表面および埋没き裂の応力拡大係数重み関数に関する一提案

正会員 後 藤 浩 二* 学生会員 大田黒 哲 哉**

Improved Point Load Weight Function for Stress Intensity Factor of a Surface and an Embedded Crack

by Koji Gotoh, *Member* Tetsuya Otaguro, *Student Member*

Summary

This paper describes the application of weight function method for the calculation of stress intensity factors in a surface crack and an embedded crack under complex two-dimensional loading conditions. The crack shape is approximated by an ellipse. Improved formulation of the point load weight functions are proposed based on the properties of weight functions and the available weight functions for two-dimensional cracks proposed by Wang and Glinka. For a surface crack and an embedded crack of any aspect ratio, the unknown parameters in the general form can be determined from one reference stress intensity factor solution obtained by the finite element analysis with J integral method. The derived weight functions are then validated against available stress intensity factor solutions for several linear and non-linear stress distributions. The derived weight functions are particularly useful for the fatigue crack growth analysis of a planar surface crack and an embedded crack subjected to fluctuating non-linear stress.

1. 緒 言

溶接構造物で生じる疲労き裂の多くは、溶接止端部などの高応力集中部において多点から発生し、合体・成長を繰り返して単一の大きな表面き裂に成長し、その後さらに成長して板厚貫通き裂に至るプロセスを呈す。一方、溶接継手部にスラグ巻き込みなどの初期欠陥が残存し、これが成長して板厚貫通に至る事例も報告されている。埋没欠陥の場合は、目視にて欠陥の存在を確認できる板厚貫通段階に至る以前に脆性破壊を誘発する可能性も懸念される。疲労寿命全体に占めるこれら表面・埋没き裂の形態を取る期間は相対的に長いので、表面・埋没き裂の成長履歴予測精度の向上は、構造健全性を担保するためには極めて重要である。

疲労き裂の成長履歴や、疲労き裂成長に伴い懸念される脆性破壊発生の限界条件判定などを定量的に行うためには、評価対象の応力拡大係数 (K 値) を精度良く与えることが必要である。しかしながら、一般に溶接継手近傍に存在する欠陥は、構造的応力集中や溶接止端形状に起因する局部的応力集中場に存在し、これらの応力集中効果が重畳する結果、欠陥の存在する応力場は急峻かつ複雑であることが多い。

一方、著者らの調査した範囲では、表面および埋没き裂に関する公知の K 値及びその重み関数の表示式¹⁾²⁾は、一様応力場からき裂深さ方向のみに 1~3 次関数で表現出来る応力場に対して公表されているに留まっているため、複雑な応力場には必ずしも対応できない。従って溶接構造物で実際に問題となる表面および埋没欠陥の構造健全性評価に簡便に使用するには問題が残されている。

き裂深さおよび幅方向に一様でない任意の応力分布が存在する場に存在するき裂に対して K 値を精度良く与える方法としては重み関数法がある。任意応力分布下における表面・埋没き裂に対する K 値重み関数について、大沢ら³⁾は数値データとして高精度なものを与える方法を提案しているが、疲労過程においてき裂形状が随時変化する場合への適用性等の観点に立てば、陽な K 値重み関数表示式を与えておくことは有用であると考えられる。

Wang ら⁴⁾⁵⁾は、表面・埋没き裂に対する K 値重み関数表示式を提案しているが、同手法は板厚方向に一様および 1 次~3 次関数で表せる応力場のみの検証に留まっている。また、埋没き裂に関しては半無限体中存在する場合の表示式となっており、実用上重要な有限板厚内に存在する欠陥に対する影響関数は与えられていない。

