溶接止端部に存在する表面き裂の疲労き裂進展解析法に関する研究

正会員 田 中 智 行* 学生会員 高成田 浩 輔*
 岡 田 裕** 正会員 岡 澤 重 信*
 小 林 陽 介*** 須 藤 昌 博****

A study for numerical techniques for fatigue crack propagation analysis of surface crack in welded joints

by Satoyuki Tanaka, *Member* Kosuke Takanarita, *Student Member*
 Hiroshi Okada, Shigenobu Okazawa, *Member*
 Yosuke Kobayashi, Masahiro Sudo

Summary

Welded joints are often applied to ships and ocean structures. Fatigue strength evaluation for the welded joints is important for assessing structural integrity of welded structures. In recent years, effective computational techniques for analyzing fracture mechanics problems and the crack propagation simulations have been proposed. In addition, the simulation for complex shaped geometry is easy to handle for the development of computational power. In this study, fatigue strength evaluation based on the crack propagation is examined. In the numerical examples, crack propagation analyses of surface crack in T-shaped welded joints are carried out for employing the computational techniques. Mk factors, crack paths and fatigue cycles are evaluated and are compared with existing techniques. Effectiveness of the fatigue strength evaluation based on the new techniques is discussed.

1. はじめに

船体構造や海洋構造物は大規模な溶接構造物であり、供用中に不規則な波浪変動外力を受ける。この繰返し荷重により溶接継手などの構造部材に疲労き裂が発生することがある。き裂発生後のさらなる繰返し荷重によりき裂が進展した場合、浸水や貨油流出などの機能損失や構造健全性の低下につながる。現在、一般的な溶接構造物の疲労強度評価法として、繰返し荷重中の応力振幅と疲労寿命の関係を表す $S-N$ 線図を用いた線形累積被害則 (Miner 則) が良く用いられる¹⁾。しかし、Miner 則では変動外力による荷重履歴の影響を考慮できず、構造物に加わる応力負荷順序を厳密に取り扱うことができない。より詳細な疲労寿命を予測するための一つの方法として、Paris 則²⁾などの疲労き裂進展寿命を考慮した疲労強度評価法が考えられる。寺井ら³⁾は Miner 則に代わり疲労き裂進展寿命を基準とした疲労設計法を提案している。

破壊力学アプローチを用いたき裂進展寿命評価では、溶接

止端部に存在する表面き裂の K 値を評価し、Paris 則などのき裂進展則を用いてどの程度のサイクル数を経て部材が破断に至るかを予測することが重要となる。現在、一般的にき裂の K 値解析には FEM が用いられている。FEM では、構造中の任意の位置にあるき裂の K 値を高精度に評価することができる。一方、き裂モデル生成の制約やリメッシングの問題からき裂進展解析に関しては二次元、三次元問題を問わず容易ではない。Abaqus⁴⁾、MSC.Marc⁵⁾などの汎用 FEM ソフトウェアの破壊力学解析機能では、き裂やき裂周辺部のモデル化に四辺形要素や六面体要素を用いる制約があり、き裂進展時のリメッシングに手間を要する。そのような背景のもと、三角形要素や四面体要素による自動メッシュ分割を用いたき裂進展解析手法⁶⁾⁷⁾⁸⁾⁹⁾や、Element Free Galerkin Method (EFGM)¹⁰⁾¹¹⁾、eXtended Finite Element Method (X-FEM)¹²⁾¹³⁾などのき裂やき裂進展解析に伴うメッシュ生成を軽減した解析手法 (メッシュフリー法) が提案されてきている。FEM と比較してモデル生成の手間を大幅に削減できるため、溶接継手のような複雑形状を持つ構造に対しても効率的なき裂進展解析が期待できる。本研究では溶接止端部に存在する表面き裂に対して、これらの新しいき裂解析手法や Mk ファクター¹⁴⁾などの既存のアプローチを用いて、溶接継手のき裂進展解析法に関する検討を行った。

本報では、 Mk ファクターを用いた方法に加えて、上述したき裂解析手法のうち四面体二次要素向け VCCM 法 (Virtual

* 広島大学大学院工学研究科
 ** 東京理科大学理工学部機械工学科
 *** 東洋大学計算力学研究センター
 **** (株) テクノスター

Crack Closure-Integral Method) を用いた三次元 FEM による破壊力学解析¹⁵⁾¹⁶⁾, および X-FEM による二次元破壊力学解析と有限板中の半楕円表面き裂の K 値算式 (いわゆる Raju-Newman の式¹⁷⁾) を組み合わせた方法により, 溶接止端部に存在する表面き裂の進展解析を実施する. VCCM 法を用いたアプローチでは, プリソフトウェアを用いて 3D-CAD モデルに直接表面き裂を定義し, 自動メッシュ分割を行うことで三次元き裂進展解析が可能なシステム¹⁸⁾を用いる. また, X-FEM を用いたアプローチとして, 著者らが開発したウェーブレット FEM と X-FEM を用いた方法¹⁹⁾²⁰⁾を用いる. 以後, 記述の簡略化のため後者の方法を WX-FEM と呼ぶ. WX-FEM はボクセル解析²¹⁾²²⁾と同様に固定直交格子をベースとした方法であり, 溶接止端部のフィレット形状, 研削処理による止端仕上げなど詳細形状の表現が容易であり, 継手形状や止端曲率半径などが構造的応力集中や K 値に大きく依存する問題において高精度かつ効率的な解析が期待できる.

本報は以下により構成される. まず, 溶接継手の K 値評価法として用いられている Mk ファクターについて簡潔に述べる. 次に, 溶接止端部の表面き裂進展解析を行うための二つの破壊力学解析手法について説明する. 数値解析例として, 異なる止端形状を持つ T 字継手に対して, K 値の算出および表面き裂のき裂進展解析を実施し, 既存の解析結果との比較および考察を行った結果について報告する.

2. Mk ファクター¹⁴⁾

Mk ファクターは平板に存在する表面き裂の K 値に対して, 付加物の存在による応力集中の影響を考慮した係数であり, 以下の式で定義される.

$$Mk = \frac{K_{(in \text{ plate with attachment})}}{K_{(in \text{ same plate but with no attachment})}} \quad (1)$$

具体的には, アスペクト比, 板厚, 付加物の脚長, フランク角, 止端曲率半径などの形状パラメータを用いて算式の形で与えられる. これまでに, Maddox¹⁴⁾ は溶接止端部に発生する表面き裂を二次元の平面ひずみ問題として Mk ファクターを取り扱った. その後, 計算機能力と破壊力学解析技術の発展により, 三次元的な評価が行われるようになってきている²³⁾²⁴⁾. Bowness と Lee²⁵⁾²⁶⁾ は Abaqus⁴⁾ の破壊力学機能を用いて, T 字継手の溶接止端部に存在する表面き裂表面部と最深部に対する高精度な三次元 Mk ファクターを簡易算式として提案した. 本章以降, 二次元と三次元の Mk ファクターを区別するため, それぞれ $Mk_{(2D)}$, $Mk_{(3D)}$ と記述する.

