に基づいた本解析の計算条件を Table.2 に示す。ここで、 ρ_p は浮体の密度を表している。波向は $\theta=0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ とし、寸法等は Fig.10 に示す。細長部の中心線を Sub.Center と称する。Fig.11 は Case-3 の条件下での波向 $\theta=0^\circ$ における波周期 T を変化させた場合の Port side、Centerline、Starboard side、Sub.Center 位置における lw/ζ_0 の長手方向分布の計算結果を

Fig.9 Coordinate system for L-shape Floating plate

Table.2 Calculation conditions for L-shaped plates

Principal particulars	Case-3	Remarks column
	1000m	
Length : $L[\text{m}]$	10	$L = L_0 + L_1 = 5.8[\text{m}] + 4.2[\text{m}]$
Breadth : $B[\text{m}]$	2	$B = B_0 + B_1 = 1.2[\text{m}] + 0.8[\text{m}]$
Draft $[\text{m}]$	0.015	
Water depth : $h[\text{m}]$	0.6	
$D/\rho gh^4$	0.649	
ρ_p/ρ	0.214	
Poisson's ratio : ν	0.33

Fig.10 Coordinate system for L-shaped Floating plate

示している。Fig.12 に波周期 $T=1.4$ s における波向 $\theta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ に変化させた場合の結果を表している。いずれも計算値は実験値に概略一致しているのがわかる。

また、Fig.13 はいくつかの計算ケースについて、 lw/ζ_0 の平面分布に関する計算結果を示している。

計算時間に関しては、同様に HPC5000, CPU: Xeon E5450 を用いて、浮体境界分割数 $N=300$, $\ell^* = m^* = 2$ で 1 周波数あたり 62 秒程度である。

(a) $\theta=0^\circ$, $T=0.5$ s

(b) $\theta=0^\circ$, $T=0.6$ s

(c) $\theta = 0^\circ$, $T = 0.8$ s (d) $\theta = 0^\circ$, $T = 1.0$ s (e) $\theta = 0^\circ$, $T = 1.2$ s (f) $\theta = 0^\circ$, $T = 1.4$ s

Fig.11 Longitudinal distributions of vertical displacement amplitude (L-shape)

(a) $\theta = 30^\circ$, $T = 1.4$ s (b) $\theta = 45^\circ$, $T = 1.4$ s (c) $\theta = 60^\circ$, $T = 1.4$ s (d) $\theta = 90^\circ$, $T = 1.4$ s

Fig.12 Longitudinal distributions of vertical displacement amplitude (L-shape)

4. 結 言

前論文⁶⁾で喫水零のポンツーン型浮体の波浪中弾性応答を求めるために、“Hamilton-Dirichletの原理2”と流体部の解析に固有関数展開法を用いた解析法を提案した。しかしながら、一部、計算値と実験値の一致度が良くない結果を得た。これは、浮体端部境界条件に対応する変分表示型境界積分方程式の離散化に一定要素を用いたために、本来、変分方程式に含まれていた“角の条件”が、平板の角の位置で厳密に考慮されないことが判明した。そこで、本論文では、この点に関する改良法を示し、実験結果が示されている長さ300mと1200mの矩形平面形状浮体および長さ1000mのL型平面形状の浮体対応の計算を行い、計算値と実験値を比較した。その結果、計算値は、実験値と良く一致することがわかった。以上より、本解析法は任意形状の浮体に対する波浪中弾性応答解析として有効な手法であることを確認した。

謝 辞

本研究の浮体底面下に関する分散関係式の固有値計算法については東京大学・高木健先生にご教授頂きました。また、浮体端部の境界条件式を表す変分方程式の誘導については蔚山大学・一色浩先生にご助言を頂きました。ここに厚く御礼申し上げます。

参 考 文 献

- (1) (社)日本造船学会海洋工学委員会構造部会 編：超大型浮体構造物の構造設計、成山堂書店、pp70-153、2004
- (2) 瀬戸秀幸：超大型浮体式構造物における規則波中弾性応答の理論解析(第1報)、日本造船学会論文集、第184号、pp.231-241、1998
- (3) Utsunomiya,T. and Watanabe,E. : Accelerated Higher Order Boundary Element Method for Wave Diffraction/Radiation Problems and Its Applications, Proc.12th Int. Offshore and Polar Engineering Conference, pp305-312, 2002.
- (4) 一色浩、永田修一：水面に浮かぶ弾性平板の運動に関する変分原理、関西造船協会誌、第233号、pp79-85、2000
- (5) Isshiki,H. and Nagata,S. : Variational Principles Related to Motions of an Elastic Plate Floating on a Water Surface, Proc. of the 11th Int. Conf. on International Society of Offshore and Polar Engineers, pp.190-197, 2001.
- (6) 新里英幸、永田修一、豊田和隆、島崎克教：ポンツーン型浮体の波浪中弾性応答解析へのHamilton-Dirichlet原理の適用(第1報：矩形平板浮体への適用)、日本船舶海洋工学会論文集、第6号、pp.257-265、2007.
- (7) Kim, J-W and Ertekin, RC : An Eigenfunction Expansion Method for Predicting Hydroelastic Behavior of a Shallow-Draft VLFS, Proc. 2nd Intl. Conf. on Hydroelasticity in Marine Tech., Fukuoka, pp.47-59, 1998.
- (8) Kim,J-W and Ertekin,RC : Hydroelastic Response of a Floating Mat-Type Structure in Oblique, Shallow-Water Waves, Journal of Ship Research, Vol.43,No.4, pp.241-254, 1999.
- (9) 矢後清和、遠藤久芳：浅喫水箱型浮体の波浪中弾性応答について—大型模型による水槽試験—、日本造船学会論文集、第180号、pp.341-352、1996
- (10) メガフロート技術研究組合：弾性応答計算、B.近似3次元計算の精度チェック、剛体・弾性体漂流力、1998
- (11) 大川豊、大松重雄、矢後清和、永田修一、佐藤千昭：メガフロートの弾性応答総合水槽実験、第74回船研研究発表会講演集、2000.
- (12) Nagata,S.,Yoshida,H.,Fujita,T. and Isshiki,H. : The Analysis of the Wave-Induced Responses of an Elastic Floating Plate, Proc. of the 16th Int. Conf. on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Vol.VI, pp.163-169, 1997.
- (13) Nagata,S.,Niizato,H.,Yoshida,H.,Ohkawa,Y.and Kobayashi, K. : Effects of Breakwaters on Motions of an Elastic Floating Plate in Waves, International Journal of Offshore and Polar Engineering, Vol.13,No.1, pp.43-51, 2003.

Fig.13 Elastic deformations of L-shaped floating plate