本研究では、Wang らの手法をより広範囲の応力場および有限板厚内に埋没き裂が存在する場に適用できるように拡張した結果を報告する。

* 九州大学大学院工学研究院海洋システム工学部門

** 九州大学大学院工学府建設システム工学専攻
修士課程

2. 重み関数法による K 値の計算

埋没及び表面き裂の形状を一般的に行われているように、だ円（表面き裂の場合は半だ円）と近似し、Fig.1 に示すように、だ円中心を原点として長軸方向に x 軸、短軸方向に y 軸を設定する。なお y 軸方向を板厚方向、 x 軸方向を板幅方向とする。このように定義された埋没及び表面き裂の K 値は、式 (1) で与えることが出来る。ただし、表面き裂に対しては、 x 軸に関して対称な半だ円形状と見なして取り扱う。

$$K = \int_{-a}^a \int_{-c}^c \sigma(x_0, y_0) m(x_0, y_0; a, c) dx_0 dy_0 \quad (1)$$

ただし、

$\sigma(x_0, y_0)$: き裂面に作用する応力分布,
 $m(x_0, y_0; a, c)$: K 値重み関数,
 $2a, 2c$: だ円き裂の短軸及び長軸長
 (Fig.1 参照),

である。

Wang ら⁴⁾⁵⁾は、Rice⁶⁾が平面状き裂問題に対して一般化した重み関数法を参照し、式 (1) 中の重み関数 $m(x_0, y_0; a, c)$ を式 (2) の形で与えた。

$$m(x_0, y_0; a, c) = \frac{\sqrt{2\xi}}{\pi^{3/2} \rho^2} \left[1 + M(\theta, \alpha) \{1 - r(\varphi)/R(\varphi)\} \right] \quad (2)$$

ただし、

ξ : き裂面上の集中荷重作用点 (Fig.1 中の点 F_0) からき裂前縁までの最短距離,
 ρ : き裂面上の集中荷重作用点から K 値評価点 (Fig.1 に示す点 P) までの距離,
 α : だ円のアスペクト比 (a/c),
 $\theta, \varphi, r(\varphi), R(\varphi)$: Fig.1 にて定義する角度及び長さ
 $M(\theta, \alpha)$: 係数 (α と θ の関数として与えられる),

である。

Fig.1 Coordinate for definition of the weight function.

なお、本論文で示す K 値の無次元表示に際して使用したパラメータ Q は、 a/c を補母数とする第二種完全だ円積分の値であり、以下に示す近似式を用いて与えた。

$$Q^2 = 1 + 1.464(a/c)^{1.65} \quad (3)$$

Wang らは、だ円き裂の頂点に関する式 (2) の係数 $M(\theta, \alpha)$ を多項式表示で与えているが、き裂深さ方向について、

- 4 次関数以上の応力場に対する適用性は未検証。
- 3 次関数以下の応力場でも、一部のき裂形状に対して著しく精度が劣る。Fig.2 にこの状況の一例として、表面き裂問題を対象として、遠方で一様応力 σ_0 が作用する際の K 値の無次元値（き裂表面部：Fig.1 における点 C に相当）を Wang らの手法により与えた結果を白印で、参照解として白鳥らの影響関数法²⁾による結果を黒印で示すが、Wang らの手法ではき裂深さの増加、き裂形状が半円形に近づくにつれ、 K 値の挙動が不自然であることが確認できる。
- き裂幅方向に分布する応力場に対する適用性は未検証。という問題を有している。

Fig.2 Preliminary investigation of the validity of weight function method proposed by Wang and Glinka. (Point C in Fig.1)

そこで、本研究にて新たに $M(\theta, \alpha)$ を与え直す。その方法は、参照解として、

- 表面・埋没き裂対して実績を有する、白鳥ら²⁾⁷⁾による影響関数法による K 値、Newman と Raju の式¹⁾⁸⁾。
- 適切な参照解が知られていない応力場、き裂形状に対しては、FEM 解（J 積分法の利用）。

を採用し、それぞれの応力場に対して式 (1) と (2) を用いて与えられる K 値が参照解と一致するように $M(\theta, \alpha)$ を数値として逆算し、その結果をアスペクト比等の関数として多項式表示した。多項式の形式はできるだけ単純にすることに配慮して、べき級数表示とし、各項の係数は Microsoft Excel のソルバー機能⁹⁾を適用して同定した。なお、実用面に主眼を置く観点から、本論文でも Wang らと同様に、だ円頂点（長