Mk ファクターを用いることで簡易的に溶接止端部の表面き裂の破壊力学評価をできるため, 溶接構造物の検査や補修を行う技術者にも有用である. 例えば, Mk ファクターと Raju-Newman の式¹⁷⁾を用いることで, 溶接止端部に存在する表面き裂の K 値を予測できる. さらに前章で述べた Paris 則を用いることで, 溶接継手中の表面き裂の進展解析を実施できる. さまざまな継手形状に対する Mk ファクターの算式

が BS7910²⁷⁾ や WES2805²⁸⁾ に掲載されている.

$Mk_{(3D)}$ の算式を用いた表面き裂進展解析では, 半楕円形状の初期き裂を仮定し, 以下の手順でき裂を進展させる.

- (a) $Mk_{(3D)}$ の算式と Raju-Newman の式を用いて, 溶接止端部に存在する表面き裂の表面部と最深部の K 値を算出する.
- (b) 求めた K 値から, 応力拡大係数範囲 ΔK を求め, Paris 則に代入しき裂表面部と最深部でのき裂進展量を求める.
- (c) (b) で得られた表面部と最深部のき裂進展量を半楕円き裂の長軸と短軸の増分量として, き裂を成長させる.

以上の手順を繰り返す. この方法では, き裂表面部と最深部での K 値のみが得られるため進展した表面き裂は常に半楕円形状を保つ. 5.2 節では, $Mk_{(2D)}$ を用いた表面き裂進展解析について説明する.

3. 四面体要素向け VCCM 法を用いた三次元表面き裂進展解析システム

本章では, VCCM 法を用いた三次元き裂進展解析システムについて述べる. 本システムは, 応力拡大係数の算出に Okada²⁹⁾ が提案した四面体二次要素向け VCCM 法を用いている. き裂形状を四面体二次要素でモデル化することにより溶接止端部などの複雑形状に対してもき裂を容易に定義することができる. 本解析では, 3D-CAD に対して直接き裂形状を定義して, 自動メッシュ分割が可能なプリソフトウェア¹⁸⁾に MSC.Nastran³⁰⁾ を連動させた自動き裂進展解析システムを用いる. 3D-CAD を用いることで継手形状や溶接止端部なども精確に表現できる. 用いたプリソフトウェアのユーザーインターフェースを Fig.1 に示す. また, 本解析システムのフローチャートを Fig.2 に示し, 具体的に以下の手順を用いて解析を実施する.

Fig. 1 User interface of Pre-software¹⁸⁾

- (a) 3D-CAD ソフトウェアを用いて, 解析対象の三次元モデルを作成し, プリソフトウェアに読み込ませる.

Fig. 2 Flow chart of crack propagation analysis using VCCM for tetrahedron

- (b) 読み込ませた 3D-CAD モデルに対して初期き裂形状、き裂位置を定義する。半楕円形状のき裂を任意の位置に定義することができる。
- (c) 四面体二次要素を用いた自動メッシュ分割機能により FE モデルを作成する。
- (d) プリソフトウェアに連動させた MSC.Nastran により線形解析を実施する。
- (e) MSC.Nastran の出力結果から VCCM 法により応力拡大係数を算出する。
- (f) き裂進展速度や進展方向を得られた応力拡大係数を用いて算出し、次ステップでのき裂形状を予測する。

き裂進展解析を実施する場合、(c) から (f) の流れを繰り返す、き裂を成長させる。本解析では、四面体二次要素によるき裂のモデル化を行うことで、表面き裂を有する溶接継手などの構造詳細モデルの作成、および破壊力学解析を従来法と比較して効率的に実施することが可能である。

半楕円形状の表面き裂の断面図を Fig.3 (a) に示す。き裂サイズとして深さ a 、幅 $2c$ とする。ここでは全体座標系を x, y, z 、局所座標系を x', y', z' としている。四面体二次要素でメッシュ分割を行った半楕円表面き裂の断面のメッシュ分割例を Fig.3 (b) に示す。VCCM 法を用いて応力拡大係数を算出するため、き裂前縁に沿うように四面体二次要素を規則的に配置する。計算負荷を抑えるため、き裂前縁から離れるに従い、粗いメッシュ分割を用いる。Fig.3 (b) において、き裂内面では同サイズの要素を用いているが、表面き裂が大きくなるに従い、き裂内面においてもき裂前縁から離れるに従い粗いメッシュ分割を用いる。Fig.3 (c) に N_k サイクル経過後の表面き裂 (深さ a_k 、幅 $2c_k$) が、 $N_k + \Delta N$ サイクル時に進展する際

のイラストを示す。クラックフロントの節点を $i = 1, \dots, m$ とし、各節点でのき裂の進展量を Δ_i ($i = 1, \dots, m$) とする。本アプローチでは、き裂前縁に配置した節点それぞれで応力拡大係数を算出し、き裂進展速度および方向を算出することができる。初期き裂以降のモデルではき裂前縁上の各節点が独立に移動できるため、複雑な表面き裂形状も表現できる。

本研究では、モード I 状態が支配的な問題のみを取り扱うため、応力拡大係数 K_I のみを用い、き裂は同一平面状を進展すると仮定した。VCCM 法プログラムでは、FEM 解析結果からき裂前縁の節点反力と開口変位を用いてエネルギー解放率を算出する。モード I の応力拡大係数は K_I は以下のように評価される。

$$K_I = \sqrt{E' G_I^{VCCM}} \quad (2)$$

ここで、 G_I^{VCCM} はモード I 成分に関するエネルギー解放率であり、VCCM 法のポスト処理により得られる。 E' は材料により決定されるパラメータであり、平面応力状態の場合、 $E' = E$ 、平面ひずみ状態の場合、 $E' = E/(1 - \nu^2)$ である。 E はヤング率、 ν はポアソン比である。各節点で得られた応力拡大係数 K_I を K 値として応力拡大係数範囲 ΔK を求め、Paris 則に代入し次ステップでのき裂進展量、き裂形状を決定する。また、表面き裂の表面部では平面応力状態となることが知られているが、本解析ではき裂前縁全ての応力拡大係数に対して平面ひずみ状態と仮定して解析を実施した。

4. WX-FEM を用いた表面き裂進展解析

4.1 WX-FEM を用いた二次元破壊力学解析

本解析で用いたウェーブレット FEM ³¹⁾³²⁾ と X-FEM ¹²⁾¹³⁾ を用いたき裂進展解析システムについて簡単に述べる。ウェーブレット FEM はウェーブレット関数を近似関数として用いた FEM である。ボクセル解析法 ²¹⁾²²⁾ のように固定直交格子を用いて物体を離散化し、円孔やき裂前縁部などの応力集中部に対しては高解像度のウェーブレット関数を配置し、局所的に精度を向上させるアプローチである。Fig.4 (a) (i)-(iv) に一次 B-spline スケーリング関数/ウェーブレット関数を用いたウェーブレット FEM での空間解像度の制御例を示す。スケーリング関数とはウェーブレット法で用いる基底関数を構成するための基本となる関数である。スケーリング関数は領域全体の低解像度の変位の近似を行うために用い、ウェーブレットは応力集中などの局所的な高解像度の変位を近似するために用いる。最も低解像度の近似をレベル j のスケーリング関数を用いて行い、解析精度の必要な領域にレベル $j, j+1, j+2, \dots$ のウェーブレット関数を重ねてゆく。解像度が上がるごとにウェーブレット関数の幅は $1/2$ になる。文献 ³³⁾ では、B-spline スケーリング関数/ウェーブレット関数を用いたウェーブレット FEM による固体/構造解析法を提案した。応力集中部に高解像度のウェーブレット関数を配置させることで、従来型 FEM のようにリメッシングを行わず、高精度

