波浪中の弾性平板浮体の運動に関する変分原理

—無限遠境界で波の入射条件と放射条件を考慮した変分原理—

正会員 永田修一*

正会員 一色浩*

正会員 今井康貴*

正会員 豊田和隆*

Variational Principles Related to Motions of a Floating Elastic Plate in Waves

by Shuichi Nagata, *Member*
Yasutaka Imai, *Member*

Hiroshi Isshiki, *Member*
Kazutaka Toyota, *Member*

Summary

In this paper, variational principles related to motions of an elastic plate in waves considering wave radiation condition at infinity, which are very important in calculations of the elastic response of the pontoon-type floating structure, are discussed. First, Sommerfeld radiation condition at infinity is extended to treat a case with an incident wave. Second, four kinds of variational principles related to motions of the elastic floating plate considering the incident and radiated waves are proposed and clarified the mutual relationship of these variational principles. Third, numerical results for elastic response of a floating plate of rectangular plan geometry in waves, which are obtained by using proposed variational principles, are shown.

1. 結 言

ポンツーン型浮体は、超大型浮体構造物の代表的な構造形式の一つとされるが、その構造設計を行う際には波浪中での浮体の弾性挙動の評価が必須となる。このため、周波数領域や時間領域で、モード法や直接法に基づいた多くの計算法が提案されている^{1), 2), 3)}。

このようなポンツーン型浮体の波浪中弾性応答に関連して、一色・永田⁴⁾は、水面に浮かぶ弾性平板の周波数領域での運動に関する4種類の変分原理を導き、それらの相互関係を整理している。具体的には、まず、弾性平板の運動に関する Hamilton の原理と流体の運動に関する Kelvin の原理を結合して、未知関数が平板の上下変位、水面変位、流速である Hamilton-Kelvin の原理を導いている。この変分原理に関して、変数変換を行い、未知関数を平板の上下変位と速度ポテンシャルとした変分原理が Hamilton-Dirichlet の原理である。この Hamilton-Dirichlet の原理で、流体部分の解を、固有関数展開法、圧力分布法、境界要素法、有限要素法等の何らかの方法で求めるとすると、それを前提に、流体に関する自然条件が拘束されることになり、平板の上下変位と速度ポテンシャルを未知関数とする“修正された Hamilton-Dirichlet の

原理 1” が得られる。この変分原理は平板の運動を規定するもので、著者ら^{5), 6)}は、矩形平面形状浮体の波浪中弾性応答を求めるために、この変分原理と、流体部に固有関数法、平板の上下変位に free-free beam mode の掛け算の表現を用いる計算法を提案している。一方、Hamilton-Dirichlet の原理で、板と流体の間の連続条件を用いて平板の上下変位を消去すると、平板と流体の運動が速度ポテンシャルのみで表現される“修正された Hamilton-Dirichlet の原理 2”が得られる。著者ら^{7), 8)}は、任意平面形状浮体の波浪中弾性応答を求めるために、この変分原理と、流体部に固有関数法を用いる計算法を提案している。これらの変分原理では、流体に関する自由表面条件、水底条件、物体表面条件及び平板を囲み、平板から離れた位置での鉛直境界面での境界条件を考慮している。平板から離れた位置での鉛直境界面では、波の放射条件を考慮すべきであるが、上記の変分原理の誘導においては、波の放射条件以外の境界条件の考慮法に主眼を置いたために、平板を囲み、平板から有限の距離だけ離れた流体の鉛直境界面での法線方向流速が既知量として与えられると仮定して定式化を行った。このため、波浪中での浮体の弾性応答を求めるために、著者らが提案した2つの計算法においては、上記の変分原理から最終的に用いる変分方程式の誘導に、厳密さに欠ける部分が存在した。

そこで、本論文では、まず、流体と平板に関する線形理論の範囲内で、波浪中の弾性平板の運動を求めるために、前報と同様な手法に基づき、平板から無限遠の位置で、波の入射条件と放射条件を厳密に考慮した幾つかの変分原理を導く。次に、これらの変分原理から、著者らが提案した上記2つの

* 佐賀大学 海洋エネルギー研究センター

波浪中弾性応答解析法において、最終的に用いた変分方程式が厳密に誘導されることを示す。さらに、2つの計算法で、これら変分原理がどのように適用されるかの概略を示し、具体的な計算結果を例示する。

有限要素法を用いて、水波と浮体の干渉問題を解く場合には、問題をラディエーション問題とディフラクション問題に分解し、それぞれの問題に対応する変分原理が用いられる場合が多いが、この場合には、平板から離れた流体の鉛直境界面で、ラディエーションポテンシャル、または、ディフラクションポテンシャルに、波の放射条件が適用される。水波と浮体の干渉問題を、ラディエーション問題とディフラクション問題に分けず一体として解く場合には、浮体から離れた流体の鉛直境界面で、波の放射条件と入射波条件を同時に考慮する必要がある。

水波と浮体の干渉問題を一体として解くために、浮体から離れた流体の鉛直境界面での波の放射条件と入射波条件の両者を考慮した変分原理を示した例は少ない。一色^{9),10)}は、2次元剛体浮体の波浪中運動を求めるために、浮体から有限距離離れた位置での入射波、反射波、透過波及び局所散乱波を考慮した幾つかの変分原理を導いている。また、瀬戸¹¹⁾は、3次元剛体浮体の流体力解析に、浮体から有限距離離れた位置での入射波、発散波及び局所散乱波を考慮した境界条件を提案するとともに、この流体問題を変分問題に変換し、固有関数展開法を用いることにより、最終的な平面2次元問題に有限要素法を適用する方法を示している。一色¹²⁾も、3次元問題に対して、瀬戸と同様に、浮体から有限距離離れた位置での境界条件を示しているが、この式から得られる浮体から無限遠位置での条件は、Sommerfeld の放射条件に入射波影響を加えた表現になっており、理解しやすい表示となっている。通常、浮体の弾性応答計算において、流体解析に用いられる固有関数展開法や境界要素法等では、浮体から無限遠位置で、流体に関する境界条件が与えられることに鑑みて、本論文で提案する変分原理では、浮体から無限遠位置での入射波と発散波に関する境界条件を与えるものとして、この式に、一色と同様な式を用いる。

