トポロジー最適化と固有振動数解析に基づく 非破壊検査での損傷同定手法

学生会員 西 津 卓 史* 正会員 竹 澤 晃 弘**
正会員 北 村 充**

Damage identification in non-destructive testing based on topology optimization and eigenfrequency analysis

by Takafumi Nishizu, *Student Member* Akihiro Takezawa, *Member*
Mitsuru Kitamura, *Member*

Summary

The non-destructive testing for detecting structural damage at the earliest possible stage is significant in the safe and long life operation of large marine structure such as ships. In the non-destructive testing, the variation in structural characteristics from the original one to the damaged one is used to identify the damage. Vibration characteristic is one of the most popular criteria used for it due to its sensitivity for the structural damage. In this paper, a damage identification method used in non-destructive testing is proposed based on topology optimization focusing on the difference of eigenfrequency between the original structure and the damaged one. Eigenfrequency analysis of a structure is considered. A minimization of the least squared error between the eigenfrequency of the damaged structure and the target eigenfrequency is set as an objective function. An optimization algorithm is constructed based on the topology optimization and the method of moving asymptotes (MMA). The validity and the usefulness of the proposed method is confirmed by several numerical examples.

1. 緒 言

非破壊検査技術は船舶のような大型海洋構造物の安全かつ長寿命の運用に重要である^{1, 2, 3)}。現在、非破壊検査技術として、超音波を利用したもの、渦電流を利用したもの、圧電素子を利用したもの、光ファイバを利用したもの等が様々な提案されている⁴⁾。非破壊検査ではそれらの様々な物理現象において、正常な構造物の応答と、損傷を含む検査対象の構造物の応答との違いより損傷を検出する。損傷の同定は、一般的には検査技術者が自ら作業時に行い、その精度は技量に大きく依存する。検査技術者の技量によらない同定法を実現するため、様々な構造物の損傷データを蓄積したデータベースを構築する試みがあるが、対象が限られるという問題点がある。

これに対し、検査結果を力学モデルに基づき解析的に扱い、損傷を同定する方法が提案されている¹⁾。この方法では、検査によって得られた異常応答を実現する損傷を含む構造を、力学モデルと最適化アルゴリズムに基づく数値計算により導出し、それに基づき実際の構造物の損傷を同定する。

他方、構造物の最適化法として、対象の形状のみならず位相（穴の数）も最適化可能なトポロジー最適化が注目されてい

る⁵⁾。トポロジー最適化は最も自由度の高い構造最適化法であり、船舶海洋分野においてもいくつかの応用例が報告されている^{6, 7, 8, 9)}。これらの関連研究では、いずれも構造物の設計問題に対してトポロジー最適化が用いられているが、損傷同定アルゴリズムにも応用可能であり、自由度の高い損傷探索が実現できる。現在まで、トポロジー最適化に基づく損傷同定法として、周波数応答解析に基づく手法^{10, 11)}が提案されている。この方法では、損傷構造の周波数応答解析結果をもとに、それを実現する構造をトポロジー最適化により導出し、その結果より損傷位置やおおよその形状を同定することが可能である。しかし、このようなトポロジー最適化を損傷同定に応用した研究はこの二例に留まり、非破壊検査で用いられる構造物の最も基本的な動的特性である固有振動数に着目した研究は未だ行われていない。

そこで本研究では、固有振動数解析とトポロジー最適化に基づく損傷同定法を構築する。すなわち、検査によって得られる損傷構造の固有振動数を指定することで、それを実現する構造をトポロジー最適化により自動導出し、得られた構造が損傷構造に対応する。以下、2章では損傷構造と現在の構造との固有値の差を最小化するトポロジー最適化問題を定式化する。3章では、感度解析とMMA(method of moving asymptotes)¹²⁾に基づく最適化アルゴリズムを構築する。最後に4章で、数値計算により本手法の妥当性と有効性を検証する。

* 広島大学大学院工学研究科

** 広島大学大学院工学研究院

2. 定式化

2.1 有限要素法による固有振動数解析

本研究では、構造物の固有振動数解析に有限要素法を用いる。まず、連続体の自由振動を考え有限要素法で離散化を行う。周期的な変位 $\mathbf{u}e^{i\omega_n t}$ を解として仮定すると、以下の離散化された振動方程式が得られる。