Fig. 3 Cross section of surface crack [(a) Global and local coordinates, (b) FE mesh, (c) Crack propagation simulation]

な解析を効率的に実施できることを示した。一方、ウェーブレット FEM では、物体の変形を連続的と仮定して離散化を行うためき裂面などの変位の不連続を表現することが容易でない。そこで、X-FEM¹²⁾¹³⁾ のアイデアを用いてエンリッチ関数を導入することにより、破壊力学解析、き裂進展解析を実施できることを示した²⁰⁾。エンリッチ関数とは、Partition of Unity (PU) 条件³⁴⁾ をもとに、あらかじめ既知の関数を FEM の変位関数として内挿できる関数である。

本研究では、溶接継手に存在する表面き裂解析に WX-FEM を適用する。Fig.4 (b) に WX-FEM を用いた二次元の溶接継手の離散化モデルを示す。まず、解析対象をセルと呼ばれる矩形領域で分割する。領域境界やフィレット部は高精度に表現するために一つのセルを大きさの等しい矩形状のサブセルに分割し、領域境界はそのセルやサブセルの積分を行うか行わないかで表現する。内外判定はサブセルの中心座標で行う。

Fig.4 (c) に Fig.4 (b) の拡大図を示す。溶接止端部に発生したき裂に対してエンリッチ関数を用いてき裂形状を定義する。まず、スケーリング関数に対してき裂の不連続を表現するためのエンリッチ関数を導入する (Js 属性)。さらに、き裂前縁の特異応力場を表現するためのエンリッチ関数をスケーリング関数 (Cs 属性)、およびウェーブレット関数 (Cw 属性) に導入する。Fig.4 (c) に示すように Cw 属性のエンリッチ関数はき裂前縁から半径 r_e 内に存在するウェーブレット関数にのみ定義した。文献²⁰⁾ と同様に、 J 積分の領域積分形式を用いてエネルギー解放率を求め、相互積分法³⁵⁾ により、混合モードき裂の応力拡大係数 K_I , K_{II} のモード分離を行う。本報では、 K_I が支配的な問題を取り扱い、得られた K_I 値を K 値として用い、き裂進展解析を実施する。き裂進展解析を行う際は、これらのエンリッチ関数をき裂形状に沿って再定義するだけで良い。このようなアプローチを用いることで従来型 FEM のようにき裂進展に伴うリメッシングを行う必要がなく、き裂先端で非常に細かいメッシュ分割を行わずに効率的なき裂進展解析が可能となる。二次元き裂に対する、スケーリング関数/ウェーブレット関数の空間解像度、き裂先端からの距離 r_e の変化による精度検証、二次元き裂進展解析などの詳細は文献²⁰⁾ を参照されたい。

溶接止端部ではアンダーカットの除去、応力集中の緩和などを目的に溶接止端部に研削処理を行うことがある。本アプ

ローチは固定直交格子に基づく方法であるため、Fig.4 (c) に示すように、領域境界を表現する方法と同様に、止端曲率半径 ρ を表現するため細かなサブセルを定義し、曲率半径内に存在するサブセルを解析領域外と判定し、サブセルの数値積分を行わないことで表現可能である。

4.2 $Mk_{(2D)}$ を用いた表面き裂進展解析

5.1 節の方法を三次元問題に拡張し、直接表面き裂解析を実施する方法も考えられるが、き裂進展解析では繰返し三次元解析を実施するため計算コストも大きい。そこで、SR202³⁷⁾ で実施されているようにき裂を含む溶接継手を二次元の平面ひずみ問題として考え、 $Mk_{(2D)}$ と Raju-Newman の式¹⁷⁾ を用いて表面き裂進展解析を試みた。フローチャートを Fig.5 に、イラストを Fig.6 に示す。T 字継手の溶接止端部に発生した半楕円表面き裂に対して疲労き裂進展解析を実施する手順について示す。

- (a) T 字継手を二次元構造とみなし、溶接止端部から生じる端部き裂の K 値を WX-FEM より求める。
- (b) 付加物の無い帯板の片側に存在する端部き裂の K 値を、公表されている近似式³⁸⁾ から求める。
- (c) (a), (b) より得られる K 値を用いて $Mk_{(2D)}$ を求める。すなわち $Mk_{(2D)} = K$ 値 (溶接継手) / K 値 (帯板) である。
- (d) Raju-Newman の式¹⁷⁾ に係数 $Mk_{(2D)}$ を掛け、三次元溶接継手の止端部に存在する表面き裂表面部および最深部の K 値を近似的に求める。
- (e) (d) で求めた K 値を用いて応力拡大係数範囲 ΔK を求める。 ΔK を Paris 則に代入し次ステップでのき裂長さを予測する。

き裂長さがあるしきい値に達するまで以上の手順を繰返しき裂を成長させる。

二次元の WX-FEM では、き裂表面部、最深部ともにき裂最深部で定義された $Mk_{(2D)}$ を用いるため、 $Mk_{(3D)}$ のアプローチと比較して、き裂幅の進展量やアスペクト比に関する正確な情報を得ることができないが、少ない計算負荷で効率的な表面き裂進展解析が期待できる。

Fig. 4 Modeling of 2D welded joint structure using WX-FEM [(a) Solution refinements using wavelet functions, (b) Whole model, (c) The details and representation of model geometry]

5. 数値解析例

止端形状の異なる T 字継手に発生した表面き裂に対して 3, 4, 5 章で述べた方法を用いて き裂進展解析を実施した。それぞれの節で用いる継手モデルを Model A, Model B, Model C とする。Model A と Model B では、溶接止端部で溶接止端をグラインダでスムーズにしたモデルを用いた。以降、この処理を profile 処理と呼び、止端曲率半径 ρ と主板板厚 t_1 の比を ρ/t_1 とする。Model C では、アンダカット除去のため toe-ground 処理を行ったモデルを用いる。

Fig. 5 Flow chart of surface crack propagation using 2D WX-FEM analysis

Fig. 6 K evaluation using $Mk_{(2D)}$ and Raju-Newman solution for welded joints

6.1, 6.2 節では、3 章で示した $Mk_{(3D)}$ の算式、および 4 章で示した VCCM 法を用いた表面き裂進展解析の結果を比較した。6.3 節では、VCCM 法および 5 章で述べた WX-FEM と $Mk_{(2D)}$ を用いた表面き裂進展解析の結果を比較した。き裂前縁に形成される塑性域寸法は き裂長さに対して十分小さいものとして小規模降伏条件を仮定した。また、溶接残留応力は考慮していない。初期き裂のサイズを $a = c = 0.2$ (mm) とし、表面き裂の最深部が板厚の 1/2 に達した時点で破断とみなし解析を終了する。材料として TMCP 鋼を想定し、Paris 則の係数として $C = 7.24e-13$, $m = 3.565$, 応力比はゼロとした。Paris 則で用いる K 値の単位として $(\text{MPa m}^{0.5})$, き裂長さの単位として (m) を用いた。