軸・短軸端) の K 値に限定して重み関数の陽な表現式を導出した。得られた表示式については、付録にまとめて示す。

本研究で使用した FEM は汎用解析コード MSC Marc 2011¹⁰⁾であり、J 積分の計算は同コードに標準的に実装された経路積分法(経路数 8 とし、それぞれの J 積分の平均値として J 積分値を与える)を採用した。また、FE モデルは 6 面体 20 節点要素を用いて構築し、要素数および節点数はモデル毎に異なるものの、全ての解析モデルにおいてき裂前縁に沿った要素の最小寸法は一辺を 0.05mm 程度で等間隔に配置した。

3. 表面き裂に対する K 値重み関数

Fig.3 に模式的に示す表面き裂に対する K 値重み関数を検証する。表面き裂が存在する面内の諸量に関するパラメータは Fig.1 に示している。

Fig.3 Geometry and coordinate system of a semi-elliptical surface crack in a finite thickness plate.

き裂面に作用する応力場 $\sigma(x, y)$ を式 (4), (5) で与える。

$$\sigma(x, y) = \sigma_0 (1 - y/a)^n, \quad (n = 0, 1, \dots, 6) \quad (4)$$

$$\sigma(x, y) = \sigma_0 (1 - x/c)^n, \quad (n = 0, 1, \dots, 6) \quad (5)$$

検証を実施したき裂形状は、アスペクト比 (a/c) が 0.25, 0.5, 0.75 および 1.0 の 4 ケース、無次元化き裂深さ (a/t) が 0.3, 0.5, 0.8 の 3 ケースの合計 12 ケースである。

結果の一例として、 $a/t=0.3$ の場合について、式 (4) の応力場が作用する表面き裂最深部 (Fig. 1 で A 点に相当) 及び表面部 (Fig. 1 で C 点に相当) の K 値の比較結果を Fig. 4 に示す。また、式 (5) の応力場が作用する場合の比較結果を Fig. 5 に示す。同様に $a/t=0.5$ および $a/t=0.8$ の場合の比較を Fig. 6-Fig. 9 に示す。本論文で提案する重み関数を用いて計算される K 値と参照解の誤差は、き裂形状が扁平かつ、き裂深さの増加に伴い大きくなるが、検証範囲での最大誤差は 10% であった。

一方、溶接構造物の疲労強度評価の観点に立てば、全寿命に対する小さい状態のき裂の進展寿命が多くの割合を占める場合が多いことから、 $a/t < 0.3$ の領域の K 値は非常に重要

と思われる。このような小さいき裂では急峻な応力場に存在しても、き裂面に作用する応力分布としては一定および線形と見なしても妥当であろう。そこで、小さいき裂に対する提案式の有用性を検証するため、 $a/t=0.02$ の場合について、Newman と Raju の式との比較を行った。Table 1 は、種々のき裂形状に対する無次元化 K 値の比較結果である。比較した範囲では Newman と Raju の式との差異は、表面部 (Fig.1 の点 C) の一条件のみ 10% を超えていたが、全体的に 10% を下回っていた。以上の結果、10% の誤差を許容すれば、本論文で提案する K 値重み関数を適用することで、板厚・板幅方向の急峻な応力場に存在する表面き裂の K 値を与えることが可能であると言える。

Fig.4 Dimensionless stress intensity factor ($a/t=0.3$).

Fig.5 Dimensionless stress intensity factor ($a/t=0.3$).

Fig.6 Dimensionless stress intensity factor ($a/t=0.5$).