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M})\mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{K}$ は剛性マトリクス、 $\mathbf{M}$ は質量マトリクス、 ω_n は固有角振動数、 $\mathbf{u}$ は振幅ベクトルである。上式を固有値問題として解くことで、固有角振動数 ω_n と対応する $\mathbf{u}$ が得られ、それが固有モード Φ_n となる。

2.2 トポロジー最適化

トポロジー最適化の基本的な考え方は、固定設計領域と次式に示す特性関数 χ_Ω の導入にある。すなわち、最適構造となるべき（本来の）設計領域 Ω_d を包括する固定設計領域 D を最初に設け、その固定設計領域と特性関数 χ_Ω を用いて、最適化問題を材料分布問題に置き換えることにある。

$$\chi_\Omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_d \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \in D \setminus \Omega_d \end{cases} \quad (2)$$

上式の χ_Ω を用いれば、固定設計領域 D 内の座標 $\mathbf{x}$ の点の、 χ_Ω 内での有無を判断することにより、最適構造を決定することができる。しかし、この式に基づいて最適化を行う場合には、固定設計領域 D 内の全ての座標 $\mathbf{x}$ において、不連続関数 χ_Ω を評価する、すなわち無限個の設計変数について不連続値を評価することになり、数学的に最適解が存在しないことが証明されている。この問題は、特性関数に関する最適化問題を、大域的な意味で連続な密度関数の最適化問題に置き換えることで解決され、その緩和法としては均質化法を用いた方法¹³⁾や、それを簡易に定式化した SIMP 法¹⁴⁾が提案されている。これらの方法では、緩和された最適化問題は、空孔を模した非常に弱い材料と母材とで構成される複合材料における、母材の体積含有率の最適化問題と解釈できる。このような最適化問題においては、構造が空孔か判断が困難なグレーの領域がしばしば生じるが、SIMP 法はこの複合材料における体積含有率を示す密度関数と物性値との関係の非線形性をパラメータにより調整でき、明確な構造を得易いという利点があるため、多くの研究で用いられている。そのため、本研究でもトポロジー最適化法として SIMP 法を用いるとする。本来のトポロジー最適化の定義では、固定設計領域 D 内の全ての座標 $\mathbf{x}$ において関数を実評価することになるが、効率的な求解のため、固定設計領域をいくつかの領域で分割し、有限個の設計変数を持つ最適化問題に置き換える。ここで、固定設計領域を l 個に分割し、それぞれに密度関数 d を設定するものとし、それをベクトルで表記する ($\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_l]$)。同様に、式 (1) に関係する物性定数である l 個のヤング率及び質量密度物性定数が密度関数に関連付けられるとする。このとき、 i 番目の物性定数

を以下のように表す。

$$E_i^* = d_i^3 E \text{ for } i = 1, \dots, l \quad (3)$$

$$\rho_i^* = d_i \rho \text{ for } i = 1, \dots, l \quad (4)$$

ここで、 E と ρ は原材料のヤング率及び質量密度を示し、添字の $*$ は最適化に用いられる密度関数 d で表された物性値を示す。また、SIMP 法においては上式の設計変数の指数について任意に設定することができるが、ここでは振動問題におけるトポロジー最適化で実績のある、ヤング率に対しては 3、質量密度に対しては 1 の値を導入した^{15, 16)}。

2.3 目標関数と最適化問題

本研究では、損傷構造の固有振動数及び固有モードが実験で得られていると仮定した上で、その固有振動数を有する構造を最適化により導出し損傷同定を行う。ただし対象としては、低次の固有振動数が異なる値で得られ、かつそれらに対応する固有モードが一つずつしか存在しない、単純な構造を想定する。指定した固有振動数を実現するため、目標関数を文献¹⁵⁾を参考に、指定した固有値と現在の固有値との変化率の二乗として以下のように設定する。

$$J(\mathbf{d}) = \sum_{i=1}^m w_i \frac{(\lambda_{\text{target}i} - \lambda_i)^2}{\lambda_{\text{target}i}^2} \quad (5)$$

