2次元一様流中の半没平板まわりの流れに関する解析解について

正会員 鈴木 勝 雄*

正会員 日 比 茂 幸**

The Analytical Representations for 2-D Flows around a Semi-Submerged Vertical Plate in a Uniform Stream

by Katsuo Suzuki, *Member*

Shigeyuki Hibi, *Member*

Summary

The perturbed complex potentials representing flows around a vertical plate semi-submerged in a uniform stream are derived in analytical forms by the reduction method. They are composed from the regular solution and the weak singular eigen solutions. The linear combinations of them represent some flows such as regular flow, zero-vertical flux flow, flow satisfying Kutta condition and wave-free flow. The wave resistances of the flows are also obtained in analytical forms. The analytical solution obtained by Bessho-Mizuno(1962) has a possibility that it does not satisfy the boundary condition on the plate.

1. 序 論

本論の目的は2次元一様流の水面に鉛直に平板を半没させたときの平板周りの流れを表現する解析的な解を求めることである。水面条件は線形であるものとしている。

2次元線形水波問題における解析解については、周期的入射波中におかれた半没平板まわりの流れについての Ursell¹⁾ の解が有名である。Ursell は、局所波をベッセル関数を含んだ積分の形で表現する解析的表示式を見出し、平板による反射と透過に関する係数を変形ベッセル関数で表現することに成功している。

一方、本論の問題に関する解析解については別所一水野²⁾ が報告している。この解は積分方程式の解（2重吹き出し分布）を解析的に表示する形式となっている。そこに用いられている関数は虚変数のベッセル関数等で表現できると述べられているが、Ursell の解に較べて見易い形とはなっていない。また本論第3章に述べるように境界条件を正しく満たしているかに疑問がある。

本論ではこの問題に reduction 法³⁾ を適用することにより Ursell の表示と同形式の解を得ている。この解法は、reduction 法を用いる点においては別所一水野の方法と同等であるが、reduction 法の解に不定性があることに着目し、一般解を加えることによって、正しく境界条件を満たす解を得ることに成功している。本論ではこの解を正則解と呼んでいる。正則解では無限遠方の水面下の、波数の逆数にあたる位置を通る流線が平

板上に到達するという特性を有している。

次に、平板と静止水面との交点に弱い特異性を許すことにより、平板上の斉次な境界条件を満たす解が存在することを示した。この斉次な特異解の強さを種々に変えて、正則解に加えることにより、様々な流れを作り出すことができることを示した。無限前方の静止水面を通る流線が平板表面上に至る zero-vertical-flux 流れというべき流れ、平板下端で Kutta の流出条件を満たす解、更に、平板前後で対称的な流れとなり、後続波が発生しない wave-free 流れすら作ることができている。

最後に、境界要素法による解と比較することにより、別所一水野²⁾ の解が平板上の境界条件を満たしていない可能性について論じている。

なお、本論では、純粋に数学的見地から境界値問題における解の表示と性質について論じており、特異な斉次解がどんな物理現象に対応しているのか、特に造波抵抗ばかりでなく、その他の碎波や、造渦などによる運動量損失現象に関連した抗力に及ぼす効果などの興味深い事項については検討していない。

2. Reduction 法による解法

2.1 正則解の導入

座標系を Fig.1 のようにとる。一様流は x の負方向に流れているものとし、鉛直平板の深さを a としておく。流場は複素ポテンシャルで表現する。

$$\left. \begin{aligned} F(z) &= -Uz + w(z) \\ &= \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \\ z &= x + iy \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

線形自由表面条件は以下と書ける。

* 防衛大学校名誉教授

** 防衛大学校

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}\{L[w(z)]\} &= 0 \quad \text{on } y=0 \\ L &\equiv \frac{d}{dz} + i\nu - \mu \\ \nu &= g/U^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで ν は波数、 μ は仮想摩擦係数 ($\mu \rightarrow +0$) である。
平板上の境界条件は以下の 2 通りで書ける。流速で書けば

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{dw}{dz}(z)\right\} = U \quad \text{on } x=0, -a \leq y \leq 0 \quad (3)$$

流れ関数で表現すれば

$$\Psi(0, y) = \Psi_H \text{ (実定数)} \quad \text{on } x=0, -a \leq y \leq 0 \quad (4)$$