Fig.7 Dimensionless stress intensity factor ($a/t=0.5$). Fig.8 Dimensionless stress intensity factor ($a/t=0.8$). Fig.9 Dimensionless stress intensity factor ($a/t=0.8$).Table 1 Comparison of dimensionless stress intensity factor ($a/t=0.02$)

Point A in Fig.1 ($\varphi=\pi/2$). Applied stress: $\sigma(x,y)=\sigma_0$				
a/c	0.25	0.5	0.75	1.0
DK_{wf}	1.032	1.029	1.043	1.052
DK_{NR}	1.109	1.086	1.063	1.041
Error (%)	6.911	5.219	1.898	1.096
Point C in Fig.1 ($\varphi=0$). Applied stress: $\sigma(x,y)=\sigma_0$				
a/c	0.25	0.5	0.75	1.0
DK_{wf}	0.599	0.817	0.916	1.000
DK_{NR}	0.610	0.845	1.013	1.145
Error (%)	1.774	3.263	9.571	12.641

Point A in Fig.1 ($\varphi=\pi/2$). Applied stress: $\sigma(x,y)=\sigma_0(1-y/a)$				
a/c	0.25	0.5	0.75	1.0
DK_{wf}	0.391	0.363	0.340	0.314
DK_{NR}	0.421	0.392	0.367	0.343
Error (%)	7.234	7.335	7.288	8.434
Point C in Fig.1 ($\varphi=0$). Applied stress: $\sigma(x,y)=\sigma_0(1-y/a)$				
a/c	0.25	0.5	0.75	1.0
DK_{wf}	0.518	0.684	0.763	0.832
DK_{NR}	0.501	0.678	0.799	0.887
Error (%)	3.293	0.948	4.457	6.179

(Note)

 DK_{wf} : Dimensionless stress intensity factor by the weight function method proposed in this paper. DK_{NR} : Dimensionless stress intensity factor by Newman and Raju's equation.Error: $(|DK_{wf} - DK_{NR}| / DK_{NR}) \times 100$

4. 埋没き裂に対する K 値重み関数

Fig.10 に模式的に示す埋没き裂に対する K 値重み関数を検証する。表面き裂が存在する面内の諸量に関するパラメータは Fig.1 に示している。検証を実施したき裂形状は、アスペクト比 (a/c) が 0.25, 0.5, 0.75, 1.0 の 4 ケース、無次元化した自由表面からき裂までの最短距離 (d/a) が 0.25, 0.4, 0.5 の 3 ケースの合計 12 ケースである。なお、き裂前縁から板表裏面までの距離が有限な場合 (以下、有限板厚問題と称する) と、表裏いずれか一方への距離が有限であるが、もう一方までの距離は十分に大きいと見なせる場合 (以下、半無限板厚問題と称する) の両者について検討を実施した。有限板厚問題では板厚を $2d$ 、板厚中央位置にだ円状き裂が存在する場合を設定した。半無限板厚問題では、一方の自由表面位置を $10a$ とすることで半無限板厚状態を近似した。

Fig.10 Elliptical crack in a body.

き裂面に作用する応力場 $\sigma(x,y)$ を式 (6), (7) で与える。

$$\sigma(x,y) = \sigma_0 (y/a)^n, (n=0,1,\dots,6) \quad (6)$$

$$\sigma(x,y) = \sigma_0 (x/c)^n, (n=0,1,\dots,6) \quad (7)$$

Fig.11. Dimensionless stress intensity factor at Point A ($\varphi=-\pi/2$) ($d/a=0.25$).

Fig.15 Dimensionless stress intensity factor at Point B ($\varphi=\pi/2$) ($d/a=0.25$).

Fig.12. Dimensionless stress intensity factor at Point B ($\varphi=\pi/2$) ($d/a=0.25$).

Fig.16 Dimensionless stress intensity factor at Point C ($\varphi=0$) ($d/a=0.25$).

Fig.13. Dimensionless stress intensity factor at Point C ($\varphi=0$) ($d/a=0.25$).

Fig.17 Dimensionless stress intensity factor at Point A ($\varphi=-\pi/2$) ($d/a=0.5$).