ここで、 $\lambda = \omega_n^2$ は固有値を表し、 $\lambda_{\text{target}i}$ は i 次の固有値の目標値、 λ_i は現在の構造における i 次の固有値を表す。また、 m は最適化で考慮する固有値の個数を表し、 w_i は各固有値の重み係数を表す。そして、本研究におけるトポロジー最適化問題は以下のように表される。

$$\underset{\mathbf{d}}{\text{minimize}} J(\mathbf{d}) \quad (6)$$

Subject to

$$0 < d_i \leq 1 \text{ for } i = 1, \dots, l \quad (7)$$

上記最適化問題においては、固有振動数のみ考慮しており、固有モードは最適化の対象外である。そのため、もし損傷構造の固有モードと最適化構造の固有モードが異なれば、固有振動数を一致させたとしても、全く異なる構造が得られることが予想される。そのため、本研究においては、損傷構造の固有モードと最適化構造の固有モードが異なる場合に、以下の式より、損傷構造の固有振動モードに対応する最適化構造の固有振動モードの次数を特定する。

$$\underset{j}{\text{minimize}} \|\Phi_{\text{target}i} - \Phi_j\|^2 \quad (8)$$

ここで、 $\Phi_{\text{target}i}$ は損傷構造の i 次の固有モードを、 Φ_j は j 次の最適化構造の固有モードを表す。上式を最小化する j が、損傷構造の i 次に対応する最適化構造の固有振動数次数となり、最適化で用いられる。

3. 最適化手順

3.1 最適化アルゴリズム

本研究での最適化のフローチャートを図1に示す。最適化を行うための準備として目標とする損傷構造を設定し、振動方程式を解くことで固有振動数を求める。この固有振動数を用いて目的関数にて最適化を行う。これ以下は、最適化ループとなり、目標関数が収束するまで計算を繰り返す。(1)最適化する構造に関する振動方程式を解いて固有振動数及び固有モードを求める。これはあくまでも例題を解く上での作業であり、実際に本手法を非破壊検査に適用する際は、これらの値は検査で得ることになる。(2)先に求めた目標構造と最適化する構造とで、固有振動モードの次数の一致を確認・修正し、(3)同じ種類の固有振動モードに対する固有値を選択して差を取ることで目的関数を計算する。目的関数の計算後、目的関数が収束していた場合は最適化を終了する。(4)収束していない場合は目的関数の感度を計算し、(5)逐次凸関数近似法(一種である Method of Moving Asymptotes(MMA)¹²⁾)を用いて設計変数を更新する。

Fig. 1 Flowchart of optimization procedure

3.2 感度解析

本研究で設計変数の更新に用いる MMA では、目的関数の設計変数に関する感度を必要とする。目的関数である式(5)の j 番目の設計変数 d_j に関する微分は以下のように表される。

$$\frac{\partial J(\mathbf{d})}{\partial d_j} = -2 \sum_{i=1}^m w_i \frac{\lambda_{\text{target}i} - \lambda_i}{\lambda_{\text{target}i}^2} \times \frac{\partial \lambda_i(\mathbf{d})}{\partial d_j} \quad (9)$$

なお、 i 番目の固有値 λ_i の j 番目の設計変数 d_j に関する微分は以下の式で得られる¹⁵⁾。

$$\frac{\partial \lambda_i(\mathbf{d})}{\partial d_j} = \Phi_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial d_j} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial d_j} \right) \Phi_i \quad (10)$$

3.3 フィルタリング法の導入

本研究ではトポロジー最適化法として SIMP 法を用いる。しかし、この方法を二次元問題に使用した際に、しばしばチェッカーボードと呼ばれる不安定構造を生じることが知られている¹⁷⁾。この問題を回避するための一般的な方法として、離散化された密度関数もしくは感度を平滑化するフィルタリング法の適用が挙げられる。本研究ではフィルタリング法として密度フィルタリング法¹⁸⁾を用いる。この方法はある箇所における密度関数を周辺の密度関数の値と平均化することで、チェッカーボードを回避する。