以上の境界条件の下に攪乱複素ポテンシャル $w(z)$ の解析的表示を求めることが本論の目的である。

解を求めるのに reduction 法³⁾ (縮約化法と訳しておく) を用いる。攪乱複素ポテンシャル $w(z)$ に自由表面条件の演算を施すと、波動項があらわれない、いわば局所波動的な縮約化された関数となる。この関数が満たすべき境界条件を解析的に解いておき、最後に逆演算子 $1/L$ を作用させて本来の解を得るという手法である。ロシアの学者が好んで用いた³⁾。

まず $w(z)$ に L を作用させて縮約化された関数を得る。

$$\begin{aligned} Uf(z) &= L[w(z)] \\ &= \frac{dw}{dz}(z) + i\nu w(z) \end{aligned} \quad (5)$$

自由表面条件は以下のような簡単な式となる。

$$\operatorname{Re}\{f(z)\} = 0 \quad \text{on } y=0 \quad (6)$$

平板上では境界条件 (3), (4) の両式を用いて以下を得る。

$$\operatorname{Re}\{f(z)\} = 1 - \frac{\nu}{U} \Psi_H - \nu y \quad \text{on } x=0, -a \leq y \leq 0 \quad (7)$$

ここで注意すべきことは式 (7) は同値である 2 つの境界条件を同時に用いているので、この条件は必要条件に過ぎないことである。後に条件 (3) 式ないし (4) 式に戻って適用させる必要がある。

また、(5) 式を

$$\frac{dw}{dz}(z) = -i\nu w(z) + Uf(z) \quad (8)$$

の形に書いておくと、 $w(z)$ の導関数 (複素流速) の特異性は $f(z)$ の特異性と同一であることがわかる。

次に気づくことは平板の上端 ($x=y=0$) で (6), (7) 式が連続な条件となるには以下でなければならないことである。

$$\Psi_H = U/\nu \quad (9)$$

この条件を満たす解 $w_R(z)$ を正則な解と呼び、先ずはこの解を求めることとする。なおこの条件は、無限上流の水面下 $1/\nu$ の位置を流れる流線が平板表面上に達することを意味している。このとき条件 (7) 式は以下となる。

$$\operatorname{Re}\{f(z)\} = -\nu y \quad \text{on } x=0, -a \leq y \leq 0 \quad (10)$$

さて、条件 (6) と (10) 式を満たす正則な解は関数論の知識から以下の式で与えられることがわかっている⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= \nu a [F_1(z) + C_1 f_0(z)] \\ F_1(z) &= i \frac{z}{a} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}} \right) \\ f_0(z) &= i \frac{a}{z} \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/z^2}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

なお根号の分岐線は $x=0, |y| < a$ としている。ここで $f_0(z)$ は条件 (10) 式について斉次な条件を満たしているから C_1 は任意の実定数としてよいので、前述したように元の境界条件を満たすように後に決定される必要がある。 $F_1(z)$ は原点を含む全平面で正則であり、 $f_0(z)$ は平板下端 ($z = -ai$) で平板を回り込む流れの複素流速の特異性 $1/\sqrt{z+ai}$ を有する以外は原点を含む下半面で正則である。なお、Ursell の問題でも同様にこの斉次な解が存在するが、幸いなことに、平板上の境界条件により直ちに除外され ($C_1 = 0$)、問題が簡略化される。

Fig.2 に $F_1(z)$ の実部を 3 次元プロットしてある。 x 軸上で値は 0、 y 軸の $-a < y < a$ で $-y$ の値を取っていることがわかる。Fig.3 には $f_0(z)$ 関数の実部の 3 次元プロット図を示す。 x 軸上で値は 0、 y 軸上の $-a < y < a$ での値は 0 となっている。

以上の関数に $1/L$ 演算子を作用させるためにベッセル関数

Fig. 1 Co-ordinate system.

Fig. 2 3-D plot of $\operatorname{Re}\{F_1(z)\}$.

Fig. 3 3-D plot of $\text{Re}\{f_0(z)\}$.

を含んだ積分形式で表現しておく。あらたに $f_2(z)$ も導入しておく。

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \mp i \int_0^\infty \frac{1}{k} J_1(ak) e^{\mp kz} dk \\ &= \mp i \frac{a}{2} \int_0^\infty \{J_0(ak) + J_2(ak)\} e^{\mp kz} dk \end{aligned} \quad (12)$$

$$f_0(z) = \pm i a \int_0^\infty J_0(ak) e^{\mp kz} dk \quad (13)$$

$$f_2(z) = \pm i a \int_0^\infty J_2(ak) e^{\mp kz} dk \quad (14)$$

これらはベッセル関数の Laplace 変換である。複号は $x \geq 0$ に対応している。式 (12) は定義より

$$F_1(z) = -\frac{1}{2}[f_0(z) + f_2(z)] \quad (15)$$

ちなみに以下の関係があり、この関数は Ursell の方法にあらわれる。

$$\begin{aligned} f_1(z) &= a \frac{d}{dz} F_1(z) \\ &= i a \int_0^\infty J_1(ak) e^{\mp kz} dk \end{aligned} \quad (16)$$