Fig.14 Dimensionless stress intensity factor at Point A ($\varphi=-\pi/2$) ($d/a=0.25$).

Fig.18 Dimensionless stress intensity factor at Point B ($\varphi=\pi/2$) ($d/a=0.5$).

Fig.19 Dimensionless stress intensity factor at Point C ($\varphi=0$) ($d/a=0.5$).

Fig.20 Dimensionless stress intensity factor at Point A ($\varphi=-\pi/2$) ($d/a=0.5$).

Fig.21 Dimensionless stress intensity factor at Point B ($\varphi=\pi/2$) ($d/a=0.5$).

Fig.22 Dimensionless stress intensity factor at Point C ($\varphi=0$) ($d/a=0.5$).

埋没き裂に対しては, Wang らによる $M(\theta, \alpha)$ の関数近似の係数を変更するだけでは精度改善が不十分と判断したため, 試行錯誤的に関数形も修正して精度改善を図った.

結果の例として, $d/a=0.25$ の場合を Fig.11~16 に, $d/a=0.5$ の場合を Fig.17~22 に示す. 本論文で提案する重み関数を用いて計算される K 値と参照解の誤差は, き裂形状が扁平かつ, き裂深さの増加に伴い大きくなるが, 検証範囲での最大誤差は 9% であった. この誤差を許容すれば本論文で提案する K 値重み関数を適用することで, 板厚・板幅方向に応力勾配を有する半無限・有限板中どちらの埋没き裂にも適用可能であることが確認された.

5. 任意応力場中の表面・埋没き裂に対する適用

本研究で提案する K 値重み関数の妥当性をより広範に検証するため, ここでは, き裂深さ及び幅の両方向に応力分布を有する場合と, き裂面の一部に応力が作用する場合を検討した.

5.1 き裂深さ及び幅の両方向に分布する応力場に対する K 値

表面き裂に式 (8), 埋没き裂に式 (9) で与えられる応力場が作用する場合の K 値について検討した.

$$\sigma(x, y) = \sigma_0 (1 - y/a)^m (1 - x/c)^n \quad (8)$$

$$\sigma(x, y) = \sigma_0 (y/a)^m (x/c)^n \quad (9)$$

本研究では $m=0 \sim 6$, $n=0 \sim 6$ の全ての組み合わせに対して検討を行ったが, ここでは ($m=1, n=2$), ($m=2, n=4$) 及び ($m=6, n=3$) に関する検証結果を紹介する. 表面き裂 ($a/t=0.3$) に対する結果を Fig.23 に示し, 埋没き裂 ($d/a=0.25$, 有限板厚) に対する結果を Fig.24 に示す.

Fig. 23, 24 に示した結果より, き裂深さ及び幅の両方向に分布する応力場に関しても, 本研究で提案する重み関数を用いれば, 比較的良好な精度で K 値算出が可能である. なお, 他の検証条件においても同レベルの推定精度を有していることを確認している.

Fig.23 Dimensionless stress intensity factor on a surface crack ($a/t=0.3$).

Fig.24 Dimensionless stress intensity factor in finite thickness cracked body ($d/a=0.25$).

5.2 き裂面の一部に応力が作用する際の K 値

表面・埋没き裂のき裂面の一部に応力が作用する時の K 値に関して検証した。最初に式 (10) で定義される一定応力 σ_0 が、き裂深さ方向の一部分に作用する条件下に対する検証を実施した。結果を Fig. 25, 26 に示す。次に式 (11) で定義する一定応力 σ_0 が、き裂面的一部分に作用する場合について検証を実施した。なお、表面き裂問題では、 $y \geq 0$ の範囲のみを考慮している。結果を Fig.27, 28 に示す。

$$\sigma(x, y) = \sigma_0, (-a/4 \leq y \leq a/4) \quad (10)$$

$$\sigma(x, y) = \sigma_0, (-a/4 \leq x \leq a/4, -a/4 \leq y \leq a/4) \quad (11)$$

Fig.25 Dimensionless stress intensity factor on surface crack.