2. 基礎方程式

Fig.1 に示すように、水面に浮かんだ弾性平板浮体を考える。平板の平面形状は任意とする。水深 h は、解析の対象とする流体域で任意とするが、平板から水平方向に無限遠の位置では一定と仮定する。浮体の喫水は零と仮定し、喫水の影響は単位面積当たりの重量で考慮する。座標系を、静水面上に原点 O 、 x 軸と y 軸を水平方向、 z 軸を鉛直上向きにとる。 x 軸に関して角度 α をなす方向より入射する角周波数 ω 、振幅 ζ_0 の規則的な平面波により、浮体は微小振幅の周期的な運動をするものとする。そこで、以下では任意関数 $F(x, y, z; t)$ を

$$F(x, y, z; t) = \text{Re}\{f(x, y, z)e^{-i\omega t}\} \quad (1)$$

と表し、以下では、時間関数 $e^{-i\omega t}$ は省略し、複素振幅 $f(x, y, z)$ に関する式について示す。ここで、 i は虚数単位を、 t は時間を、 Re は実数部を表す。

Fig.1 Floating plate on water surface

Fig.2 Floating plate

Fig.1 において、 R は板を表す。 R の境界 $\Gamma (= \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_N)$ は全体的境界よりなるものとし、境界には外力が働いていないものとする。 j 番目の板の角点を P_j で表す。Fig.2 に示すように、平板の角点 P_N を始点として、辺 Γ に沿って測った長さを s として、平板の角点 P_j を挟む P_{j-0} と P_{j+0} の位置までの s を、それぞれ、 s_{j-0}, s_{j+0} と表す。 Γ の外向き法線を n とする。板の単位面積当たりの質量を m 、曲げ剛性を D 、ポアソン比を ν とする。さらに、板の上下変位を w 、曲げモーメントを M 、せん断力を Q で表す。

流体の存在する領域を Ω で表わし、 Ω の境界 S は物体表面 S_H 、自由表面 S_F 、水底 S_B 、無限遠境界 S_∞ からなるものとする。即ち、 $S = S_H + S_F + S_B + S_\infty$ である。 Ω の内部から見て、境界 S に対して、外向きの単位法線ベクトルを $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 、速度ポテンシャルを ϕ 、自由表面の水面変位を ζ 、水の密度を ρ とする。

この場合の板と流体の運動を規定する基礎式は以下のようになる。

〈板の力学的条件 [M_{plate}]〉

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + m\omega^2 w + i\omega\rho\phi - \rho g w = 0 \quad \text{in } R \quad (2)$$

$$M_n = 0 \quad \text{on } \Gamma_j, \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

$$Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0 \quad \text{on } \Gamma_j, \quad (j=1,2,\dots,N) \quad (4)$$

$$M_{ns} = 0 \quad \text{at } s_{j\pm 0}, \quad (j=1,2,\dots,N) \quad (5)$$

〈流体の力学的条件 [M_{water}]〉

$$u_f = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_f = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w_f = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{in } \Omega \quad (6)$$

$$\frac{g}{i\omega} \zeta = \phi \quad \text{on } S_F \quad (7)$$

〈板の運動学的条件 [K_{plate}]〉

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{in } R \quad (8)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \text{in } R \quad (9)$$

$$M_{xy} = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{in } R \quad (10)$$

〈流体の運動学的条件 [K_{water}]〉

$$\frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{\partial v_f}{\partial y} + \frac{\partial w_f}{\partial z} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (11)$$

$$w_f = -i\omega w \quad \text{on } R \quad (12)$$

$$w_f = -i\omega \zeta \quad \text{on } S_F \quad (13)$$

$$u_f n_x + v_f n_y + w_f n_z = 0 \quad \text{on } S_B \quad (14)$$

式(2)と式(12)は板と流体との相互影響を与える式である。即ち、式(2)は、板は流体から圧力 $i\omega\rho\phi - \rho g w$ を受けること、また、式(12)は、板と流体の鉛直方向速度が等しいことを示している。また、 Q_x 、 Q_y は、次式で定義される。

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad \text{in } R \quad (15)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad \text{in } R \quad (16)$$

基礎式としては、式(2)～式(16)の他に、流体の運動学的条件 [K_{water}] として、無限遠境界 S_∞ での法線方向流速に関する条件が必要となるが、これについては以下で述べる。

3. S_∞ 位置での波の入射および放射条件

浮体から無限大の距離離れた境界 S_∞ では、入射波と浮体からの発散波が存在する。ここでは、一色の方法¹²⁾に従い、境界 S_∞ における2次元水波問題の境界条件を整理する。

2次元水波の水面変位 ζ は、浮体から十分離れた位置では局所散乱波が消えるため、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_0(\alpha) \exp\{-ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)\} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(\alpha) H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} \\ &= \zeta_0(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in(\theta-\alpha-\pi)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(\alpha) H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 (r, θ, z) は、Fig.1 の原点 O を原点とした円筒座標系を示す。 $J_n, H_n^{(1)}$ は、それぞれ n 次のベッセルと第1種のハンケル関数ある。時間関数として $e^{i\omega t}$ を用いた一色¹²⁾では、浮体からの発散波の表現に $H_n^{(2)}$ を用いているが、式(1)に示すように、本論文では時間関数として $e^{-i\omega t}$ を用いているので、浮体からの発散波の表現に $H_n^{(1)}$ を用いている。 $\zeta_0(\alpha)$ は、入射波の振幅である。 k は波数である。式(17)の第1項は入射波、第2項は発散波を表わす。式(17)に対応する速度ポテンシャル ϕ は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{-ig}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} \left[\zeta_0(\alpha) i^n J_n(kr) e^{-in(\alpha+\pi)} + A_n(\alpha) H_n^{(1)}(kr) \right] \\ &\quad \times \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \end{aligned} \quad (18)$$

ベッセル関数とハンケル関数の漸近展開を用いると、 $r = (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty$ の位置における速度ポテンシャル ϕ と流速 $u_r (= \partial \phi / \partial n)$ の漸近展開は次のように得られる。

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{-ig}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} \left[\zeta_0(\alpha) i^n e^{-in(\alpha+\pi)} \cos \left\{ kr - \frac{(2n+1)\pi}{4} \right\} \right. \\ &\quad \left. + A_n(\alpha) e^{i \left\{ kr - \frac{(2n+1)\pi}{4} \right\}} \right] \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{gk}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} \left[\zeta_0(\alpha) i^{n+1} e^{-in(\alpha+\pi)} \sin \left\{ kr - \frac{(2n+1)\pi}{4} \right\} \right. \\ &\quad \left. + A_n(\alpha) e^{i \left\{ kr - \frac{(2n+1)\pi}{4} \right\}} \right] \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \end{aligned} \quad (20)$$