ここで式 (5) と同様に $F_1(z), f_0(z), f_2(z)$ に対応する複素ポテンシャルを各々 $W_1(z), w_0(z), w_2(z)$ としておく。すなわち

$$\left. \begin{aligned} U F_1(z) &= L[W_1(z)] \\ U f_0(z) &= L[w_0(z)] \\ U f_2(z) &= L[w_2(z)] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$W_1(z) = -\frac{1}{2}[w_0(z) + w_2(z)] \quad (18)$$

このとき正則解 $w_R(z)$ は以下と書ける。

$$\left. \begin{aligned} w_R(z) &= \nu a [W_1(z) + C_1 w_0(z)] \\ &= -\frac{1}{2} \nu a [w_2(z) + C_1' w_0(z)] \\ C_1' &= 1 - 2C_1 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここまでの準備により $w_0(z), w_2(z)$ がわかれば求める解 $w_R(z)$ は直ちに求まる。

先ず $f_0(z)$ から $w_0(z)$ を求めておこう。 $f_0(z)$ を変形する。 $y < 0$ の領域で考えていることに留意して、 x の正負に対応して積分路を正、負の虚軸上に移動する。

$$f_0(z) = \pm i a \int_0^{\mp i\infty} J_0(ak) e^{\mp kz} dk \quad (20)$$

ここで $k = \pm it$ なる変数変換を行うと以下となる。

$$f_0(z) = -a \int_0^\infty I_0(at) e^{-itz} dt \quad (21)$$

これで準備ができたので $1/L$ の演算を行う。

$$\begin{aligned} w_0(z) &= \frac{1}{L} [U f_0(z)] \\ &= -iaU \int_0^\infty \frac{1}{t - \nu - i\mu} I_0(at) e^{-itz} dt \end{aligned} \quad (22)$$

ここで I_0 及び後で出てくる I_2 は変形ベッセル関数である。再び x の正負に応じて積分路を負、正の虚軸上に移動する。このとき $x < 0$ のときには $t = \nu$ における留数項が生ずることに注意して $w_0(z)$ を局所波成分 $w_{0L}(z)$ と自由波成分 $w_{0F}(z)$ の和に分解しておく。

$$w_0(z) = w_{0L}(z) + w_{0F}(z) \quad (23)$$

更に $t = \mp ik$ なる変数変換を施して元に戻すと以下の局所波成分を得る。

$$w_{0L}(z) = -iaU \int_0^\infty \frac{1}{k \mp i\nu} J_0(ak) e^{\mp kz} dk \quad (24)$$

留数項から得られる自由波項は以下となる。

$$w_{0F}(z) = \begin{cases} 0 & \text{for } x > 0 \\ 2\pi a U I_0(\nu a) e^{-i\nu z} & \text{for } x < 0 \end{cases} \quad (25)$$

まったく同様な演算を行うことによって $w_2(z)$ 関数を求めることができる。

$$w_2(z) = w_{2L}(z) + w_{2F}(z) \quad (26)$$

$$w_{2L}(z) = -iaU \int_0^\infty \frac{1}{k \mp i\nu} J_2(ak) e^{\mp kz} dk \quad (27)$$

$$w_{2F}(z) = \begin{cases} 0 & \text{for } x > 0 \\ -2\pi a U I_2(\nu a) e^{-i\nu z} & \text{for } x < 0 \end{cases} \quad (28)$$

式 (24), (27) の積分の被積分関数を以下のように実部、虚部に分解しておく。

$$\begin{aligned} \frac{1}{k \mp i\nu} e^{\mp kz} &= \frac{1}{k^2 + \nu^2} \{ [k \cos ky + \nu \sin ky] \\ &\quad \pm i[\nu \cos ky - k \sin ky] \} e^{\mp kx} \end{aligned} \quad (29)$$

関数 (24), (27) を直接数値積分するには上式の形が便利であろう。本論で示す数値例では上式を用い、適応の数値積分法 (Quanc8)⁵⁾ によって、 $x = 0$ の近傍を除いてほぼ成功している。 $x = 0$ においては上式を更に分解した形で、得られる範囲で、解析形を付録に示してある。