Fig.26 Dimensionless stress intensity factor in finite thickness embedded cracked body.

Fig.27 Dimensionless stress intensity factor on surface crack.

Fig.28. Dimensionless stress intensity factor in finite thickness embedded cracked body.

Fig. 25~28 に示した結果より、き裂端が自由表面に近くなるにつれて推定精度が劣る傾向が確認できる。この理由として、き裂前縁と自由表面間の FE メッシュ分割数が実際の変形挙動を表現するには不足していた可能性も考えられる。また、重み関数の係数を単純な多項式近似していることも、精度低下に関わっている可能性もある。しかしながら、参照解との相違が最大でも 10% 程度であることを考慮すれば、き裂面の一部に応力が作用する場合にも、改良した重み関数法は適用可能と判断できる。

6. 結 言

Wang らにより提案された、表面および埋没き裂に関する K 値重み関数を、板厚・板幅方向に実用上必要と考えられる範囲の任意応力場が存在する場合に拡張すると共に、実用上重要な、有限板厚中に存在する埋没き裂に適用できるように改良した。今回の検証範囲および許容誤差を 10% として、提案式の適用条件を以下のように定める。

- 表面き裂 : $0 < a/c \leq 1, 0 < a/t < 1, c/b \leq 0.5$
- 埋没き裂 : $0 < a/c \leq 1, 0.25 < d/a < 0.5, c/b \leq 0.5$

(有限板厚, 半無限板厚問題共に)

今後の課題として、埋没き裂が有限板厚内で板厚に対して偏心して位置する場合に適用する手法の検討が挙げられる。また、今回導出した K 値重み関数を実装した疲労き裂成長

シミュレーションコードを開発し、任意応力場に存在する表面および埋没き裂の疲労成長シミュレーションを実施することも挙げられる。

謝 辞

本研究は科学研究費若手研究 (S) (21676007) の研究助成により実施したものである。関係各位に御礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) Newman, J.C.Jr. and Raju, I.S. : An Empirical Stress Intensity Factor Equation for The Surface Crack, Engineering Fracture Mechanics, Vol.15, No.1-2, 1981, pp.185-192.
- 2) 白鳥正樹, 三好俊郎, 谷川克己 : 任意分布力を受ける表面き裂の応力拡大係数の解析, 日本機械学会論文集, A 編, Vol.51, No.467, 1980, pp.1828-1835.
- 3) 大沢直樹, 澤村淳司, 岡田翔太, 重田圭, 辻知英 : 船体構造中の溶接継手に影響関数法を適用する際の計算精度に関する研究, 日本船舶海洋工学会論文集, Vol.12, 2010, pp.201-208.
- 4) Wang, X. and Glinka, G.; Determination of approximate point load weight functions for embedded elliptical cracks, International Journal of Fatigue, Vol.31, Issue 11-12, 2009, pp.1816-1827.
- 5) Zhaoyu Jin and Xin Wang: Point Load Weight Functions for Semi-Elliptical Cracks in Finite Thickness, 38th ASTM national Symposium on Fatigue and Fracture Mechanics, Anaheim, CA, U.S.A., 2011.
- 6) Rice, J.R.: Weight function theory for three-dimensional elastic crack analysis, ASTM STP-1020, 1989, pp.29-57.
- 7) 白鳥正樹, 小川貴弘, 西嶋章治, 任意分布力を受ける内部き裂の応力拡大係数の解析, 日本機械学会論文集 A 編, pVol.58, No.545, 1992.
- 8) Newman, J.C.Jr. and Raju, I.S. : Stress-Intensity Factor Equations for Cracks in Three-Dimensional Finite Bodies, Fracture Mechanics, Fourteenth Symposium Volume I: Theory and Analysis, ASTM STP 791, J.C.Lewis and G.Sines, Eds., American Society for Testing and Materials, 1983, pp.I-238-I-265.
- 9) <http://office.microsoft.com/ja-jp/excel-help/HP010342416.aspx?CTT=5&origin=HP010342660>.
- 10) <http://www.mscsoftware.co.jp/products/marc/>