5.1 $\rho/t_1=0.1$ を持つ T 字継手の解析 (Model A)

片側溶接を行った T 字継手の溶接止端部に存在する表面き裂に対して、 $Mk_{(3D)}$ の算式を用いた方法、および VCCM 法

Fig. 7 Welded joint model (Model A) [(a) Model A, (b) Rectangular plate with a surface crack, (c) Model parameters]

を用いた方法によるき裂進展解析を実施し、それぞれの結果の比較を行った。解析対象を Fig.7 (a) に示す。主板板厚 t_1 、幅 W 、付加物の脚長を L としてモデル長さ方向 $S/2$ に表面き裂を定義する。すなわち、付加物を取り除くことで、Fig.7 (b) に示すような矩形板中に存在する表面き裂モデルとなる。Fig.7 (a) に示す止端形状のように profile 処理を施し、 $\rho/t_1=0.1$ とした。 θ はフランク角、 l_1, l_2 は溶接脚長である。モデル寸法を Fig.7 (c) にまとめる。

四面体二次要素を用いてメッシュ分割した FE モデルを Fig. 8 (a) に示す。継手全体で 3.0 (mm)、表面き裂近傍で 0.1 (mm) 程度のメッシュ分割を行った。クラックフロントの節点数はき裂の大きさに関わらず 400 節点とした。き裂サイズ $a = c = 0.2$ (mm) の初期き裂モデルで約 70 万節点、45 万要素である。ヤング率 210 (GPa)、ポアソン比 0.3 とした。解析モデルに対して引張荷重と曲げ荷重をそれぞれ加え、Bowness と Lee²⁵⁾²⁶⁾ が提案した $Mk_{(3D)}$ の算式との比較を行う。文献²⁵⁾²⁶⁾ のモデルでは、継手長さ方向の無限遠から引張荷重が加わることを想定し、Fig. 8 (b) に示すように RBE2 要素³⁰⁾

Fig. 8 3D FE model and boundary conditions (Model A) [(a) T-butt joint FE model, (b) Boundary conditions]

を用いて荷重面を平面保持、さらに荷重面の y 軸回転を拘束した。RBE2 要素は、1つの節点で独立自由度を持ち、任意の数の節点で従属自由度を持つ剛体要素である。曲げ解析においても、同様に荷重面を平面保持し主板中立面に沿って曲げモーメントを加えた。Fig.7 (b) で示す矩形板モデルに対しても、同様の境界条件を与えた。

まず、 $Mk_{(3D)}$ について検討を行った。Fig.7 (a), (b) で示す溶接継手および矩形板中に存在する表面き裂に対して VCCM 法を用いて、き裂最深部と表面部の K 値を求める。それらを式 (1) に代入して K 値の比を求めた。 a/t_1 がおよそ 0.01 - 0.45、アスペクト比 $a/c=1.0$ の表面き裂に対してシリーズ計算を実施し、文献²⁵⁾ の eq. (A5)-(A8) との比較を行った。算式 eq. (A5)-(A8) では、引張解析および曲げ解析に対して、止端部に $\rho/t_1=0.1$ を持つ T 字継手に対する、き裂表面部と最深部の高精度な $Mk_{(3D)}$ の算式が与えられている。具体的な eq. (A5)-(A8) の算式を付録に示す。

引張荷重および曲げ荷重を載荷した解析結果を Fig. 9 (a), (b) にそれぞれ示す。横軸 a/t_1 は板厚に対するき裂深さの比を示す。どちらの解析においても、溶接止端部の応力集中の影響のため、表面部 $Mk_{(3D)}$ は最深部より高めの値を示す。また、Fig. 9 (a) の引張り荷重を加えたき裂最深部の $Mk_{(3D)}$ は、 a/t_1 が大きくなり溶接止端部の応力集中の影響が減少するに従い 1 に近づく。一方、Fig. 9 (b) の曲げ荷重を加えた解

Fig. 9 Mk factors ($a/c = 1$)(Model A) [(a) Tension case, (b) Bending case]

析では、溶接止端の影響でき裂の開口が拘束されるため、き裂が大きくなるに従い $Mk_{(3D)}$ は 1 より小さくなる傾向を示す。引張荷重、曲げ荷重のそれぞれの解析において、VCCM 法により得られた結果はき裂表面部において若干低めの解が得られているものの、算式により得られた解と良好に一致する結果が得られた。すなわち、本解析で用いている四面体二次要素を用いた VCCM 法を用いることで、付加物の付着による応力集中の影響による K 値の変化を表現できることが示された。

次に、VCCM 法を用いた方法と文献²⁵⁾の eq. (A5)-(A8) を用いた方法での表面き裂進展解析の結果の比較を行った。引張解析では最大引張応力 200 (MPa)、曲げ解析では最大 200 (MPa) の曲げ応力が加わるように曲げモーメントを加えた。サイクル一定としてき裂進展解析を行い、VCCM 法では引張り解析で 9,000 サイクル、曲げ解析では 14,000 サイクルである。また、算式を用いた解析では、引張り、曲げ両方の解析で 5,000 サイクルとした。引張解析および曲げ解析に対するき裂進展に伴う表面き裂形状の変化を Fig. 10 (a), (b) に示す。同様に、Fig. 10 (a), (b) に対応するき裂長さとサイクル数の関係を Fig. 11 (a), (b) に示す。それぞれのグラフにき裂表面部と最深部での進展結果を示している。算式を用いた結果が早めに進展する結果となった。Fig. 12 (a), (b) にき裂表面

Fig. 10 Crack paths (Model A) [(a) Tension case, (b) Bending case]

部と最深部でのき裂長さに対する K 値について示す。引張解析では、き裂表面部、最深部とも K 値が単調に増加している。つまり、き裂進展量は最深部、表面部とも同程度であり、アスペクト比があまり大きくなりず Fig. 10 (a) に示すように半円に近い形で進展することがわかる。一方、曲げ解析では、き裂最深部の K 値はき裂長さに対して増加量が少ないが、き裂表面部ではき裂長さが大きくなるに従って急速に K 値が増加する。そのため Fig. 10 (b) に示すように、半楕円状に進展することがわかる。引張解析、曲げ解析のどちらにおいても、き裂最深部において VCCM 法より算式により得られた K 値が高いことから早めのサイクル数で解析が終了したものと考えられる。

5.2 $\rho/t_1=0.01$ を持つ T 字継手の解析 (Model B)

次に両側溶接を行った T 字継手に対する解析を実施した。解析対象を Fig. 13 (a) に示す。Model B では、 $\rho/t_1=0.01$ のモデルを用い、Model A ($\rho/t_1=0.1$) と比較して溶接止端部で激しい応力集中が発生する問題を設定した。モデル寸法を Fig. 13 (b) に示す。四面体二次要素を用いてメッシュ分割した FE モデルを Fig. 14 に示す。解析対象はき裂を除いた場合 yz 平面に対して対象の構造であるため、1/2 モデルを用いて解析を行った。メッシュ分割は Model A と同程度である。ヤング率 210 (GPa)、ポアソン比 0.3 とした。境界条件として