以上により解の形が求まったので、再度平板上の境界条件 (3) ないし (4) に戻らねばならない。今の場合、流れ関数表示、すなわち、式 (9) の値を代入した式 (4) が便利である。すなわち $x = 0$ で式 (19) は以下を満たす必要がある。

$$-\frac{1}{2}\nu a \operatorname{Im}\{w_2(iy) + C'_1 w_0(iy)\} = U(y + 1/\nu) \quad (30)$$

付録によれば $x = 0, -a \leq y \leq 0$ で変形ベッセル関数を用いて

$$\frac{1}{Ua} \operatorname{Im}\{w_0(iy)\} = -K_0(\nu a) e^{\nu y} \quad (31)$$

$$\frac{1}{Ua} \operatorname{Im}\{w_2(iy)\} = -\frac{2}{\nu a} \left(\frac{1}{\nu a} + \frac{y}{a} \right) + K_2(\nu a) e^{\nu y} \quad (32)$$

と表わされるから以下を得る。

$$C'_1 = \frac{K_2(\nu a)}{K_0(\nu a)} \quad (33)$$

従って (23~25) 式及び (26~28) 式を式 (19) に代入し、未知定数を式 (33) で与えれば正則解 $w_R(z)$ の解析的表示が求まったことになる。

正則解の表わす流れでは平板に働く造波抵抗値も以下のように解析的に求まる。自由波形は

$$\left. \begin{aligned} \eta_F(x) &= \frac{1}{U} \operatorname{Im}\{w_F(x)\} \\ &= A_R \sin \nu x \\ A_R/a &= -\pi \nu a \left[\frac{K_2(\nu a)}{K_1(\nu a)} I_0(\nu a) - I_2(\nu a) \right] \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

で表わせるから造波抵抗 R_W は

$$\begin{aligned} C_W &= \frac{R_W}{\rho g a^2} \\ &= \frac{1}{4} (A_R/a)^2 \end{aligned} \quad (35)$$

流線と等ポテンシャル線の数値例を Fig.4, Fig.5 に示す。横軸、縦軸は各々 $x/a, y/a$ を示し、平板は $x = 0, y/a > -1$ に太線にて示してある。流線と等ポテンシャル線の間隔 ($\Delta\Psi, \Delta\Phi$) はともに $\Delta\Psi/Ua = 0.2$ である (次節以降の Fig.7-11, 14 も同様)。平板上の境界条件が成立していることがわかる。破線で波高 $/a$ (の $1/10$ の値) が示されている。流れの特徴は平板周りに流れの裏の面 (下向きの流れ) から表ての面 (上向きの流れ) へ向けての強い循環流 (逆流) が存在することである。平板の前方斜め下には流れの分岐点 (停留点となっている) が認められる。無限流中の円断面周りの流れに強い循環を付加したときの流れに近似した流れとなっている。線形解が、平板と水面の交点付近でその成立仮定を逸脱していることが原因と考えられるにしろ、なかなか理解し難い流れとなっている。

2.2 弱特異解の導入

前節では、縮約化関数の境界条件として (10) 式を用いた。本節では式 (7) の Ψ_H として任意の値をとることができるような縮約化関数を求める。

この縮約化関数は式 (6) 及び以下の正規化された条件を満たすものとする。

$$\operatorname{Re}\{f_h(z)\} = 1 \quad \text{on} \quad x = 0, -a < y < 0 \quad (36)$$

Fig. 4 Streamlines and equi-potential lines for regular solution ($\nu a = 1.0, \Psi_H/Ua = 1.0, \Delta\Psi/Ua = 0.2$).

Fig. 5 Streamlines and equi-potential lines for regular solution ($\nu a = 0.5, \Psi_H/Ua = 2.0, \Delta\Psi/Ua = 0.2$).

本論で扱う問題では、前節で扱った正則な解の範囲では解は一意に定まるが、物体と水面との交点に、その流速が対数関数的特異性 (弱特異性) を有することを許せば、その特異性を有する固有解が存在することが示されている⁶⁾。そこで条件 (36) を満足する縮約化関数として以下を採用する。

$$f_h(z) = \frac{2}{\pi} i \log \left[\sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}} - \frac{a}{z} \right] \quad (37)$$

上式は $z = 0$ で以下の特異性がある。

$$f_h(z) \sim \frac{2}{\pi} i \log \frac{z}{a} \quad (38)$$

縮約化関数 $f_h(z)$ の実部の 3 次元プロット図を Fig.6 に示した。 x 軸上で 0 となり、 y 軸上で以下となっていることがわかる。

$$\operatorname{Re}\{f_h(z)\} = \begin{cases} -1 & \text{for } 0 < y < a \\ 1 & \text{for } -a < y < 0 \end{cases} \quad (39)$$

式 (37) は以下の積分で書ける。

$$f_h(z) = -\frac{2}{\pi} i \int_z^\infty \frac{a}{z^2 \sqrt{1 + a^2/z^2}} dz \quad (40)$$

Fig. 6 3-D plot of $\text{Re}\{f_h(z)\}$.