式(19)、式(20)から、2次元水波における入射波を考慮した放射条件は次のようになる。

$$u_r = \partial \phi / \partial n = u_f n_x + v_f n_y + w_f n_z = ik\phi - F(r, \theta, z) \quad (21)$$

ここで、

$$F(r, \theta, z) = \frac{gk}{\omega} \zeta_0(\alpha) \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in(\alpha+\pi-\theta)} e^{-i \left\{ kr - \frac{(2n+1)\pi}{4} \right\}} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (22)$$

式(21)は、流体の無限遠境界 S_∞ における運動学的条件である。

4. 波浪中の平板浮体の運動に関する変分原理

4.1 Hamilton-Kelvin の原理

平板と流体の運動学条件 [K] = [K_{plate}] + [K_{water}] の下で、変分 $\delta w, \delta u_f, \delta v_f, \delta w_f, \delta \zeta$ を考えると次式が得られる。

$$\begin{aligned} 0 &= -i \iint_R \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + m\omega^2 w + i\omega\rho\phi - \rho g w \right) \delta w dx dy \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \left[-M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) \delta w \right] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N [M_{ns} \delta w]_{s_{j+0}} - \sum_{j=1}^N [M_{ns} \delta w]_{s_{j-0}} \\
& + \rho \iiint_{\Omega} \left[\left(u_f - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta u_f + \left(v_f - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \delta v_f + \left(w_f - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \delta w_f \right] dx dy dz \\
& + \rho \iint_{S_f} \left(\frac{g}{i\omega} \zeta - \phi \right) \delta w_f dx dy \\
& = -\omega^2 \iint_R m w \delta w dx dy + \iint_R (-i\omega \rho \phi + \rho g w) \delta w dx dy \\
& - \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \delta w \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta w \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \delta w \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} \delta w \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right] dx dy \\
& + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \left[-M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) \delta w \right] ds \\
& + \sum_{j=1}^N [M_{ns} \delta w]_{s_{j+0}} - \sum_{j=1}^N [M_{ns} \delta w]_{s_{j-0}} \\
& + \rho \iiint_{\Omega} (u_f \delta u_f + v_f \delta v_f + w_f \delta w_f) dx dy dz \\
& - \rho \iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi \delta u_f}{\partial x} + \frac{\partial \phi \delta v_f}{\partial y} + \frac{\partial \phi \delta w_f}{\partial z} \right) - \phi \left(\frac{\partial \delta u_f}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_f}{\partial y} + \frac{\partial \delta w_f}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \\
& + \rho \iint_{S_f} \left(\frac{g}{-i\omega} \zeta + \phi \right) \delta w_f dx dy \quad (23)
\end{aligned}$$

式(23)の右辺の第 3 項の前半部は以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
& \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \delta w \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta w \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \delta w \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} \delta w \right) \right] dx dy \\
& = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) n_y \right] \delta w ds \\
& = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (Q_x n_x + Q_y n_y) \delta w ds \\
& = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} Q_n \delta w ds \quad (24)
\end{aligned}$$

また、式(23)の右辺の第 3 項の後半部は以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
& \iint_R \left[\frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] dx dy \\
& = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(M_x \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(M_{xy} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(M_{xy} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(M_y \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) - \left\{ M_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + M_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right\} \right] dx dy \\
& = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \left[(M_x n_x + M_{xy} n_y) \frac{\partial \delta w}{\partial x} + (M_{xy} n_x + M_y n_y) \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] ds \\
& \quad + D \iint_R \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right] dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) dx dy \\
& = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \left[M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right] ds + \delta \left[\frac{D}{2} \iint_R \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \right] \quad (25)
\end{aligned}$$

式(25)の変形には以下を用いている。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \delta w}{\partial x} &= n_x \frac{\partial \delta w}{\partial n} - n_y \frac{\partial \delta w}{\partial s} \\ \frac{\partial \delta w}{\partial y} &= n_y \frac{\partial \delta w}{\partial n} + n_x \frac{\partial \delta w}{\partial s} \\ M_n &= M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y \\ M_{ns} &= n_x n_y (M_y - M_x) + (n_x^2 - n_y^2) M_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式(25)の右辺第 1 項の後半部は以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} M_{ns} \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds \\
& = \sum_{j=1}^N \left\{ [M_{ns} \delta w]_{s_{j+0}}^{s_{j-0}} - \int_{\Gamma_j} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \delta w ds \right\} \\
& = [M_{ns} \delta w]_{s_{N+0}}^{s_{1-0}} + [M_{ns} \delta w]_{s_{1+0}}^{s_{2-0}} + \cdots + [M_{ns} \delta w]_{s_{N-1+0}}^{s_{N-0}} + [M_{ns} \delta w]_{s_{N+0}}^{s_{1+0}} \\
& \quad + \cdots + [M_{ns} \delta w]_{s_{N-1+0}}^{s_{N-0}} - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \delta w ds \\
& = - \sum_{j=1}^N [M_{ns}]_{s_{j-0}}^{s_{j+0}} \delta w - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \delta w ds \quad (27)
\end{aligned}$$

式(23)の右辺の第 8 項の前半部は以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
& -\rho \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial(\phi \delta u_f)}{\partial x} + \frac{\partial(\phi \delta v_f)}{\partial y} + \frac{\partial(\phi \delta w_f)}{\partial z} \right] dx dy dz \\
& = -\rho \iint_S \phi (\delta u_f n_x + \delta v_f n_y + \delta w_f n_z) ds \\
& = -\rho \iint_{S_f} \phi \delta w_f n_z ds - \rho \iint_R \phi \delta w_f n_z ds - \rho \iint_{S_\infty} \phi \delta u_r ds \quad (28)
\end{aligned}$$

式(11)~式(14)と式(21)から、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \delta u_f}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_f}{\partial y} + \frac{\partial \delta w_f}{\partial z} &= 0 & \text{in } \Omega \\ \delta w_f &= -i\omega \delta w & \text{on } R \\ \delta w_f &= -i\omega \delta \zeta & \text{on } S_f \\ \delta u_f n_x + \delta v_f n_y + \delta w_f n_z &= 0 & \text{on } S_B \\ \delta u_r &= ik \delta \phi & \text{on } S_\infty \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