Fig. 11 Crack growth curves (Model A) [(a) Tension case, (b) Bending case]

Fig. 12 K value (Model A) [(a) Tension case, (b) Bending case]

曲げ荷重を用いた。参照解として文献²⁷⁾²⁸⁾³⁶⁾に掲載されている T 字継手の $Mk_{(3D)}$ の算式を用いた。具体的に本解析で用いた式は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
 Mk_A &= \alpha(a/t_1)^\beta \\
 Mk_C &= Mk_A + Mk_{(C-A)} \\
 Mk_{(C-A)} &= 1.15 \cdot \exp(-9.74 \cdot a/t_1)
 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 Mk_A および Mk_C はそれぞれき裂最深部と表面部での $Mk_{(3D)}$ である。 $Mk_{(C-A)}$ は、き裂表面部での $Mk_{(3D)}$ を補正するための値である。また、 α および β は表 1 で決定される。

Table 1 Parameters α and β for eq. (3) [$L/t_1 > 1$]

a/t_1	α	β
≤ 0.03	0.45	-0.31
> 0.03	0.68	-0.19

まず $Mk_{(3D)}$ について検討を行った。き裂表面部、最深部に対して VCCM 法と $Mk_{(3D)}$ 算式の比較を Fig. 15 に示す。VCCM 法を用いた $Mk_{(3D)}$ の算出方法は 6.1 節と同様である。 ρ/t_1 が小さいため、溶接止端部において激しい応力集中

Fig. 13 Welded joint model (Model B) [(a) Model B, (b) Model parameters]

Fig. 14 3D FE model (Model B)

Fig. 15 Mk factors ($a/c=1.0$) (Model B)

Fig. 16 Crack paths (Model B)

が発生する。その影響により、 a/t_1 が小さい場合、Model A と比較して高めの $Mk_{(3D)}$ が得られている。 a/t_1 が大きくなるとき裂表面部の VCCM 法の結果がやや高めの値を与えるが全体的に $Mk_{(3D)}$ の算式 eq.(3) と良い一致を示していることがわかる。

今回使用している算式は、止端曲率半径の適用限界に関する記述はない。しかし、VCCM 法の結果と良い相関を示す $Mk_{(3D)}$ が得られていることから、本算式を用いて表面き裂進展解析を実施した。最大 200 (MPa) の曲げ応力が加わるようにモーメントを加えた。VCCM 法を用いた解析では、TSV-Pre の自動き裂進展機能を用い、各ステップでの最大き裂進展量が

き裂前縁要素長さの 3 倍になるようにき裂を進展させた。各ステップ約 2,000-3,000 サイクルでき裂が進展する。また、算式を用いた解析ではサイクル一定として各ステップ 1,000 サイクルである。き裂進展に伴う表面き裂形状の変化を Fig. 16 に示す。また、Fig. 16 に対応するき裂表面部と最深部に対するき裂長さとサイクル数の関係を Fig. 17 に示す。得られた結果は、き裂表面部、最深部とも良い一致を示している。さらに、き裂表面部と最深部のき裂長さに対する K 値の変化を Fig. 18 に示す。き裂表面部、最深部の K 値とも、き裂が小さい場合、VCCM 法と算式による結果は良い一致を示している。き裂が大きくなるに従い算式と比較して VCCM 法による K 値が増加する。特に、表面部での K 値の増加が大きい。その結果、Fig. 16 に示すような半楕円のき裂進展経路となったことがわかる。VCCM 法による方法、 $Mk_{(3D)}$ の算式を用いた方法どちらともき裂最深部の K 値の差がないことからほぼ同じサイクルで解析が終了したと思われる。Fig. 16 の VCCM 法の結果では Model A と比較して、き裂表面部近傍でき裂深さ方向に早めの進展を示しており、若干ではあるが半楕円形状からのずれを見ることができる。これは、Model A と比較して Model B の溶接止端部での応力集中が高いため、溶接止端部近傍での表面き裂の進展が早くなったためだと考えられる。

Fig. 17 Crack growth curves (Model B)

6.1, 6.2 節では、3 章で示した $Mk_{(3D)}$ の算式を用いた表面き裂進展解析、および 4 章で示した VCCM 法を用いた表面き裂進展解析を実施し、それぞれの結果の比較を行った。得られた結果には多少のずれはあるが、 K 値、き裂進展量、き裂進展経路について良い一致を示している。 $Mk_{(3D)}$ を用いた解析では、簡易かつ短時間の計算で比較的高精度な解を得ることができる。一方、VCCM 法による解析では、三次元 FEM 解析を繰返し行うため計算負荷は大きい、き裂形状を半楕円形状と仮定する必要がない、任意の場所に存在する表面き裂に対してき裂進展解析が可能であるなどの利点がある。VCCM 法を用いることで溶接継手内部で部分的に残留応力が

Fig. 18 K value (Model B)

発生する問題、荷重が非対称である場合など、一般的なき裂進展問題に対しても対応することができる。

5.3 Toe-ground 処理を施した T 字継手の解析 (Model C)

次に、SR202³⁷⁾ で実施された T 字継手 に対して表面き裂進展解析を実施した。解析対象を Fig. 19 (a) に示す。この継手では、溶接止端部においてアンダカット除去のためにグラインダ処理を施してある。研削処理を行う曲率半径を $\rho = 6.0$ (mm) として、溶接止端部を主板表面から 0.4 (mm) 研削した。解析対象のモデル寸法を Fig. 19 (b) にまとめる。このような継手に対する $Mk_{(3D)}$ の算式は著者らの知る限り存在しない。そこで、VCCM 法を用いた解析、5.2 節で示した WX-FEM と $Mk_{(2D)}$ による方法、そして SR202 で実施された解析結果を用いて比較を行った。SR202 で用いられた方法は、 K 値算出の方法は異なるが 5.2 節と同様に $Mk_{(2D)}$ を用いて解析を行っている。

四面体二次要素を用いてメッシュ分割した FE モデルを Fig. 20 に示す。6.2 節と同様に 1/2 モデルを用いて対象条件を与えた。FE モデルのメッシュ分割も 6.1, 6.2 節と同様に実施した。曲げ荷重を加えた解析を想定し、最大曲げ応力が 130, 150, 200, 300 (MPa) となる 4 通りの解析を実施した。VCCM 法および WX-FEM どちらのき裂進展解析においても、サイクル数一定として、曲げ応力 130, 150, 200, 300 (MPa) に対して、それぞれ 60,000, 40,000, 15,000, 3,000 サイクルを用いた。ヤング率 206 (GPa), ポアソン比 0.3 である。

WX-FEM の解析において 5.2 節の方法では、Model C を二次元構造をみなし、 K 値を用いて き裂進展解析を行う。WX-FEM の精度確認のため、端部き裂を持つ帯板の純曲げ解析との解析精度の比較を行った。長さ 76 (mm)、幅 22 (mm) の矩形板を大きさ 0.5 (mm) の矩形状のセルで分割する。長さ方向中央に端部き裂を配置し、幅方向に 0.2 - 11.0 (mm) まで変化させ、参照解³⁸⁾ と比較する。5.1 節で述べたレベル j