4. 数値例

いくつかの数値例により本手法の妥当性を示す。損傷により固有振動数が変化しやすい構造物として、重量物の支持構造を考える。なお、重量物は構造部材とみなさず、付加質量として扱うものとする。物性値や寸法は簡単のため全て無次元量として扱い、ヤング率 $E = 1$ 、質量密度 $\rho = 1$ の仮想的な材料を用いる。構造物は全て二次元平面応状態を仮定し、奥行き方向の厚さは1とする。また、有限要素の定式化には一次のアイソパラメトリック要素を用いる。有限要素法及び最適化プログラムは Matlab を用いて作成し、固有値解析には eig 関数を用いる。また、設計変数 d は各有限要素に設定され、最適化の初期値は1とする。

4.1 片端固定構造

最初の例題として、図2に示すような寸法 2×1 の平板を考える。左辺を完全固定し、右辺に合計値が1となる分布非構造質量を付加する。この領域を 80×40 の正方形要素で分割し、有限要素解析を行う。この平板に図3に示すように、左辺の中央に半円状の損傷を想定する。

この目標構造の固有振動数を解析したところ、固有振動モードの形状より、1~5 次の固有振動数が損傷の影響を強く受けると判断した。図4に1~5 次の固有振動モードを示す。損傷箇所は固定端中央であり、6 次以上の固有振動モードで見られる構造全体の曲げ振動や自由端先端のみの振動よりも、構造全体の引張・圧縮方向の振動への影響の方が大きいと考えられる。そこで、式(5)の目的関数で1~5 次の固有値を考慮し、最適化を行う。なお、重み係数 w は全て1とする。

目的関数の収束履歴を図5に示す。500回で目的関数が収束したと判断した。得られた最適構造を図6に、その固有振動数を表1に示す。なお、最適化過程を通じて、損傷構造と最適化構造とにおいて、固有モードの次数と形の違いはなかった。図6より、損傷の形状を厳密には再現できていないものの、左端中央に欠陥が生じており、損傷位置の同定が可能であること

Table 1 Eigenfrequencies of optimal structure of example 1 (Hz)

Order	1st	2nd	3rd	4th	5th
Damaged structure	2.01×10^{-2}	4.20×10^{-2}	4.98×10^{-2}	5.39×10^{-2}	6.00×10^{-2}
Optimal structure	2.01×10^{-2}	4.20×10^{-2}	4.98×10^{-2}	5.39×10^{-2}	6.00×10^{-2}
Error(%)	0.08	0.01	0.01	0.01	0.01

Fig. 2 Analysis model of example 1

Fig. 3 Damaged model of example 1

Fig. 4 Eigenmode shapes of damaged structure of example 1

がわかる。また、表 1 より、1～5 次の固有振動数が損傷構造と最適化構造で確かに近い値になっていることがわかる。

Fig. 5 Convergence history of example 1

Fig. 6 Optimal configuration of example 1

4.2 両端固定構造

次に、 4×1 の両端完全固定の構造を考え、その中央に円状の損傷を考える。対称性を考慮すると、解析は図 7 とに示す 2×1 のモデルで行うことができる。左辺は完全拘束し、右辺は x 変位のみ拘束する。また、大きさ 1 の集中質量を右辺の下端に付加する。この領域を 80×40 の正方形要素で分割し、有限要素解析を行う。

この目標構造の固有振動数を解析したところ、固有振動モードの形状より、1～6 次の固有振動数が損傷の影響を強く受ける判断した。図 9 に 1～6 次の固有振動モードを示す。損傷箇所は右端中央であり、右端の変形を伴う振動への影響が大きいと考えられる。そこで、式 (5) の目標関数で 1～6 次の固有値を考慮し、最適化を行う。なお、重み係数 w は全て 1 とする。

目標関数の収束履歴を図 10 に示す。150 回で目標関数が収束したと判断した。得られた最適構造を図 11 に、その固有振動数を表 2 に示す。なお、先の例題と同様に、最適化過程を通じて損傷構造と最適化構造とにおいて、固有モードの次数と形の違いはなかった。図 11 より、損傷の形状を厳密には再現で

Fig. 7 Analysis model of example 2

Fig. 8 Damaged model of example 2

Fig. 9 Eigenmode shapes of damaged structure of example 2

きていないものの、右端中央に欠陥が生じており、先の例題と同様に、損傷位置の同定が可能であることがわかる。また、表 2 より、1~6 次の固有振動数が損傷構造と最適化構造で確かに近い値になっていることがわかる。