式(24)~式(29)を式(23)に代入して次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 0 = & -\omega^2 \iint_R m w \delta w dx dy + \iint_R \rho g w \delta w dx dy + \delta \left[\frac{D}{2} \iint_R \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \right] \\
 & + \delta \left[\frac{\rho}{2} \iiint_\Omega (u_f^2 + v_f^2 + w_f^2) dx dy dz + \rho g \iint_{S_f} \zeta \delta \zeta dx dy \right. \\
 & \left. - \rho \iint_{S_\infty} i k \phi \delta \phi ds \right] \quad (30)
 \end{aligned}$$

従って、式(2)~式(14)と式(21)で与えられる境界値問題は以下の変分問題と等価となる。

$$\begin{aligned}
 \Pi_{HK}[w, \vec{u}_f, \zeta, \phi] = & -\frac{\omega^2}{2} \iint_R m w^2 dx dy + \frac{\rho g}{2} \iint_R w^2 dx dy \\
 & + \frac{D}{2} \iint_R \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \\
 & + \frac{\rho}{2} \iiint_\Omega (u_f^2 + v_f^2 + w_f^2) dx dy dz + \frac{\rho g}{2} \iint_{S_f} \zeta^2 dx dy - \frac{\rho i k}{2} \iint_{S_\infty} \phi^2 ds \\
 = & \text{stationary} \quad \text{under} \quad [K] = [K_{plate}] + [K_{water}] \quad (31)
 \end{aligned}$$

この変分問題の自然条件は、力学的条件 $[M] = [M_{plate}] + [M_{water}]$ である。ここでは、この変分原理を **Hamilton-Kelvin** の原理と呼ぶ。

4.2 Hamilton-Dirichlet の原理

次に、Hamilton-Kelvin の原理の中の流体に関する変数を変換して、流体に関しては力学的条件を拘束条件とし、運動学的条件を自然条件とする変分問題に変換する。即ち、Kelvin の原理から Dirichlet の原理に変換する。そこで、式(31)の変分問題において、Lagrange の未定定数 λ を導入して、流体に関する運動学的条件 $[K_{water}]$ を緩和する。

$$\begin{aligned}
 \Pi_{HKD}^*[w, \vec{u}_f, \zeta, \phi, \lambda] \\
 = & \Pi_{HK}[w, \vec{u}_f, \zeta, \phi] + \rho \iiint_\Omega \lambda \left(\frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{\partial v_f}{\partial y} + \frac{\partial w_f}{\partial z} \right) dx dy dz \\
 & - \rho \iint_R \lambda (w_f + i\omega w) dx dy - \rho \iint_{S_f} \lambda (w_f + i\omega \zeta) dx dy \\
 & - \rho \iint_{S_\infty} \lambda (u_f n_x + v_f n_y + w_f n_z) dS - \rho \iint_{S_\infty} \lambda [u_r - ik\phi + F(r, \theta, z)] ds \\
 = & \text{stationary} \quad \text{under} [K_{plate}] \quad (32)
 \end{aligned}$$

この変分原理の停留条件より次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 0 = & \delta \Pi_{HKD}^* \\
 = & -\iint_R \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + m\omega^2 w + i\omega \rho \lambda - \rho g w \right) \delta w dx dy \\
 & + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \left[-M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) \delta w \right] ds + \sum_{j=1}^N [M_{ns}]_{S_{j-0}}^{S_{j+0}} \delta w
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\rho \iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} - u_f \right) \delta u_f + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} - v_f \right) \delta v_f + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} - w_f \right) \delta w_f \right] dx dy dz \\
 & - \rho i \omega \iint_{S_f} \left(\lambda + \frac{ig}{\omega} \zeta \right) \delta \zeta dx dy + \rho i k \iint_{S_\infty} (\lambda - \phi) \delta \phi ds \\
 & + \rho \iiint_\Omega \delta \lambda \left(\frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{\partial v_f}{\partial y} + \frac{\partial w_f}{\partial z} \right) dx dy dz - \rho \iint_R \delta \lambda (w_f + i\omega w) dx dy \\
 & - \rho \iint_{S_f} \delta \lambda (w_f + i\omega \zeta) dx dy - \rho \iint_{S_\infty} \delta \lambda (u_f n_x + v_f n_y + w_f n_z) ds \\
 & - \rho \iint_{S_\infty} \delta \lambda [u_r - ik\phi + F(r, \theta, z)] ds \quad (33)
 \end{aligned}$$

従って、式(32)で示された変分問題の自然条件として、式(2)~(5)で示された板に関する力学的条件と、式(11)~式(14)と式(21)によって示された流体に関する運動学的条件が得られる。また、同時に、次のような流体に関する力学的条件 $[M_{water}]$ も得られる。

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = u_f, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = v_f, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = w_f \quad \text{in } \Omega \quad (34)$$

$$\lambda = -\frac{ig}{\omega} \zeta \quad \text{on } S_F \quad (35)$$

$$\lambda = \phi \quad \text{on } S_\infty \quad (36)$$

式(32)に、式(36)から得られる $\lambda = \phi$ を代入すると次の変分問題が得られる。

$$\begin{aligned}
 \Pi_{HKD}[w, \vec{u}_f, \zeta, \phi] = & \Pi_{HKD}^*[w, \vec{u}_f, \zeta, \phi, \lambda]_{\lambda=\phi} \\
 = & -\frac{\omega^2}{2} \iint_R m w^2 dx dy + \frac{\rho g}{2} \iint_R w^2 dx dy - i\omega \rho \iint_R \phi w dx dy \\
 & + \frac{D}{2} \iint_R \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \\
 & - \rho \iiint_\Omega \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} u_f + \frac{\partial \phi}{\partial y} v_f + \frac{\partial \phi}{\partial z} w_f - \frac{1}{2} (u_f^2 + v_f^2 + w_f^2) \right] dx dy dz \\
 & + \frac{\rho g}{2} \iint_{S_f} \zeta^2 dx dy - i\omega \rho \iint_{S_f} \phi \zeta dx dy + \frac{\rho i k}{2} \iint_{S_\infty} \phi^2 ds \\
 & - \rho \iint_{S_\infty} \phi F(r, \theta, z) ds \\
 = & \text{stationary} \quad (37)
 \end{aligned}$$