Fig. 19 Welded joint model (Model C)[(a) Model C, (b) Model parameters]

Fig. 20 3D FE model (Model C)

のスケーリング関数、レベル $j, j+1$ のウェーブレットを用い、き裂先端から $r_e = 2.0$ (mm) に存在するウェーブレット関数を用いた。得られた K 値とその誤差を表 2 に示す。全てのき裂長さにおいて誤差約 1-2 % 程度に収まっていることから、本モデルを用いることで高精度な WX-FEM 解析が可能であることがわかる。

次に、Model C の WX-FEM のモデルを Fig. 21 (a) に、溶接止端部の詳細形状を Fig. 21 (b) に示す。構造全体は 0.5 (mm) のセルで分割し、toe-ground 処理による溶接止端形状を精確に表現するために格子 (セル) をサブセルに分割して、境界形状を表現した。き裂前縁では、参照解として、MSC.Marc の J 積分機能⁵⁾ を用いて得られた K 値、および SR202 で実施された K 値、端部き裂を持つ帯板の純曲げ解析での K 値との結果を比較した。MSC.Marc の FE モデルを Fig. 21 (c) に

Fig. 21 WX-FEM model [(a) WX-FEM model, (b) Close-up view, (c) FEM model]

Table 2 Error between WX-FEM and the reference solution

a (mm)	$K_I^{\text{Ref.}}$	(SIF unit: $\text{MPa mm}^{1/2}$)	
		$K_I^{\text{WX-FEM}}$	Error (%)
0.2	0.88	0.89	1.00
1.0	1.90	1.93	1.37
3.0	3.19	3.22	0.80
5.0	4.23	4.22	0.20
7.0	5.35	5.33	0.31
9.0	6.77	6.75	0.18
11.0	8.79	8.76	0.34

示す。き裂近傍では 0.01 (mm) 程度の非常に細かいメッシュ分割を行っている。最大曲げ応力を 1.0 (MPa) を加えた場合の、き裂長さに対する K 値の変化を Fig.22 に示す。WX-FEM の結果は、参照解である MSC.Marc の解と良好に一致していることがわかる。また、WX-FEM の結果では、き裂が長くなるに従い端部き裂を持つ帯板の純曲げ解析の K 値に漸近することがわかる。これにより、WX-FEM においても付加物の存在による応力集中の影響を考慮したき裂解析を高精度に実施できていることがわかる。

次に、表面き裂のき裂進展解析の結果に関する検討を行った。WX-FEM を用いた方法と VCCM 法による結果の比較を行った。Fig. 23 に WX-FEM および VCCM 法で得られたき裂深さとサイクル数の関係を示す。さらに、応力振幅とき裂進展寿命の関係を示した図 ($S-N$ 曲線) を Fig.24 に示す。参照解として、SR202 で実施された解析結果も示してある。この結果は解析方法は異なるものの、本解析と同様に二

次元の疲労き裂進展解析を実施し、5.2 節と同様の方法を用いて算出したものである。WX-FEM および VCCM 法で得られた結果は、SR202 での結果と良い相関を示していることが分かる。二次元のき裂進展解析により得られた SR202 や WX-FEM の結果は、VCCM 法で得られた結果と比較して良好に一致する結果が得られた。

6.3 節では、二次元の WX-FEM による方法と三次元 FEM と VCCM 法を用いて表面き裂進展解析を実施した。二次元の WX-FEM を用いた解析および SR202 の方法ではき裂表面部、最深部において同じ $Mk_{(2D)}$ を用いているが、三次元 FEM を用いた表面き裂進展解析とも良好に一致する結果を得ることができた。二次元の WX-FEM を用いた場合、き裂進展にともなうメッシュ再分割を行う必要がなく、効率的にき裂進展解析を行うことができる。また、計算負荷も三次元解析と比較して大きくない。また、容易に溶接部や止端形状を表現できることから、WX-FEM を用いた溶接継手に対する疲労強度評価法も有効であるといえる。

Fig. 22 Comparison of K value (Model C)

Fig. 23 Comparison crack propagation and cycles (Model C)

Fig. 24 Crack propagation fatigue life (Model C)

6. おわりに

本研究では、新しい破壊力学解析手法を用いて、溶接継手の中に存在する表面き裂の進展解析を実施し、溶接継手に対する疲労強度評価法に関する検討を実施した。新しい破壊力学解析手法として、四面体二要素を用いた三次元 FEM と VCCM 法による表面き裂進展解析および、ウェーブレット FEM と X-FEM を用いた二次元解析と Mk ファクターを用いた表面き裂進展解析を実施した。得られた解析結果を既存の数値解析結果、三次元 Mk ファクターを用いた結果との比較を行った。今後は疲労強度試験との比較を行ってゆく。

謝 辞

本研究の一部は、大阪大学接合科学研究所 共同研究員制度を利用して行われた。記して謝意を表す。

参 考 文 献

- 例えば、疲労強度評価ガイドライン、(財)日本海事協会、2002。
- Paris P. and Erdogan F.: A Critical Analysis of Crack Propagation Laws, Journal of Basic Engineering, Transactions ASME, Vol. 85, 1963, pp. 528-534.
- 寺井幸司, 富田康光, 橋本聖史, 大沢直樹, 王業宏: き裂伝播解析に基づく疲労設計法に関する研究, 日本造船学会論文集, Vol. 190, 2001, pp. 531-537.
- Abaqus. Version 6.8, User's Manual, SIMULIA, 2008.
- MSC.Marc 2005r3, User's Guide.
- 西岡俊久, 徳留宏幸, 木下政広: デローニー自動要素分割に基礎をおく移動有限要素法による混合形・破壊経路予測モードシミュレーション, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 65, 1999, pp. 597-604.
- Kaneko S., Okada H. and Kawai H.: Development of Automated Crack Propagation Analysis System (Multiple Cracks and their Coalescence), Journal of Computational Science and Technology, Vol. 6, 2012, pp. 97-112.
- Okada H., Kawai H., Tokuda T. and Fukui Y.: Fully Automated Mixed Mode Crack Propagation Analyses based on Tetrahedral Finite Element and VCCM (Virtual Crack Closure-Integral Method), Vol. 50, 2013, pp. 33-39.
- <http://www.cfg.cornell.edu/software/franc2d-casca.htm> (FRANC2D, CASCA and Translators) [Accessed date: 27 April 2013].
- Belytschko T., Lu Y. Y. and Gu L.: Element Free Galerkin Methods, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, 1994, pp. 229-256.
- Fleming M., Chu Y. A., Moran B. and Belytschko T.: Enriched Element-Free Galerkin Methods for Crack Tip Fields, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 40, 1997, pp. 1483-1504.
- Belytschko T. and Black T.: Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 45, 1999, pp. 601-620.
- Moës N., Dolbow J. and Belytschko T.: A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 46, 1999, pp. 131-150.
- Maddox S. J.: An Analysis of Fatigue Cracks in Fillet Welded Joints, International Journal of Fracture, Vol. 11, 1975, pp. 221-243.
- 徳田貴志, 河合浩志, 岡田裕, 福井泰好: 三次元き裂進展自動解析システムの構築 (第 1 報, き裂解析システムの概要と有限要素モデル生成), 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 76, 2010, pp. 1255-1262.
- 岡田裕, 河合浩志, 徳田貴志, 福井泰好: 三次元き裂自動解析システムの構築 (第 2 報, き裂進展解析システムとき裂進用有限要素モデル生成), 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 76, 2010, pp. 1681-1688.
- Newman J. C. and Raju I. S.: An Empirical Stress-Intensity Factor Equation for the Surface Crack, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 15, 1981, pp. 185-192.
- <http://www.e-technostar.com/>
- 田中智行, 岡田裕, 岡澤重信, 藤久保昌彦: ウェーブレット有限要素法を用いたき裂進展シミュレーション, 日本船舶海洋工学会論文集, Vol. 10, 2009, pp. 167-175.