この式の被積分関数は Laplace 変換で表わせるので、その積分を取るにより以下のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} f_h(z) &= -ai \int_z^\infty dz \int_0^\infty k \mathcal{H}(ak) e^{\mp kz} dk \\ &= \mp ai \int_0^\infty \mathcal{H}(ak) e^{\mp kz} dk \end{aligned} \quad (41)$$

上式中の $\mathcal{H}$ 関数は以下の式を略記したものである。

$$\mathcal{H}(ak) = J_1(ak) \mathbf{H}_0(ak) + J_0(ak) \left[\frac{2}{\pi} - \mathbf{H}_1(ak) \right] \quad (42)$$

ここで、 $\mathbf{H}_{0,1}$ 、および、以下で現れる $\mathbf{L}_{0,1}$ は Struve 関数である。

縮約化関数の逆変換を以下と置き、局所波成分と自由波成分の和としておく。

$$\begin{aligned} w_{h0}(z) &= \frac{1}{L} [U f_h(z)] \\ &= w_{h0L}(z) + w_{h0F}(z) \end{aligned} \quad (43)$$

前節と同様の演算を施すと以下を得る。

$$w_{h0L}(z) = iaU \int_0^\infty \frac{1}{k \mp i\nu} \mathcal{H}(ak) e^{\mp kz} dk \quad (44)$$

$$w_{h0F}(z) = \begin{cases} 0 & \text{for } x > 0 \\ -2\pi a U \mathbf{L}(\nu a) e^{-i\nu z} & \text{for } x < 0 \end{cases} \quad (45)$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\nu a) &= \mathcal{H}(-i\nu a) \\ &= -I_1(\nu a) \mathbf{L}_0(\nu a) + I_0(\nu a) \left[\frac{2}{\pi} + \mathbf{L}_1(\nu a) \right] \end{aligned} \quad (46)$$

こうして得られた解は、やはり、平板上の境界条件

$$\text{Im}\{w_h(iy)\} = \text{Const.} \quad (47)$$

を満たしておらず、前節の $W_1(z)$ 関数と同様に、斉次解 $w_0(z)$ を加える必要がある。

$$w_h(z) = w_{h0}(z) + C_2 w_0(z) \quad (48)$$

$w_{h0}(z)$ の虚部は $x = 0, -a \leq y \leq a$ で以下の形を有することがわかっている。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Ua} \text{Im}\{w_{h0}(z)\} &= (T_{h0} + \frac{1}{\nu a}) e^{\nu y} - \frac{1}{\nu a} \\ T_{h0} &= \frac{1}{Ua} \text{Im}\{w_{h0}(0)\} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

また、 $w_0(z)$ の虚部は式 (31) であるので

$$C_2 = \frac{1}{K_0(\nu a)} (T_{h0} + \frac{1}{\nu a}) \quad (50)$$

とすれば以下となり、たしかに平板上の境界条件を満たす。

$$\text{Im}\{w_h(iy)\} = -U/\nu \quad \text{for } -a \leq y \leq 0 \quad (51)$$

なお定数 T_{h0} の解析値はわかっていないので、数値的に求めている。

こうして得られた解 $w_{h0}(z)$ は原点に流速が対数関数的な弱い特異性を有し、この解を定数倍した関数もまた解となっているので、弱特異性固有 (斉次) 解と呼んでおく。

前節の正則解との和を取った関数を以下と置いておく。

$$w(z) = w_R(z) + C w_h(z) \quad (52)$$

すると平板上の流れ関数の値は式 (9), (51) より以下となる。

$$\Psi_H = \frac{U}{\nu} (1 - C) \quad (53)$$

逆に Ψ_H を与えたいときは以下とすればよい。

$$C = 1 - \frac{\nu}{U} \Psi_H \quad (54)$$

自由波形は

$$\eta_F(x) = A \sin \nu x$$

と置いておくと

$$A/a = A_R/a - 2\pi C [\mathbf{L}(\nu a) + C_2 I_0(\nu a)] \quad (55)$$

造波抵抗は

$$\begin{aligned} C_W &= \frac{R_W}{\rho g a^2} \\ &= \frac{1}{4} (A/a)^2 \end{aligned} \quad (56)$$