今、式(37)の変分問題において、式(6)、式(7)で示された流体に関する力学的条件が拘束されるならば、以下の変分問題が得られる。

$$\begin{aligned}
 \Pi_{HD}[w, \phi] = & \Pi_{HKD}[w, \vec{u}_f, \zeta, \phi]_{\text{under } [M_{water}]} \\
 = & -\frac{\omega^2}{2} \iint_R m w^2 dx dy + \frac{\rho g}{2} \iint_R w^2 dx dy - i\omega \rho \iint_R \phi w dx dy \\
 & + \frac{D}{2} \iint_R \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\rho}{2} \iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz + \frac{\rho \omega^2}{2g} \iint_{S_f} \phi^2 dx dy \\
& + \frac{\rho i k}{2} \iint_{S_\infty} \phi^2 ds - \rho \iint_{S_\infty} \phi F(r, \theta, z) ds \\
& = \text{stationary} \quad \text{under} \quad [K_{plate}] + [M_{water}] \quad (38)
\end{aligned}$$

この変分問題を Hamilton-Dirichlet の原理と呼ぶことにする。
 $\delta \Pi_{HD} = 0$ により、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
0 = \delta \Pi_{HD} \\
& = -\iint_R \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + m \omega^2 w + i \omega \rho \phi - \rho g w \right) \delta w dx dy \\
& + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \left[-M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) \delta w \right] ds + \sum_{j=1}^N [M_{ns}]_{S_{j-0}}^{S_{j+0}} \delta w \\
& + \rho \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \delta \phi dx dy dz - \rho \iint_{S_f} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi \right) \delta \phi dx dy \\
& - \rho \iint_R \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} + i \omega w \right) \delta \phi dx dy - \rho \iint_{S_b} \frac{\partial \phi}{\partial n} \delta \phi ds \\
& - \rho \iint_{S_\infty} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} - \{ ik \phi - F(r, \theta, z) \} \right] ds \quad (39)
\end{aligned}$$

式(39)から、自然条件として、式(40)~式(44)で示される流体に関する運動学的条件と式(2)~式(5)で示される板の力学的条件を得る。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (40)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -i \omega w \quad \text{on } R \quad (41)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \phi \quad \text{on } S_f \quad (42)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_b \quad (43)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = ik \phi - F(r, \theta, z) \quad \text{on } S_\infty \quad (44)$$

式(40)~式(44)で表わされる条件を $[K_{water}^{*1}]$ と書くことにする。

4.3 修正された Hamilton-Dirichlet の原理 1

式(38)で表わされる Hamilton-Dirichlet の原理において、流体に関する自然条件 $[K_{water}^{*1}]$ 、即ち、式(40)~式(44)を拘束すると次のような変分原理を得る。

$$\begin{aligned}
\Pi_{HD}^{*1}[w, \phi] & = \Pi_{HD}[w, \phi]_{\text{under}[K_{water}^{*1}]} \\
& = -\frac{\omega^2}{2} \iint_R m w^2 dx dy + \frac{\rho g}{2} \iint_R w^2 dx dy - \frac{i \omega \rho}{2} \iint_R \phi w dx dy \\
& + \frac{D}{2} \iint_R \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\rho}{2} \iint_{S_\infty} F(r, \theta, z) \phi ds \\
& = \text{stationary} \quad \text{under} \quad [K_{plate}] + [K_{water}^{*1}] \quad (45)
\end{aligned}$$

$\delta \Pi_{HD}^{*1} = 0$ から、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
0 = \delta \Pi_{HD}^{*1} \\
& = \delta \left[-\frac{\omega^2}{2} \iint_R m w^2 dx dy + \frac{\rho g}{2} \iint_R w^2 dx dy + \frac{D}{2} \iint_R \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \right] \\
& - \frac{i \omega \rho}{2} \iint_R (\delta \phi w + \phi \delta w) dx dy - \frac{\rho}{2} \iint_{S_\infty} F(r, \theta, z) \delta \phi ds \quad (46)
\end{aligned}$$

一方、次の方程式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} \right) dx dy \\
& = -\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \delta \phi dx dy + \iint_R \frac{\partial \phi}{\partial z} \delta \phi dx dy \\
& + \iint_{S_f} \frac{\partial \phi}{\partial z} \delta \phi dx dy + \iint_{S_b} \frac{\partial \phi}{\partial n} \delta \phi dx dy + \iint_{S_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial n} \delta \phi ds \\
& = -i \omega \iint_R w \delta \phi dx dy + \frac{\omega^2}{g} \iint_{S_f} \phi \delta \phi dx dy + \iint_{S_\infty} [ik \phi - F(r, \theta, z)] \delta \phi ds \quad (47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dx dy dz \\
& = -i \omega \iint_R \delta w \phi dx dy + \frac{\omega^2}{g} \iint_{S_f} \phi \delta \phi dx dy + ik \iint_{S_\infty} \phi \delta \phi ds \quad (48)
\end{aligned}$$

式(47)から式(48)を引き算することにより、次式が得られる。

$$i \omega \iint_R w \delta \phi dx dy = i \omega \iint_R \delta w \phi dx dy - \iint_{S_\infty} F(r, \theta, z) \delta \phi ds \quad (49)$$

式(49)を式(46)に代入することにより、次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
0 = \delta \Pi_{HD}^{*1} \\
& = \delta \left[-\frac{\omega^2}{2} \iint_R m w^2 dx dy + \frac{\rho g}{2} \iint_R w^2 dx dy \right. \\
& \quad \left. + \frac{D}{2} \iint_R \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \right] - i \omega \rho \iint_R \phi \delta w dx dy \\
& = \iint_R \left[\delta w \{ -m \omega^2 w - \rho i \omega \phi + \rho g w \} + D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$+ \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \Big] dx dy \quad (50)$$

上式を式(8)～式(10)と式(26)を用いて書き換えると次式が得られる。

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \Pi_{HD}^* \\ &= - \iint_R \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + m\omega^2 w + i\omega \rho \phi - \rho g w \right) \delta w dx dy \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \left[-M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) \delta w \right] ds + \sum_{j=1}^N [M_{ns}]_{s_{j-0}}^{s_{j+0}} \delta w \end{aligned} \quad (51)$$