- 20) Tanaka S., Okada H., Okazawa S. and Fujikubo M.: Two-Dimensional Fracture Mechanics Analyses using the Wavelet Galerkin Method and Extended Finite Element Method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 93, 2013, pp. 1082-1108.
- 21) Hollister S. J. and Kikuchi N.: Homogenization Theory and Digital Imaging: A Basis for studying the Mechanics and Design, Biotechnology and Bioengineering, Vol. 43, 1994, pp. 586-596.
- 22) 鈴木克幸, 寺田賢二郎, 大坪英臣, 米里直樹: ボクセル情報を用いたソリッド構造の解析法, 日本造船学会論文集, Vol. 182, 1997, pp. 595-600.
- 23) Fu B., Haswell J. V. and Bettess P.: Weld Magnification Factors for Semi-Elliptical Surface Cracks in Fillet Welded T-butt Joint Models, International Journal of Fracture, Vol. 63, 1993, pp. 155-171.
- 24) Bowness D. and Lee M. M. K.: The Development of an Accurate Model for the Fatigue Assessment of Doubly Curved Cracks in Tubular Joints, International Journal of Fracture, Vol. 73, 1995, pp. 129-147.
- 25) Bowness D. and Lee M. M. K.: Pblackiction of Weld Toe Magnification Factors for Semi-Elliptical Cracks in T-butt Joints, International Journal of Fatigue, Vol. 22, 2000, pp. 369-387.
- 26) Bowness D. and Lee M. M. K.: Weld Toe Magnification Factors for Semi-Elliptical Cracks in T-butt Joints - Comparison with Existing Solutions, International Journal of Fatigue, Vol. 22, 2000, pp. 389-396.
- 27) Guide to Methods for Assessing the Acceptability of Flaws in Metallic Structures (BS7910), British Standards, 2007.
- 28) 溶接継手のぜい性破壊発生及び疲労き裂進展に対する欠陥の評価方法 (WES2805), 日本溶接協会, 2007.
- 29) Okada H., Kawai H. and Araki K.: A Virtual Crack Closure-Integral Method (VCCM) to Compute the Energy Release Rates and Stress Intensity Factors based on Tetrahedral Finite Elements, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 75, 2008, pp. 4466-4485.
- 30) MSC.Nastran 2010, User's Guide.
- 31) Amaratunga K., Williams J. R., Qian S. and Weiss J.: Wavelet-Galerkin Solutions for One Dimensional Partial Differential Equations, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, 1994, pp. 2703-2716.
- 32) Diaz A. R.: A Wavelet-Galerkin Scheme for Analysis of Large Scale Problems on Simple Domains, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 44, 1999, pp. 1599-1616.
- 33) Tanaka S., Okada H. and Okazawa S.: A Wavelet Galerkin Method employing B-spline Bases for Solid Mechanics Problems without the Use of a Fictitious Domain, Computational Mechanics, Vol. 50, 2012, pp. 35-48.
- 34) Melenk J. M. and Babuška I.: The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139, 1996, pp. 289-314.
- 35) Yau J. F. and Wang S. S.: An Analysis of Interface Cracks between Dissimilar Isotropic Materials using Conservation Integrals in Elasticity, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 20, 1984, pp. 423-432.
- 36) Pang H. L. J.: A Review of Stress Intensity Factors for a Semi-Elliptical Surface Crack in a Plate and Fillet Welded Joint, TWI Report 426/1990, The Welding Institute, Cambridge.
- 37) 海洋構造物の疲労設計法及び溶接部の品質に関する研究報告書 (SR202), (社) 日本造船研究協会, 第 202 研究部会, 1990, pp. 291-363.
- 38) 例えば, 岡村 弘之: 線形破壊力学, 培風館, 1976.
- 39) Bowness D. and Lee M. M. K.: Weld Toe Magnification Factors for Semi-Elliptical Cracks in T-butt Joints, Offshore Technology Report - OTO 1999 014, Health and Safety Executive, 1999.

付 録

6.1 節で用いた $Mk_{(3D)}$ に関して, 文献²⁵⁾ の eq. (A5)-(A8) を用いた. これらの算式は, FEM を用いたパラメトリックスタディによる K 値より回帰的に得られたものである. 詳細は文献³⁹⁾ を参照されたい. 文献²⁵⁾ では, Fig. A1 (a) のようにモデル寸法を定義し, それぞれの寸法名は Fig. A1 (b) である. それらの寸法パラメータを用いて, eq. (A5)-(A8) は Table A1 (c)-(f) のように表すことができる.

Table A1 *Mk* equation for joints with a radiused (ground) weld toe [(a) 3D T-butt model, (b) Nomenclature, (c) Deepest point and membrane loading, (d) Deepest point and bending loading, (e) Crack ends and membrane loading, (f) Crack ends and bending loading]

(a)

(b)

a	Crack depth
b	Plate half width
c	Crack half width
h	Plate half length
h_{att}	Attachment height
t	Attachment thickness
L	Attachment footprint width
T	Main plate thickness
θ	Weld angle
ρ	Weld toe radius

(c)

Application	Eq. (A5)
$0.005 \leq a/T \leq 0.9$	$Mk(g)_{ma} = f_1 \left(\frac{a}{T}, \frac{a}{c} \right) f_2 \left(\frac{a}{T}, \frac{L}{T} \right) f_3(\theta) \quad (A5)$ <p>where</p> $f_1 \left(\frac{a}{T}, \frac{a}{c} \right) = A_1 \left(\frac{a}{T} \right)^{A_2} + A_3 \left[1 - \left(\frac{a}{T} \right) \right]^{A_4} + \left[A_5 \left(\frac{a}{T} \right) + A_6 \right]$ $f_2 \left(\frac{a}{T}, \frac{L}{T} \right) = A_7 \left(\frac{a}{T} \right)^{A_8} + A_9 \left[1 - \left(\frac{a}{T} \right) \right]^{A_{10}}$ $f_3(\theta) = 1.0$ <p> $A_1 = -3.2172(a/c)^2 + 8.9931(a/c) - 7.7356$ $A_2 = -0.22457(a/c)^2 - 0.41009(a/c) + 0.86071$ $A_3 = 0.65009(a/c)^2 - 0.76603(a/c) + 1.0351$ $A_4 = 0.10745(a/c)^2 - 11.039(a/c) + 30.557$ $A_5 = 1.2494(a/c)^2 - 7.1510(a/c) + 9.4916$ $A_6 = 0.33693(a/c)^2 + 0.23884(a/c) + 2.3341$ $A_7 = -0.0021981(L/T)^2 + 0.0066388(L/T) + 0.23244$ $A_8 = 0.098096(L/T)^2 - 0.22280(L/T) + 0.19344$ $A_9 = 0.015584(L/T)^2 + 0.026458(L/T) + 0.31065$ $A_{10} = -0.29651(L/T)^2 + 1.2995(L/T) + 1.0362$ </p>