先ず $C = 1$ としてみる。このとき $\Psi_H = 0$ である。これは平板前方の水面 ($y = 0$) から系外に流出する流量が 0 となることを意味するので流出量なしの流れ (zero-vertical-flux flow) と呼んでおこう。流線の例を Fig.7, Fig.8 に示す。無限前方の水面を通る流線が平板表面上に至っていることがわかる。正則解で見られた平板周りの強い循環流は見られない。原点付近の $y > 0$ に解析接続した流れから、前述した弱い特異性がうかがえる。なお破線で示した波高は原点で 0 となっている。

C の値として

$$C = -\nu a \frac{C_1}{C_2} \quad (57)$$

とすると、式 (52) から $w_0(z)$ の項が (従って、平板下端を回り込む流れの特異性) が消滅し、下端で Kutta の条件を満たす解が得られる。このとき平板上の流れ関数の値は以下となり、境界条件は満たされている。

$$\text{Im}\{w(iy)\} = U \left(\frac{1}{\nu} + y \right) + U a \frac{C_1}{C_2} \quad (58)$$

流線を Fig.9 に示す。この流れの平板下端付近の流線を Fig.10 に示す。下端を回り込む流れは見られない。なお平板下方付近

Fig. 7 Zero-vertical-flux flow ($\nu a = 1.0$, $\Psi_H/Ua = 0.0$, $\Delta\Psi/Ua = 0.2$).

Fig. 8 Zero-vertical-flux flow ($\nu a = 0.5$, $\Psi_H/Ua = 0.0$, $\Delta\Psi/Ua = 0.2$).

Fig. 9 Flow satisfying Kutta condition ($\nu a = 1.0$, $\Psi_H/Ua = 0.664$, $\Delta\Psi/Ua = 0.2$).

に見られる流線および等ポテンシャル線の乱れは $x = 0$ 付近で数値積分の精度が上がらないことに起因している。

後流の自由波高の式 (55) を 0 とする解を作ることできる。

Fig. 10 Flow satisfying Kutta condition near the edge ($\nu a = 1.0$, $\Psi_H/Ua = 0.664$, $\Delta\Psi/Ua = 0.02$).

Fig. 11 Wave-free flow ($\nu a = 1.0$, $\Psi_H/Ua = 0.494$, $\Delta\Psi/Ua = 0.05$).

この波なし流れ (wave-free flow) の流線を Fig.11 に示す。流れはまったく前後対称となっている。

理解の便のため式 (54) の関係を Fig.12 に示した。横軸に C (弱特異解の強さ) をとり、実線にて Ψ_H の値を示している。1 点鎖線は (55) 式の自由波の振幅 (の $1/10$, 符号あり) を示している。横軸を切る点は波なしの状態を示す。2 点鎖線は $w_0(z)$ 関数の強さを示し、横軸を切る点は Kutta の条件を満たす点である。

3. 別所—水野 (1962)²⁾ の解について

別所—水野の解法について、本論の記法で記述しておく。当論文では平板周りの流れを表わす攪乱複素ポテンシャルは以下のように表わされている。

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi a} \int_{-a}^0 m(\eta) W_m(z; i\eta) d\eta \quad (59)$$

ここで $W_m(z, \zeta)$ は線形自由表面条件を満足する x 方向 2 重吹き出しである。

$$W_m(z, \zeta) = -\frac{1}{z - \zeta} + \frac{1}{z - \bar{\zeta}} + 2i\nu S_\nu(z - \bar{\zeta}) \quad (60)$$

Fig. 12 Ψ_H et al. vs. C ($\nu a = 1.0$).

$$S_\nu(z) = e^{-i\nu z} \left[E_1(-i\nu z) + \begin{Bmatrix} 0 \\ 2\pi i \end{Bmatrix} \right] \quad (61)$$

{ } は上段は $x > 0$ での値、下段は $x < 0$ での値を示す。

やはり reduction 法を用いており、(59) 式の両辺に (2) 式の演算子を作用させている。

$$Uf(z) = L[w(z)] \\ = -\frac{1}{2\pi a} \int_{-a}^0 m(\eta) L[W_m(z; i\eta)] d\eta \quad (62)$$