式(51)から、自然条件として、式(2)～式(5)で表わされる板の力学的条件が得られることがわかる。

永田他^{5),6)}、大松¹³⁾は、波浪中の弾性平板の運動を計算するために、3次元流体領域に固有関数展開法と境界要素法を適用し、平板の運動に関しては、この変分原理を用いているが、具体的には、式(50)を用いている。

4.4 修正された Hamilton-Dirichlet の原理 2

式(38)で示された Hamilton-Dirichlet の原理において、板と流体の間の連続条件、式(12)を拘束して、板の上下変位 w を消去すると、次のような変分原理が得られる。

$$\begin{aligned} \Pi_{HD}^2[\phi] &= \Pi_{HD}[w, \phi]_{w=\frac{i}{\omega} \frac{\partial \phi}{\partial z}} = \frac{1}{2} \iint_R m \phi_z^2 dx dy - \frac{D}{2\omega^2} \iint_R \left[\left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial x^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\nu \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ &\quad - \frac{\rho g}{2\omega^2} \iint_R \phi_z^2 dx dy - \frac{\rho}{2} \iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \\ &\quad + \rho \iint_R \phi \phi_z dx dy + \frac{\rho \omega^2}{2g} \iint_{S_f} \phi^2 dx dy + \frac{\rho i k}{2} \iint_{S_e} \phi^2 ds \\ &\quad - \rho \iint_{S_e} \phi F(r, \theta, z) ds \\ &= \text{stationary} \quad \text{under } [K_{plate}^*] + [M_{water}] \end{aligned} \quad (52)$$

この場合の $[K_{plate}^*]$ は以下で表わされる。

$$M_x = \frac{D}{i\omega} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial y^2} \right) \quad \text{in } R \quad (53)$$

$$M_y = \frac{D}{i\omega} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial x^2} \right) \quad \text{in } R \quad (54)$$

$$M_{xy} = (1-\nu) \frac{D}{i\omega} \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial x \partial y} \quad \text{in } R \quad (55)$$

$\delta \Pi_{HD}^2 = 0$ から、次式が得られる。

$$0 = \delta \Pi_{HD}^2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\omega^2} \iint_R \left[-i\omega \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + m\omega^2 \phi_z + \rho \omega^2 \phi - \rho g \phi_z \right] \delta \phi_z dx dy \\ &\quad - \frac{i}{\omega} \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \left[M_n \frac{\partial \delta \phi_z}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial \delta \phi_z}{\partial s} - Q_n \delta \phi_z \right] ds \\ &\quad + \rho \iiint_\Omega \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] \delta \phi dx dy dz - \rho \iint_{S_f} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi \right) \delta \phi dx dy \\ &\quad - \rho \iint_{S_e} \frac{\partial \phi}{\partial n} \delta \phi ds - \rho \iint_{S_e} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} - \{ik\phi - F(r, \theta, z)\} \right] \delta \phi ds \end{aligned} \quad (56)$$

別途、以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \left[M_n \frac{\partial \delta \phi_z}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial \delta \phi_z}{\partial s} - Q_n \delta \phi_z \right] ds \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \left[M_n \frac{\partial \delta \phi_z}{\partial n} - \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) \delta \phi_z \right] ds - \sum_{j=1}^N [M_{ns}]_{s_{j-0}}^{s_{j+0}} \delta \phi_z \end{aligned} \quad (57)$$

式(57)を式(56)に代入することにより、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \Pi_{HD}^2 = \frac{1}{\omega^2} \iint_R \left[-i\omega \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + m\omega^2 \phi_z + \rho \omega^2 \phi - \rho g \phi_z \right] \delta \phi_z dx dy \\ &\quad - \frac{i}{\omega} \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \left[M_n \frac{\partial \delta \phi_z}{\partial n} - \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) \delta \phi_z \right] ds + \frac{i}{\omega} \sum_{j=1}^N [M_{ns}]_{s_{j-0}}^{s_{j+0}} \delta \phi_z \\ &\quad + \rho \iiint_\Omega \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \delta \phi dx dy dz - \rho \iint_{S_f} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi \right) \delta \phi dx dy \\ &\quad - \rho \iint_{S_e} \frac{\partial \phi}{\partial n} \delta \phi ds - \rho \iint_{S_e} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} - \{ik\phi - F(r, \theta, z)\} \right] \delta \phi ds \end{aligned} \quad (58)$$

式(58)から、自然条件として、以下が得られる。

$$-i\omega \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) + m\omega^2 \phi_z + \rho \omega^2 \phi - \rho g \phi_z = 0 \quad \text{in } R \quad (59)$$

$$M_n = 0 \quad \text{on } \Gamma_j, \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (60)$$

$$Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0 \quad \text{on } \Gamma_j, \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (61)$$

$$M_{ns} = 0 \quad \text{at } s_{j\pm 0}, \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (62)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (63)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \phi \quad \text{on } S_f \quad (64)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_b \quad (65)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = ik\phi - F(r, \theta, z) \quad \text{on } S_\infty \quad (66)$$

式(60)~式(62)の M_n, M_{ns}, Q_n は次式で表わされる.

$$M_n = \frac{D}{i\omega} \left(\nabla^2 \phi_z - (1-\nu) \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial s^2} \right) \quad (67)$$

$$M_{ns} = \frac{D}{i\omega} (1-\nu) \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial n \partial s} \quad (68)$$

$$Q_n = \frac{D}{i\omega} \frac{\partial}{\partial n} \left[\nabla^2 \phi_z + (1-\nu) \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial s^2} \right] \quad (69)$$

ここで,

$$\nabla^2 = \partial^2 / \partial s^2 + \partial^2 / \partial n^2 \quad (70)$$

式(53)~式(55)を式(59)に代入すると, 次式が得られる.

$$D \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \phi_z - m\omega^2 \phi_z - \rho\omega^2 \phi + \rho g \phi_z = 0 \quad \text{in } R \quad (71)$$

Ohkusu and Nanba¹⁴⁾, Kim and Ertekin¹⁵⁾ は, ポンツーン型浮体の波浪中運動を求めるために, 式(63)~式(66)と式(71)を用いることによって, 速度ポテンシャル ϕ のみを未知量とする解法を示している.

式(52)によって示される変分原理において, 式(63)~式(66)と式(71)が拘束されると, 式(56)から次式が得られる.