(d)

Application	Eq. (A6)
$0.005 \leq a/T \leq 0.5$	$Mk(g)_{ba} = f_1 \left(\frac{a}{T}, \frac{a}{c} \right) f_2 \left(\frac{a}{T}, \frac{L}{T} \right) f_3(\theta) \quad (A6)$ <p>where</p> $f_1 \left(\frac{a}{T}, \frac{a}{c} \right) = A_1 \left(\frac{a}{T} \right)^{A_2} + A_3 \left[1 - \left(\frac{a}{T} \right) \right]^{A_4} + \left[A_5 \left(\frac{a}{T} \right) + A_6 \right]$ $f_2 \left(\frac{a}{T}, \frac{L}{T} \right) = A_7 \left(\frac{a}{T} \right)^{A_8} + A_9 \left[1 - \left(\frac{a}{T} \right) \right]^{A_{10}}$ $f_3(\theta) = 1.0$ <p> $A_1 = 45.856(a/c)^2 - 60.626(a/c) + 8.4952$ $A_2 = -0.51457(a/c)^2 + 0.47958(a/c) + 0.60176$ $A_3 = 3.9209(a/c)^2 - 6.0652(a/c) + 4.9184$ $A_4 = 2.9459(a/c)^2 + 0.21875(a/c) + 22.732$ $A_5 = -43.456(a/c)^2 + 54.877(a/c) - 5.0448$ $A_6 = -3.4851(a/c)^2 + 5.9129(a/c) + 5.7718$ $A_7 = -0.0060502(L/T)^2 + 0.021490(L/T) + 0.069432$ $A_8 = 0.037163(L/T)^2 - 0.044638(L/T) + 0.026591$ $A_9 = 0.0028790(L/T)^2 + 0.019043(L/T) + 0.052756$ $A_{10} = -0.87465(L/T)^2 + 3.8378(L/T) - 1.1298$ </p>
$0.5 < a/T \leq 0.9$	$Mk(g)_{ba} = 1.0$

(e)

Application	Eq. (A7)
$0.005 \leq a/T \leq 0.9$	$Mk(g)_{mc} = f_1 \left(\frac{a}{T}, \frac{c}{a} \right) f_2 \left(\frac{a}{T}, \frac{L}{T} \right) f_3(\theta) \quad (A7)$ <p>where</p> $f_1 \left(\frac{a}{T}, \frac{c}{a} \right) = A_1 \left(\frac{a}{T} \right)^{A_2} + A_3 \left[1 - \left(\frac{a}{T} \right) \right]^{A_4} + \left[A_5 \left(\frac{a}{T} \right) + A_6 \right]$ $f_2 \left(\frac{a}{T}, \frac{L}{T} \right) = \left[A_7 \left(\frac{a}{c} \right)^2 + A_8 \left(\frac{a}{c} \right) + A_9 \right] \left(\frac{a}{T} \right)^{A_{10}} + A_{11} \left[1 - \left(\frac{a}{T} \right) \right]^{A_{12}}$ $f_3(\theta) = 1.0$ <p> $A_1 = 0.028842(c/a)^2 - 1.0656(c/a) + 24.632$ $A_2 = 0.0028700(c/a)^2 - 0.036501(c/a) + 0.18232$ $A_3 = 0.24850(c/a)^2 - 2.9413(c/a) + 7.9199$ $A_4 = 1.8860(c/a)^2 - 7.4014(c/a) + 11.572$ $A_5 = 0.035640(c/a)^2 - 0.54495(c/a) - 2.3387$ $A_6 = 0.016883(c/a)^2 + 0.57762(c/a) - 7.7623$ $A_7 = -0.0030300(L/T)^2 + 0.022235(L/T) + 0.0068564$ $A_8 = 0.0052426(L/T)^2 - 0.033387(L/T) - 0.018504$ $A_9 = -0.0038516(L/T)^2 + 0.014780(L/T) + 0.093071$ $A_{10} = -0.0081421(L/T)^2 + 0.012290(L/T) - 0.17469$ $A_{11} = -0.021264(L/T)^2 + 0.067165(L/T) - 0.043132$ $A_{12} = 25.693(L/T)^2 - 19.570(L/T) + 5.4032$ </p>

(f)

Application	Eq. (A8)
$0.005 \leq a/T \leq 0.9$	$Mk(g)_{bc} = f_1 \left(\frac{a}{T}, \frac{c}{a} \right) f_2 \left(\frac{a}{T}, \frac{L}{T} \right) f_3(\theta) \quad (A8)$ <p>where</p> $f_1 \left(\frac{a}{T}, \frac{c}{a} \right) = A_1 \left(\frac{a}{T} \right)^{A_2} + A_3 \left[1 - \left(\frac{a}{T} \right) \right]^{A_4} + \left[A_5 \left(\frac{a}{T} \right) + A_6 \right]$ $f_2 \left(\frac{a}{T}, \frac{L}{T} \right) = \left[A_7 \left(\frac{a}{c} \right)^2 + A_8 \left(\frac{a}{c} \right) + A_9 \right] \left(\frac{a}{T} \right)^{A_{10}} + A_{11} \left[1 - \left(\frac{a}{T} \right) \right]^{A_{12}}$ $f_3(\theta) = 1.0$ <p> $A_1 = 0.43193(c/a)^2 - 4.0236(c/a) + 27.425$ $A_2 = 0.013058(c/a)^2 - 0.12466(c/a) + 0.46051$ $A_3 = 0.22388(c/a)^2 - 2.8643(c/a) + 7.8688$ $A_4 = 0.19132(c/a)^2 - 0.84291(c/a) + 5.2955$ $A_5 = -0.46115(c/a)^2 + 3.6620(c/a) - 9.0179$ $A_6 = 0.038190(c/a)^2 + 0.40816(c/a) - 5.6913$ $A_7 = -0.0028759(L/T)^2 + 0.022350(L/T) - 0.018110$ $A_8 = 0.0045215(L/T)^2 - 0.031258(L/T) + 0.022686$ $A_9 = -0.0038941(L/T)^2 + 0.015240(L/T) + 0.076791$ $A_{10} = -0.0056783(L/T)^2 + 0.0036876(L/T) - 0.31959$ $A_{11} = 0.10998(L/T)^2 - 0.10623(L/T) + 0.0047289$ $A_{12} = 52.952(L/T)^2 + 64.680(L/T) - 42.169$ </p>