上式の実部を取ると左辺は平板上で (7) 式となる。右辺の核関数 $L[W_m]$ は波動項が無くなって比較的簡単な式となるので、 $m(\eta)$ を解析的に求められるとしている。平板の下端で

$$m(-a) = 0 \quad (63)$$

なる条件を付し、この条件から Ψ_H の値も求まるとしている。解の形はかなり複雑で、複数の積分表示される関数で表現されている。それらの関数は虚変数のベッセル関数等で表現できるとしているが、具体的には示されていない。論文で示されている m 分布の 1 例を Fig.13 中の 2 重丸にて示した。

この別所一水野の解と、本論で得た解析解との関係を確認したいのであるが、彼らの解が 2 重吹き出しの $m(\eta)$ で表現されているので、直接の比較は困難である。そこで通常こうした問題の解を求めるのに用いられる境界要素法を用い、境界積分方程式の形、およびそれに関する数値計算結果を用いて間接的な比較を行うこととした。

線形自由表面条件式 (2) を満たし、半没物体周りの流れを表わす攪乱複素ポテンシャルを、グリーンの積分公式で表現し、物

体が半没平板であることを考慮すると、以下の式が得られる。

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^0 \Delta\Phi(\eta) W_m(z; i\eta) d\eta \\ + \frac{1}{2\pi} \left[\Delta\Phi(\eta) W_\Gamma(z; i\eta) \right]_{-a}^0 \quad (64)$$

ここで $\Delta\Phi$ は平板前後における速度ポテンシャルの値の差を示しており、 W_Γ 関数は波渦核関数である。

$$W_\Gamma(z; \zeta) = -i \log(z - \zeta)/(z - \bar{\zeta}) + 2iS_\nu(z - \bar{\zeta}) \quad (65)$$

式 (59) と比較すると 2 重吹き出し $m(\eta)$ は平板の上下端で 0 となるときのみ、式 (64) と一致して正しい表示となっており、そのとき $m(\eta)$ は $\Delta\Phi$ と一致することがわかる。実際、別所一水野の解ではそうなっているので問題は無い。

式 (64) を平板上に適用し、その虚部を取った境界積分方程式を離散化すると簡単に解くことができる。ただし、付加条件が必要で $\Psi_H, \Delta\Phi(0), \Delta\Phi(-a)$ のいずれか 2 つの値 ($\Delta\Phi$ は定数だけ不定) を与えることにより解を求めることができる。実際に数値計算を行った結果は、いずれの場合においても前章で求めた解析解と一致することを確認している。 $\Delta\Phi(0) = \Delta\Phi(-a) = 0$ として得られた $\Delta\Phi$ の分布の例を Fig.13 の最上部の丸点で示した。別所一水野の解 (2 重丸) とは一致していない。

次に縮約化された式 (62) を平板上に適用し、その実部を離散化した境界積分方程式の数値解を求めることとした。係数行列に関して特異値分解法⁵⁾を適用すると $m(0) = m(-a) = 0$ なる条件を与えても Ψ_H の値は定まらず、固有解が存在することが示された。それらの例を Fig.13 に示す。最下部の実線が解 $m_0(\eta)$ で、1 点鎖線が固有解 $m_e(\eta)$ である。一般に解は $m_0(\eta) + C m_e(\eta)$ で表わされ、 C の値は任意であり、定めることができない。 Ψ_H の値として別所一水野の示した値を与えると Fig.13 の破線となり、2 重丸と一致する。また正則解の Ψ_H を与えると図の最上部の丸点と一致する。しかし別所一水野法で Ψ_H の値を決定する方法が不明であることに変わりはない。この式の係数行列に別所一水野の解 $m(\eta)$ を掛け合わせると、

Fig. 13 Doublet distributions over a plate ($\nu a = 1.0$).

Fig. 14 Flow calculated from Bessho-Mozuno's solution ($\nu a = 1.0$, $\Psi_H/Ua = 0.613$, $\Delta\Psi/Ua = 0.025$).