4.3 片端固定構造-損傷により振動モードが変化する場合

最後に、一つ目の例題と同様の構造において、目標とする損傷構造が大きく、損傷がない構造と固有振動モードが異なる場

Fig. 10 Convergence history of example 2

Fig. 11 Optimal configuration of example 2

合を考える。損傷構造を図 12 に示すように自由端側の右辺よりの上下に正方形の損傷のある構造とする。最初の例題と同様に 1~5 次までの固有値を考慮することとし、図 13 に損傷構造の固有振動モードを示す。さらに、最適化の初期解となる、損傷がない構造の固有振動モードを解析したところ、図 14 に示すように、3 次と 4 次の固有振動モードの順番が逆になっている。そのため、目標構造と最適化する構造の次数ごとに、式 (8) に基づいて固有ベクトルを比較し、同じ固有振動モードに対する固有値を選択して最適化を行う。この処理は、最適化の繰り返し計算ごとに行う。なお、重み係数 w は全て 1 とする。

Fig. 12 Damaged structure of example 3

目標関数の収束履歴を図 15 に示す。500 回で目標関数が収束したと判断した。想定した損傷が大きいため、最適化前は損傷構造と最適化構造の固有振動数の差が大きく、目標関数のオーダーが先の例題よりも大きいことがわかる。得られた最適構造を図 16 に、その固有振動数を表 3 に示す。また、最適構造の固有振動モードを図 17 に示す。最適化の初期状態では固有モードが入れ替わっていたものの、最適化を通じて最終的に損傷構造と同じ次数で近い形状の固有モードが得られたことがわかる。図 16 より、右端近くの上下端に複雑な形状の欠陥が

Table 2 Eigenfrequencies of optimal structure of example 2 (Hz)

Order	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
Damaged structure	2.41×10^{-2}	1.13×10^{-1}	1.70×10^{-1}	1.97×10^{-1}	2.27×10^{-1}	2.55×10^{-1}
Optimal structure	2.41×10^{-2}	1.13×10^{-1}	1.70×10^{-1}	1.97×10^{-1}	2.27×10^{-1}	2.54×10^{-1}
Error(%)	0.03	0.03	0.17	0.02	0.14	0.07

Fig. 13 Eigenmode shapes of damaged structure of example 3

Fig. 14 Eigenmode shapes of initial model

生じており、損傷の形状は全く異なるものの、損傷位置の同定が可能であることがわかる。また、先の例題と同様に、表 3 より、1～5 次の固有振動数が損傷構造と最適化構造で確かに近い値になっていることがわかる。

5. 結言

本研究では、非破壊検査によって得られる損傷構造の固有振動数を指定し、それを実現する構造をトポロジー最適化により自動導出し、得られた構造より損傷を同定する手法を開発した。そのために、最適化問題として、損傷構造と現在の構造との固有振動数の差の最小化問題を設定し、感度解析と MMA に基づく最適化アルゴリズムを構築した。そして、数値例により、本手法で損傷の詳細な形状までは再現できないものの、

Fig. 15 Convergence history of example 3

Fig. 16 Optimal configuration of example 3

Fig. 17 Eigenmode shapes of optimal structure of example 3

Table 3 Eigenfrequencies of optimal structure of example 3 (Hz)

Order	1st	2nd	3rd	4th	5th
Damaged structure	1.97×10^{-2}	3.67×10^{-2}	4.11×10^{-2}	4.59×10^{-2}	5.70×10^{-2}
Optimal structure	1.96×10^{-2}	3.67×10^{-2}	4.12×10^{-2}	4.59×10^{-2}	5.70×10^{-2}
Error(%)	0.22	0.02	0.24	0.10	0.04

損傷位置の同定が可能であることを示した。

本手法の実用性を考えると、例題 4.1 と 4.2 のように、損傷構造と無損傷構造で振動モードが等しい場合には、ハンマリング等で固有振動数を求めるだけで容易に本手法が使用できる。しかし、固有振動モードが損傷構造と無損傷構造で異なる場合には、固有振動数のみならず固有モードも計測で得る必要があり、それが可能な場合にのみ本手法が使用可能である。なお、本論文の例題においては、損傷同定のために使用する固有振動数の数を損傷構造の解析結果より決定したが、実際にはその情報がないため、それは得られた損傷形状候補にもとづき、試行錯誤で決定する必要がある。