付録 K 値重み関数の表示式

A.1 表面き裂

表面き裂の最深部 ($\varphi=\pi/2$, Fig.1 中の点 A に相当) での重み関数の係数 M を, 次式で示す多項式近似で与えた。なお, $\xi=a/t$ である。

$$M = B_1 \xi^6 + B_2 \xi^5 + B_3 \xi^4 + B_4 \xi^3 + B_5 \xi^2 + B_6 \xi \quad (A1)$$

$$B_1 = A_{11} \alpha^4 + A_{12} \alpha^3 + A_{13} \alpha^2 + A_{14} \alpha + A_{15} (\alpha + 0.15)^{-1} + A_{16}$$

$$B_2 = A_{21} \alpha^4 + A_{22} \alpha^3 + A_{23} \alpha^2 + A_{24} \alpha + A_{25} (\alpha + 0.15)^{-1} + A_{26}$$

$$B_3 = A_{31} \alpha^4 + A_{32} \alpha^3 + A_{33} \alpha^2 + A_{34} \alpha + A_{35} (\alpha + 0.15)^{-1} + A_{36}$$

$$B_4 = A_{41} \alpha^4 + A_{42} \alpha^3 + A_{43} \alpha^2 + A_{44} \alpha + A_{45} (\alpha + 0.15)^{-1} + A_{46}$$

$$B_5 = A_{51} \alpha^4 + A_{52} \alpha^3 + A_{53} \alpha^2 + A_{54} \alpha + A_{55} (\alpha + 0.15)^{-1} + A_{56}$$

$$B_6 = A_{61} \alpha^4 + A_{62} \alpha^3 + A_{63} \alpha^2 + A_{64} \alpha + A_{65} (\alpha + 0.15)^{-1} + A_{66}$$

$$A = \begin{bmatrix} -60.964 & 57.038 & -31.942 & 101.36 & 37.976 & 8.5477 \\ 50.931 & 30.096 & -64.030 & -14.159 & -32.751 & -198.97 \\ 3.7590 & 96.704 & -239.63 & 37.624 & -18.744 & 294.32 \\ -97.234 & 24.657 & 143.31 & 35.240 & 35.472 & -206.31 \\ 90.445 & -152.37 & 112.43 & -100.35 & -14.417 & 78.789 \\ -39.038 & 98.466 & -102.92 & 57.458 & 3.7526 & -19.082 \end{bmatrix}$$

表面部 ($\varphi=0$, Fig.1 中の点 C に相当) に関しても同様の多項式近似の形式で係数 M を与えた。

$$M = B_1 \xi^6 + B_2 \xi^5 + B_3 \xi^4 + B_4 \xi^3 + B_5 \xi^2 + B_6 \xi \quad (A2)$$

$$B_1 = A_{11} \alpha^4 + A_{12} \alpha^3 + A_{13} \alpha^2 + A_{14} \alpha + A_{15} \alpha^{-1} + A_{16}$$

$$B_2 = A_{21} \alpha^4 + A_{22} \alpha^3 + A_{23} \alpha^2 + A_{24} \alpha + A_{25} \alpha^{-1} + A_{26}$$

$$B_3 = A_{31} \alpha^4 + A_{32} \alpha^3 + A_{33} \alpha^2 + A_{34} (\alpha + 0.1) + A_{35} (\alpha + 0.1)^{-1} + A_{36}$$

$$B_4 = A_{41} \alpha^4 + A_{42} \alpha^3 + A_{43} \alpha^2 + A_{44} (\alpha + 0.1) + A_{45} (\alpha + 0.1)^{-1} + A_{46}$$

$$B_5 = A_{51} \alpha^4 + A_{52} \alpha^3 + A_{53} \alpha^2 + A_{54} (\alpha + 0.1) + A_{55} (\alpha + 0.1)^{-1} + A_{56}$$