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \left[M_n \frac{\partial \delta \phi_z}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial \delta \phi_z}{\partial s} - Q_n \delta \phi_z \right] ds = 0 \quad (72)$$

式(67)~式(69)を式(72)に代入すると, 式(60)~式(62)に等価な次の変分方程式が成り立つ.

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \left[\left\{ \nabla^2 \phi_z - (1-\nu) \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial s^2} \right\} \delta \left(\frac{\partial \phi_z}{\partial n} \right) + (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial s \partial n} \right) \delta \left(\frac{\partial \phi_z}{\partial s} \right) - \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left(\nabla^2 \phi_z \right) + (1-\nu) \frac{\partial^3 \phi_z}{\partial n \partial s^2} \right\} \delta \phi_z \right] ds = 0 \quad (73)$$

Kim and Ertekin¹⁵⁾, 新里・永田他^{7),8)} は, ポンツーン型浮体の波浪中弾性応答を計算するために, 式(60)~式(66)と式(71)によって示された ϕ に関する境界値問題を解く数値解析法を提案している. 彼らは, 3 次元流体の運動の解析に固有関数展開法と水平 2 次元平面に関する境界要素法を用いている. Kim and Ertekin は, 式(60)~式(62)に差分法を用いて離散化し, 矩形の平面形状を持つポンツーン型浮体の波浪中弾性応答解析を行っている. 一方, 新里・永田他は, 式(60)~式(62)の代わりに, 式(73)を用いている. 式(73)は一つの変分方程式であるため, 任意の平面形状を持つ浮体への適用が容易な形になっている. 彼らは, 矩形平面形状ポンツーン型浮体だけでなく, L 型の平面形状を持つポンツーン型浮体の波浪中弾性応答解析を行い, 計算結果と実験結果を比較することにより, その有効性を示している.

5. 提案した変分原理の具体的な計算への適用例

前章で示した波浪中のポンツーン型浮体の弾性応答に関する変分原理は, そのいずれもが具体的な数値計算に適用が可能であるが, 計算の未知量を少なくするという観点からは, “修正された Hamilton-Dirichlet の原理 1” と “修正された Hamilton-Dirichlet の原理 2” の使用が実用的である. 著者らは, これら 2 つの変分原理を用いて, 矩形平面や L 型平面のポンツーン型浮体を対象に, 詳細な波浪中弾性応答解析を行い, 計算値と実験値を比較することにより, 計算法の有効性を示している. 以下では, これら 2 つの計算法を概説し, 計算例を示すことにより, 2 種類の変分原理の適用方法とその有用性を示す.

5.1 修正された Hamilton-Dirichlet の原理 1 を用いた計算法

Fig. 3 Rectangular floating plate

永田他^{5),6)} は, Fig.3 に示すような矩形平面形状を持つポンツーン型浮体の波浪中弾性応答を求めるために, 流体部の解析に固有関数展開法を, 構造部の解析に式(45)で示された “修正された Hamilton-Dirichlet の原理 1” を用いる方法を提案している. 計算法の概略を以下に示す.

- ①長さ L , 幅 B , 喫水 qh の矩形平板を考え, Fig.3 に示すような座標系を考える. 水深は一定で h とする. 平板の上下変位 $w(x, y)$ をフリー・フリー梁の固有関数の未知関数を含む積和として表わす.
- ②流体領域には固有関数展開法を用いるものとして, 流体領域を浮体の下部領域 Region-2 とその外部領域の Region-1 の二つに分割する. Region-1 での速度ポテンシャル ϕ_1 は, 水面条件式(42)と水底条件式(43)を満足する式(40)の解とし, 未知関数を含めた形で表わす. Region-2 の速度ポテンシャル ϕ_2 は, 式(41)で表わされる平板の下面位置での連続条件と水底条件式(43)を満足する式(40)の解として, 未知関数を含めた形で表わす. 未知関数は水平 2 次元平面ヘルムホルツ方程式, ラプラス方程式を満足するので, これに 2 次元境界要素法を適用する.
- ③端部自由の境界条件のもとでの平板の運動は, 式(45)で表わされる “修正された Hamilton-Dirichlet の原理 1” を用いるが, 具体的には, 式(50)を用いる. 式(50)にガレルキン

法を適用すると、9 種類の方程式が得られる。これらの式と、2 つの流体領域の接合部境界における流体圧力と流速の連続を考慮して、さらに、2 つの流体の固有関数展開表示で現れた未知関数に境界要素法を用いると、流体と浮体の上下変位に関する全ての未知関数を連立一次方程式として求めることができる。

同様な解法で、計算の効率性を高めた方法が大松¹³⁾によって提案されている。

提案した計算法の有効性を示すために、矢後他¹⁶⁾による長さ 300m の矩形平面浮体対応の波浪中弾性応答実験結果との比較計算を行った。結果の一例を Fig.4 に示す。計算条件は、浮体長さ (L) = 9.75m, 幅 (B) = 1.95m, 喫水 (qh) = 0.016m, 水深 (h) = 1.9m, $D/\rho gh^4 = 0.079$, $\rho_p/\rho = 1.45$ (ρ_p は平板の密度) である。Fig.4 は、入射波の波長を λ とした時に、 $\lambda/L = 0.3$, $\alpha=60\text{deg}$ の入射波に対して、Portside, Centerline, Starboard 位置での浮体の長手方向の上下変位振幅の絶対値に関する計算値と実験値の比較を示す。計算値と実験値は良く一致している。

Fig. 4 Longitudinal distributions of the amplitude of vertical elastic displacement by Modified Hamilton-Dirichlet's principle-1 ($\lambda/L = 0.3$, $\alpha=60\text{deg}$.)