また、本手法は固有値解析に基づいており、海洋構造物の中でも比較的単純な構造に適用対象が限られる。すなわち、船舶のような複雑な構造では、近い周波数で極めて多くの振動モードが混在し、本手法で特定の振動モードを対象に最適化することが難しくなると予想される。そこで、今後の展開としては、現在非破壊検査で用いられているより詳細に損傷が検出可能な、超音波や渦電流を利用した手法に着目して研究を行うことが考えられる。

謝 辞

本研究は造船学術研究推進機構及び笹川科学研究助成, JSPS 科研費 25820422 及び 24360356 の助成を受けたものです。ここに関係者の皆様へ感謝の意を記します。

参 考 文 献

- 1) 中田諭志, 鈴木英之. 大型浮体構造物の破損部位広域特定法に関する基礎的研究. 日本船舶海洋工学会論文集, Vol. 6, pp. 159–166, 2007.
- 2) 吉川孝男, 前田正広, 前田修平, 柴田大貴. 数値シミュレーションによる超音波探傷の高精度化研究. 日本船舶海洋工学会論文集, Vol. 10, pp. 187–196, 2009.
- 3) 平澤英幸, 柴田大貴, 前田正広, 吉川孝男. 斜角探傷試験における欠陥同定のための音源重ね合せ超音波伝播シミュレーションについて. 日本船舶海洋工学会論文集, Vol. 15, pp. 135–143, 2012.
- 4) Paul E. Mix. *Introduction to Nondestructive Testing: A Training Guide*. Wiley-Interscience, 2 edition, 2005.
- 5) M. P. Bendsøe and O. Sigmund. *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- 6) 大坪英臣, 鈴木克幸. 局所応力制約付き形状レイアウト最適化問題の解法. 日本造船学会誌, Vol. 173, pp. 263–268, 1993.
- 7) 奥本泰久, 濱川博行. 二重殻構造のトポロジー最適化. 近畿大学工学部研究報告, Vol. 40, pp. 135–139, 2006.
- 8) M. Rais-Rohani and J. Lokits. Reinforcement layout and sizing optimization of composite submarine sail structures. *Struct. Multidisc. Optim*, Vol. 34, No. 1, pp. 75–90, 2007.
- 9) 竹澤晃弘, 金野有里, 北村充, 濱田邦裕, 大槻康明. トポロジー最適化を用いたブリッジウィングの防振設計に関する研究. 日本船舶海洋工学会論文集, Vol. 10, pp. 205–212, 2009.
- 10) J. S. Lee, J. E. Kim, and Y. Y. Kim. Damage detection by the topology design formulation using modal parameters. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 69, No. 7, pp. 1480–1498, 2007.
- 11) H. Niemann, J. Morlier, A. Shahdin, and Y. Gourinat. Damage localization using experimental modal parameters and topology optimization. *Mech. Syst. Signal Process.*, Vol. 24, No. 3, pp. 636–652, 2010.
- 12) K. Svanberg. The method of moving asymptotes- a new method for structural optimization. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 24, No. 2, pp. 359–373, 1987.
- 13) M. P. Bendsøe and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 71, No. 2, pp. 197–224, 1988.
- 14) M. P. Bendsøe and O. Sigmund. Material interpolation schemes in topology optimization. *Arch. Appl. Mech.*, Vol. 69, No. 9, pp. 635–654, 1999.
- 15) Z. D. Ma, N. Kikuchi, and H. C. Cheng. Topological design for vibrating structures. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 121, No. 1-4, pp. 259–280, 1995.
- 16) N. L. Pedersen. Maximization of eigenvalues using topology optimization. *Struct. Multidisciplinary Optim.*, Vol. 20, No. 1, pp. 2–11, 2000.
- 17) A. Diaz and O. Sigmund. Checkerboard patterns in layout optimization. *Struct. Optim.*, Vol. 10, No. 1, pp. 40–45, 1995.

- 18) T. E. Bruns, O. Sigmund, and D. A. Tortorelli. Numerical methods for the topology optimization of structures that exhibit snap-through. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 55, No. 10, pp. 1215–1237, 2002.
-