端点のごく近傍を除くと右辺ベクトルと完全に一致し、確かに式 (62) の解であることは間違いない。

しかしながら、別所-水野の解 $m(\eta)$ を式 (64) に代入すると平板上で式は成立しない。また、式 (64) に代入して流線を描くと、流線は平板を貫通して流れているように見える (Fig.14)。

以上の検討結果より、別所-水野の解は縮約化した式は満たすが、正しい平板上の境界条件を満たしているとは云い難いと結論付けられる。その原因は、前章で見たように、縮約化によって、平板上の境界条件が必要条件になってしまい、十分条件となっていないということに起因すると考えられる。

4. 結論

2次元一様流中の半没平板周りの流れを表わす複素ポテンシャルの表示について検討した結果、以下の結論を得た。

1. 正則解については攪乱複素ポテンシャルとして

$$w_R(z) = -\frac{1}{2}\nu a[w_2(z) + C'_1 w_0(z)]$$

の形の解析的表示を得た。

2. 平板上端に弱い特異性を有する固有解 $w_h(z)$ が存在することを示し、その解析的表示を得た。
3. 正則解に、任意定数倍した固有解を加えることにより、種々の流れを与えることができ、各々の流れの造波抵抗値の解析的表示を得た。
4. 別所-水野 (1962)²⁾ の得た解析解は平板上の境界条件を満たしていない可能性が強い。

参考文献

- 1) F. Ursell: The effect of a fixed vertical barrier on surface waves in deep water, Proc. Phil. Soc., 43, 1947,

pp.374-382.

- 2) 別所正利, 水野俊明: 一様流れの中の半没円筒および垂直平板の造波抵抗について, 防衛大学校和文紀要, 第1巻, 第1号, 1962. 別所正利教授退官記念論文集, 1993, pp.67-75.
- 3) J. V. Wehausen, E. V. Laiton: Surface Waves, Handbuch der Physik, 9, Springer, 1960.
- 4) N. I. Muskhelishvili: Singular Integral Equations, Nordhoff, 1953.
- 5) G. E. フォーサイス, 計算機のための数値計算法, 科学技術出版, 1978.
- 6) F. Ursell: Mathematical notes on the two-dimensional Kelvin-Neumann problem of ship hydrodynamics, 13th ONR symposium, 1980.
- 7) Bateman Manuscript Proj.: Tables of Integral Transform, McGraw-Hill, 1954.

付 録

本文で用いた積分公式を列記しておく。一部は Bateman⁷⁾を参照している。 $a, \nu > 0$ である。

$$\int_0^\infty \frac{\nu}{k^2 + \nu^2} J_0(ak) dk = \frac{\pi}{2} [I_0(\nu a) - L_0(\nu a)] \quad (A1)$$

$$\int_0^\infty \frac{\nu}{k^2 + \nu^2} J_2(ak) dk = \frac{1}{3}\nu a - \frac{\pi}{2} [I_2(\nu a) - L_2(\nu a)] \quad (A2)$$

$$\int_0^\infty \frac{\nu \sin ak}{k^2 + \nu^2} J_0(ak) dk = -K_0(\nu a) \sinh(\nu a) \quad (A3)$$

$$\int_0^\infty \frac{\nu \sin ak}{k^2 + \nu^2} J_2(ak) dk = -\frac{2}{\nu a} + K_2(\nu a) \sinh(\nu a) \quad (A4)$$

$y \leq -a$ で

$$\int_0^\infty \frac{\nu \cos ky}{k^2 + \nu^2} J_0(ak) dk = \frac{\pi}{2} I_0(\nu a) e^{\nu y} \quad (A5)$$

$$\int_0^\infty \frac{\nu \cos ky}{k^2 + \nu^2} J_2(ak) dk = -\frac{\pi}{2} I_2(\nu a) e^{\nu y} \quad (A6)$$

$-a \leq y \leq 0$ で

$$\int_0^\infty \frac{k \cos ky}{k^2 + \nu^2} J_0(ak) dk = K_0(\nu a) \cosh(\nu y) \quad (A7)$$

$$\int_0^\infty \frac{k \cos ky}{k^2 + \nu^2} J_2(ak) dk = \frac{2}{(\nu a)^2} - K_2(\nu a) \cosh(\nu y) \quad (A8)$$

$$\int_0^\infty \frac{\nu \sin ky}{k^2 + \nu^2} J_0(ak) dk = K_0(\nu a) \sinh(\nu y) \quad (A9)$$

$$\int_0^\infty \frac{\nu \sin ky}{k^2 + \nu^2} J_2(ak) dk = \frac{2}{\nu a^2} y - K_2(\nu a) \sinh(\nu y) \quad (A10)$$

$y \leq -a$ で

$$\int_0^\infty \frac{k \sin ky}{k^2 + \nu^2} J_0(ak) dk = -\frac{\pi}{2} I_0(\nu a) e^{\nu y} \quad (A11)$$

$$\int_0^\infty \frac{k \sin ky}{k^2 + \nu^2} J_2(ak) dk = \frac{\pi}{2} I_2(\nu a) e^{\nu y} \quad (A12)$$