5.2 修正された Hamilton-Dirichlet の原理 2 を用いた計算法

新里・永田他^{7),8)}は、任意の平面形状を持つポンツーン型浮体の波浪中弾性応答を求めるために、流体部の解析には固有関数展開法を、構造部の解析に“修正された Hamilton-Dirichlet の原理 2”を用いる方法を提案している。計算法の概略を以下に示す。

- ① Fig.1 に示すような任意の平面形状を持つ弾性平板を考える。水深は一定で h とする。浮体の喫水は零として、喫水の影響は単位面積当たりの重量で考慮する。
- ② この方法では、浮体と流体の連成問題を、浮体の存在を流体の境界条件として扱い、流体のみの問題として解く。浮体底面位置の境界条件としては、浮体の上下変位で表わされた浮体の運動方程式(式(2))に、浮体底部の流体に関する連続条件式(式(12))を代入して、速度ポテンシャルのみで表示された浮体の運動方程式(式(71))を用いる。流体

領域には固有関数展開法を用いるものとして、流体領域を浮体の下部領域 Region-2 とその外部領域の Region-1 の二つに分割する。Region-1 での速度ポテンシャル ϕ_1 は、水面条件式(64)と水底条件式(65)を満足する式(63)の解とし、未知関数を含めた形で表わす。Region-2 の速度ポテンシャル ϕ_2 は、式(71)と水底条件式(65)を満足する式(63)の解として、未知関数を含めた形で表わす。未知関数は水平 2 次元平面でのヘルムホルツ方程式を満足するので、これに 2 次元境界要素法を適用する。

- ③ 平板の運動に関しては、運動方程式については既に考慮しているので、式(3)～式(5)で表わされる端部境界条件を別途、考慮する必要があるが、このために、式(73)を用いる。この式は、平板端部の 3 つの境界条件が一つの変分方程式で表わされているので、任意の平面形状を持つ平板への適用が容易である。

- ④ 2 つの流体領域の接合部境界で流体圧力と流速の連続を考慮して、さらに、2 つの流体領域の固有関数展開表示で現れた未知関数に境界要素法を用いる。計算効率化のための工夫を行うと、最終的には、流体の固有関数展開表示で現れた 2 つの未知関数の、浮体端部境界位置での離散化された値が未知量となり、小容量での計算が可能となる。

Fig. 5 Longitudinal distributions of the amplitude of vertical elastic displacement by Modified Hamilton-Dirichlet's principle-2 ($\lambda/L = 0.3$, $\alpha=60\text{deg}$.)

提案した計算法の有効性を示すために、矢後他¹⁶⁾による長さ 300m の矩形平面浮体対応の波浪中弾性応答実験結果との比較計算を行った。結果の一例を Fig.5 に示す。計算条件は、Fig.4 と同じである。計算値と実験値の対応は良い。また、著者らは、この計算法を用いて、一定水深域にある L 型平面形状を持つポンツーン型浮体の波浪中弾性応答解析を行い、浮体の上下変位に関する計算値と実験値が良く一致することも示している⁸⁾。

6. 結言

本論文では、平板に関する Hamilton の原理と水に関する

Kelvin の原理から出発して、波浪中にある弾性平板の運動に関する幾つかの変分原理を誘導した。これらの変分原理では、前報で考慮していなかった波の入射条件と放射条件を、浮体から無限遠の位置で考慮している。ポンツーン型浮体の波浪中弾性応答解析法として、著者らが先に提案した2つの解析法、即ち、“修正された Hamilton-Dirichlet の原理1”を用いる方法と“修正された Hamilton-Dirichlet の原理2”を用いる方法で示していた最終的な変分方程式を、今回、厳密に誘導することができた。得られた変分方程式は、先に示した著者らの2つの解析法で用いたものと同じである。また、これらの変分原理が、実際の平板の波浪中弾性応答解析において、どのように適用されるかについても説明を加え、その有用性を示した。

参 考 文 献

- 1) 社) 日本造船学会海洋工学委員会構造部会 編：超大型浮体構造物の構造設計，成山堂書店，2004.
- 2) Watanabe, E, Utsunomiya, T, and Wang, CM: Hydroelastic Analysis of Pontoon-type VLFS: a Literature Survey, *Engineering Structures*, 26, pp 245-256, 2004.
- 3) Chen, XJ, Wu, YS, Cui, WC, and Jensen, JJ : Review of Hydroelasticity theories for global Response of Marine Structures, *Ocean Engineering*, 33, pp439-457, 2006.
- 4) 一色浩，永田修一：水面に浮かぶ弾性平板の運動に関する変分原理，*関西造船協会誌*，第233号，pp.79-86, 2000.
- 5) 永田修一，吉田尚史，一色浩，大川豊：超大型弾性平板浮体の波浪中挙動解析，*日本造船学会論文集*，第182号，pp.285-294, 1997.
- 6) Nagata, S., Niizato, H., Yoshida, H., Ohkawa, Y. and Kobayashi, K. : Effects of Breakwaters on Motions of an Elastic Floating Plate in Waves, *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, Vol.13, No.1, pp.43-51, 2003.
- 7) 新里英幸，永田修一，豊田和隆，島崎克教：ポンツーン型浮体の波浪中弾性応答解析へのHamilton-Dirichlet原理の適用（第1報：矩形平板浮体への適用），*日本船舶海洋工学会論文集*，第6号，pp.257-265, 2007.
- 8) 新里英幸，永田修一，豊田和隆，島崎克教：ポンツーン型浮体の波浪中弾性応答解析へのHamilton-Dirichlet原理の適用（第2報：任意平面形状浮体への適用），*日本船舶海洋工学会論文集*，第11号，pp.41-50, 2010.
- 9) 一色浩：波の放射条件とその変分法的取り扱い（第1法），*日本造船学会論文集*，第187号，pp1-11, 2000.
- 10) 一色浩：変分法，<http://www.dab.hi-ho.ne.jp/isschiki/>, 2000.
- 11) 瀬戸秀幸：New Hybrid Element Methodによる海洋構造物に働く波力解析，(財)日科技連 第2回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集，pp59-66, 1980.
- 12) 一色浩：波の放射条件とその変分法的取り扱い（第2法），*日本造船学会論文集*，第188号，pp117-125, 2000.
- 13) 大松重雄：超大型ポンツーン型浮体の波浪中弾性応答計算，*日本造船学会論文集*，第182号，pp329-340, 1997.
- 14) Ohkusu, M. & Nanba, Y.: Analysis of Hydroelastic Behavior of a Large Floating Platform of Thin Plate Configuration in Waves, *Proceedings of Int. Workshop on Very Large Floating Structures, VLFS '96*, Hayama, Japan, pp.143-148, 1996.
- 15) Kim, J. W. & Ertekin, R. C.: An Eigen-Function Expansion Method for Predicting Hydroelastic Behavior of a Shallow-Draft VLFS, *Proc. of the Second Int. Conf. on Hydroelasticity in Marine Technology*, Fukuoka/Japan, 1998.
- 16) 矢後清和，遠藤久芳：浅喫水箱型浮体の波浪中弾性応答について—大型模型による水槽試験—，*日本造船学会論文集*，第180号，pp.341-352, 1996.