$$B_6 = A_{61} \alpha^4 + A_{62} \alpha^3 + A_{63} \alpha^2 + A_{64} (\alpha + 0.1) + A_{65} (\alpha + 0.1)^{-1} + A_{66}$$

$$A = \begin{bmatrix} 46270 & -141360 & 157780 & -73619 & -52.740 & 12240 \\ -138420 & 410340 & -441890 & 198070 & 47.100 & -31160 \\ 150810 & -436180 & 454800 & -194860 & 511.10 & 47179 \\ -74872 & -212000 & -214490 & 87290 & -693.20 & -19205 \\ 17248 & -48052 & 47482 & -18474 & 256.20 & 3649.1 \\ -1525.0 & 4214.0 & -4114.0 & 1563.0 & -27.500 & -284.50 \end{bmatrix}$$

A.2 埋没き裂 (有限板厚の場合)

板表裏面側のだ円頂点位置 (Fig.1 中の点 A に相当) での重み関数の係数 M を, 次式で示す多項式近似で与えた。ここで, $\eta=d/a$ である。

$$M = C_1 + C_2 \alpha + C_3 \eta + C_4 \alpha^{-0.5} + C_5 \eta^{0.5} + C_6 \alpha^{0.5} \eta + C_7 \alpha^{0.6} \quad (A3)$$

$$C_1=6.3517, C_2=1.9054, C_3=1.5872, C_4=-0.55225, C_5=-5.9005 \\ C_6=2.0248, C_7=-5.3093$$

板幅方向側のだ円頂点位置 (Fig.1 中の点 C に相当) に関しても同様の多項式近似の形式で係数 M を与えた.

$$M = D_1 + D_2\alpha^{-1} + D_3\eta^{-1} + D_4\alpha^{-0.5} \\ + D_5\eta^{-2} + D_6\alpha^{-0.5}\eta^{-2} + D_7\alpha^{-0.5}\eta^{-1} \quad (A4)$$

$$D_1=0.47163, D_2=-0.41006, D_3=-0.50356, D_4=-0.20652, \\ D_5=0.057275, D_6=-0.056419, D_7=0.51349$$

A.3 埋没き裂 (半無限板厚の場合)

自由表面側のだ円頂点位置 (点 P : $\varphi = -\pi/2$) , その反対側の頂点 (点 Q : $\varphi = \pi/2$) 及び板幅方向側のだ円頂点位置 (点 R : $\varphi = 0$) の重み関数の係数 M を次式で与えた. ただし, $\eta = d/a$ である.

1) 点 P ($\varphi = -\pi/2$)

$$M_A = E_1 + E_2\alpha + E_3\eta + E_4\alpha^2 \\ + E_5\eta^2 + E_6\alpha\eta^2 + E_7\alpha^2\eta^2 \quad (A5)$$

$$E_1=1.8626, E_2=-1.0554, E_3=-3.5249, E_4=0.22694, E_5=1.5989, \\ E_6=2.6770, E_7=-1.1220$$

2) 点 Q ($\varphi = \pi/2$)

$$M_B = F_1 + F_2\alpha^{-1} + F_3\eta + F_4\alpha^{-2} \\ + F_5\eta^2 + F_6\alpha^{-1}\eta + F_7\alpha^{-2}\eta \quad (A6)$$

$$F_1=-0.37155, F_2=0.39094, F_3=0.095016, F_4=-0.055900, F_5= \\ 0.076620, F_6=-0.26694, F_7=0.032455$$

3) 点 R ($\varphi = 0$)

$$M_C = G_1 + G_2\alpha^{-1} + G_3\eta + G_4\alpha^{-2} \\ + G_5\eta^2 + G_6\alpha^{-1}\eta \quad (A7)$$

$$G_1=0.07905, G_2=-0.022090, G_3=-0.10460, G_4=-0.067760, \\ G_5=-0.028640, G_6=-0.050680$$